$\pi \approx 3$

NEU NACH LEHRPLAN 2011

MATHEMATIK 3

SIDLO
PUHM
STEINMAIR
CAMILO
DRS
POLLACK-DRS
WYMLATIL

MIT TECHNISCHEN ANWENDUNGEN

NEU+

- BILDUNGSSTANDARDS
- KOMPETENZORIENTIERT
- ZUR NEUEN RDP

hpt

Eva-Maria Sidlo – Ursula Puhm – Cornelia Steinmair – Christina Camilo
Wolfgang Drs – Susanne Pollack-Drs – Georg Wymlatil

Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 3 Neu nach Lehrplan 2011

Um die Übersicht zu erhöhen und das Arbeiten mit dem Buch zu erleichtern, sind die Aufgaben durch farbige Aufgabennummern differenziert:

- Einstiegsaufgaben (also Aufgaben, die zu einem neuen Themenbereich hinführen) sind durch **orangefarbene** Aufgabennummern gekennzeichnet.
- **Schwarze** Aufgabennummern kennzeichnen Aufgaben, deren Lösung im Lehrbuch vollständig dargestellt wird. Solche Aufgaben sind darüber hinaus auch durch eine blaue Rasterunterlegung vom übrigen Text deutlich abgegrenzt.
- Die anderen Aufgaben sind je nach Anspruchsniveau durch **rote** (niedriges Anspruchsniveau), **blaue** (mittleres Anspruchsniveau) und **grüne** (hohes Anspruchsniveau) Aufgabennummern gekennzeichnet. Die mit dieser Kennzeichnung vorgenommene Differenzierung ist für den Unterricht nicht verbindlich.

Bei jeder Aufgabe wird angeführt, welche **Handlungsdimensionen** gemäß dem **Kompetenzmodell (Bildungsstandards Angewandte Mathematik BHS)** jeweils angesprochen werden:

A … Modellieren und Transferieren
B … Operieren und Technologieeinsatz
C … Interpretieren und Dokumentieren
D … Argumentieren und Kommunizieren

Die überwiegend angesprochene **Inhaltsdimension** wird jeweils am unteren Seitenrand angeführt.

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur vom 16. September 2013, GZ 5.034/0055-B/8/2013, gemäß § 14 Abs. 2 und 5 des Schulunterrichtsgesetzes, BGBl. Nr. 472/86, und gemäß den derzeit geltenden Lehrplänen als für den Unterrichtsgebrauch für den III. Jahrgang an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage eines zielorientierten Lehrplans verfasst. Konkretisierung, Gewichtung und Umsetzung der Inhalte erfolgen durch die Lehrerinnen und Lehrer.

Schulbuchnummer: 165008

Bildquellen: Bildarchiv der Österreichischen Nationalbibliothek (ÖNB) Wien (104); Erich Péhm (220/unten); Florian Sidlo (237/unten); Fotolia.com: © adimas (152/4.94), © Anatoly Maslennikov (122), © Andreas Edelmann (220/oben), © Ansebach (125), © Arena Creative (81/3.70), © Beboy (8), © Bobo (132/4.35), © Brad Pict (204), © Carlos Santa Maria (235), © Carola Schubbel (270), © Christian Jung (131/4.33, 300/unten), © Coloures-Pic (304), © cuhle-fotos (285), © dominic ruckert (5), © Doris (166/4.147), © enrico113 (147), © ezoom (107), © forkART Photography (151), © Fotimmz (237/oben), © fotografia66 (130/4.26), © Franz Pfluegl (301), © frogmo9 (146), © Gennadiy Poznyakov (100), © godfer (240), © Gudellaphoto (50), © gunter kremer (228/unten), © hecke71 (132/4.37), © Himmelssturm (9), © HP_Photo (303), © Ingo Bartussek (277), © jelwolf (176), © jgorzynik (228/oben), © John (238), © JPS (297), © Jürgen Fälchle (288), © K.-U. Häßler (124, 160), © Kim Warden (43), © Klaus Eppele (15), © Klaus The. (159), © Kletr (26), © Kruwt (152/4.92), © M. Schuppich (29), © Marianne Mayer (264), © Mariusz Blach (120/3.294), © Martin_P (306), © Matthias Nast (112), © Michael Ebardt (162), © Michael Rippas (131/4.31), © Miredi (148, 300/oben), © mirpic (166/4.148), © PANORAMO (280), © Patryk Kosmider (228/mitte), © photo 5000 (67), © photobar (120/3.290), © reeel (1, 68, 78), © Rolandst (168), © Sascha Wilsrecht (307), © Schlierner (30), © seen (62), © sergojpg (72), © spuno (33), © Stefan Körber (130/4.22), © Stephen Coburn (302), © Thomas Oswald (210), © Tristan Schlafhai (184), © vege (256), © volff (44), © zigzagmtart (49); Janosch A. Slama (18, 81/3.67); Lisa Sidlo (140); NASA (217); Richard Hofstädter (36, 236); Wikimedia Commons (60/links, 60/rechts, 61/oben, 61/unten, 211); Wilhelm Busch (185); alle übrigen von den Autorinnen und Autoren.

In Fällen freier Werknutzung: Schulbuchvergütung/Bildrechte: © VBK, Wien 2014

1. Auflage 2014 (1,00)

Technische Zeichnungen: Herbert Löffler
Satz: Barbara Fischer, 1230 Wien
Druck und Bindung: Brüder Glöckler GmbH, 2752 Wöllersdorf

ISBN 978-3-230-03635-3

Bestellschein

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Zu diesem Schulbuch gibt es ein Lösungsheft, das die Lösungen zu den Aufgaben dieses Buchs enthält.

Als Ergänzung zu den im Lehrbuch enthaltenen Aufgaben und Problemstellungen gibt es 4 Zusatzhefte, die ausführlich dokumentierte technische Anwendungen enthalten und jeweils verschiedene Fachrichtungen berücksichtigen – siehe Bestellabschnitt. In den Zusatzheften sind die Lösungen der dort enthaltenen Aufgaben integriert.

Bitte gib den ausgefüllten und unterschriebenen Bestellabschnitt in deiner Buchhandlung ab oder bestelle direkt beim Verlag:

Adresse: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Frankgasse 4, 1090 Wien
Tel.: 01/403 77 77
E-mail: service@hpt.at

Fax: 01/403 77 77 DW 77

Hiermit bestelle ich mit Rechnung:

Lösungen zu Band 3 (Neu nach Lehrplan 2011)

_____ Expl. Lösungen zu Band 3 (LP 2011)
(ISBN 978-3-230-03637-7)*
*) € 9,70 inkl. Porto und Verpackung

Zusatzhefte zu Band 3

_____ Expl. Zusatzheft für Bautechnik sowie Innenraumgestaltung und Holztechnik
(SBNR 150002)**
**) € 9,90 inkl. Porto und Verpackung

_____ Expl. Zusatzheft für Elektrotechnik und Elektronik (SBNR 150003)***
***) € 9,90 inkl. Porto und Verpackung

_____ Expl. Zusatzheft für Maschineningenieurwesen, Mechatronik und Werkstoffingenieurwesen
(SBNR 150004)****
****) € 10,90 inkl. Porto und Verpackung

_____ Expl. Zusatzheft für Wirtschaftsingenieurwesen
(SBNR 150005)*****
*****) € 9,90 inkl. Porto und Verpackung

Für alle Angebote gilt: Preisänderungen vorbehalten

Bitte gib deinen Namen und deine Adresse an:

Name:

____

____

Adresse:

____

____

____

Datum und Unterschrift:

____
(bei Minderjährigen des Erziehungsberechtigten)

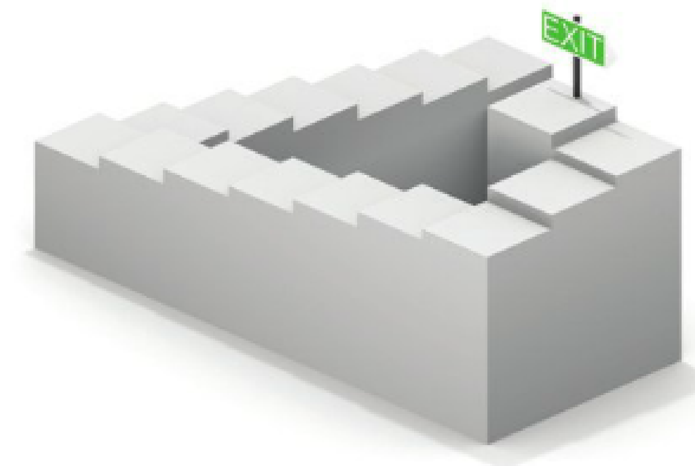
Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Unendliche Folgen und Reihen

1

Die Lösung vieler mathematischer Probleme erfordert es, den Begriff „unendlich" in der Argumentation zuzulassen. Um mit unendlich vielen Zahlenwerten oder unendlich kleinen Größen auch mathematisch sinnvoll arbeiten zu können, sind Grundbegriffe nötig, die im Folgenden erarbeitet und in den weiteren Abschnitten für Anwendungen wie Flächen- und Volumenberechnungen benötigt werden.



1.1 Wiederholung und Vertiefung

1.1.1 Darstellungen von Folgen

1.1 Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (italienischer Mathematiker, um 1180 – 1241), stellte in seinem 1202 erschienenen Rechenbuch sinngemäß folgende Aufgabe: **ABD**

„Ein Mann hielt ein Paar Kaninchen an einem Ort, der ringsum von einer Mauer umgeben war, um herauszufinden, wie viele Paare daraus in einem Jahr entstünden.
Dabei ist es ihre Natur, jeden Monat ein neues Paar auf die Welt zu bringen, und sie gebären erstmals im zweiten Monat nach ihrer Geburt."

1) Erkläre, warum die Zahlenfolge $\langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \rangle$ die Anzahl der Kaninchenpaare angibt, die jeweils zu Beginn eines Monats innerhalb der Mauer leben, unter der Voraussetzung, dass das erste Kaninchenpaar zu Beginn der Zählung geboren wurde.

2) Setze die Folge fort und beschreibe das Bildungsgesetz mit eigenen Worten. Wie viele Kaninchenpaare hatte der Mann nach einem Jahr, wenn alle Tiere überlebt hatten?

3) Gib einen Rechenausdruck zur Berechnung des jeweils nächsten Glieds der Folge an.

Die **Anordnung von Zahlen** in einer **bestimmten Reihenfolge** wird in der Mathematik als **Zahlenfolge**, kurz **Folge**, $\langle a_n \rangle$ bezeichnet. Dabei wird jedem Index $n \in \mathbb{N}^*$ ein Wert a_n zugeordnet. Diese Zuordnungsvorschrift kann mathematisch durch einen erzeugenden Term oder mithilfe einer Rekursionsformel beschrieben werden (vergleiche Band 2, Abschnitt 11).

- **Erzeugender Term (explizite Darstellung)**
  Jedes Glied der Folge wird mithilfe des Index n berechnet.
  ZB: $a_n = n^2$
  $a_1 = 1^2 = 1$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 3^2 = 9$ $\qquad \langle a_n \rangle = \langle 1, 4, 9, \dots \rangle$

- **Rekursive Darstellung**
  Jedes Glied der Folge wird mithilfe vorangegangener Glieder der Folge berechnet.
  ZB: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
  mit $a_1 = 1$, $a_2 = 2$
  $n = 1$: $a_n = a_1$, $a_{n+1} = a_{1+1} = a_2$, $a_{n+2} = a_{1+2} = a_3$
  $a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$
  $n = 2$: $a_n = a_2$, $a_{2+1} = a_3$, $a_{2+2} = a_4$
  $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$
  $\langle a_n \rangle = \langle 1, 2, 3, 5, \dots \rangle$

  Da a_{n+2} aus a_{n+1} und a_n berechnet wird, müssen zwei Startglieder gegeben sein.
  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ bedeutet, dass ein Glied der Folge die Summe der beiden vorangegangenen Glieder ist.

  Die Rekursionsformel kann auch mithilfe anderer Folgeglieder, zum Beispiel in der Form $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ oder $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ angegeben werden.

Ist ein erzeugender Term angegeben, kann man ein beliebiges Glied der Folge berechnen, ohne – wie bei der rekursiven Darstellung – alle davor liegenden Glieder ermitteln zu müssen.
Rekursive Darstellungen werden oft beim Programmieren verwendet.
Bei manchen Anwendungen wird mit der Definitionsmenge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ gearbeitet.

Unendliche Folgen und Reihen

Eine **Zahlenfolge** (kurz: **Folge**) $\langle a_n \rangle$ ist eine Funktion, deren Definitionsmenge die Menge der natürlichen Zahlen oder eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist. Die Zuordnungsvorschrift wird **Bildungsgesetz** genannt.
Ist die Definitionsmenge endlich, so erhält man eine **endliche Zahlenfolge**.
Ist die Definitionsmenge unendlich, so erhält man eine **unendliche Zahlenfolge**.
Die Zuordnungsvorschrift kann unter anderem als **erzeugender Term** oder mithilfe einer **Rekursionsformel** angegeben werden.

Bemerkungen:

- Viele Folgen können durch verschiedene Bildungsgesetze beschrieben werden. Zum Beispiel kann die Folge der Quadratzahlen $\langle 1, 4, 9, 16, 25, \dots \rangle$ sowohl durch $a_n = n^2$ als auch durch $a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$ mit $a_1 = 1$ angegeben werden. Es ist jedoch nicht jede Art von Bildungsgesetz zur Beschreibung jeder Folge gleich gut geeignet.
- Aus einer endlichen Anzahl von Gliedern einer unendlichen Folge lässt sich das Bildungsgesetz nicht mit Sicherheit bestimmen. Zum Beispiel könnte es sich bei der unendlichen Folge $\langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ um die Folge der natürlichen Zahlen, aber auch um die Folge $\langle 1, 2, 3, 10, 20, 30, 100, 200, 300, \dots \rangle$ handeln.

ABC



TI-Nspire, GeoGebra: www.hpt.at

1.2 **1)** Zähle die ersten fünf Glieder der Folge $a_{n+1} = a_n - 3$ mit $a_4 = 7$ auf.
2) Gib mithilfe von Technologieeinsatz das 50. Glied der Folge an. Stelle die Folge grafisch dar und beschreibe ihr Verhalten.
3) Ermittle einen erzeugenden Term und beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung mit Excel 2010:

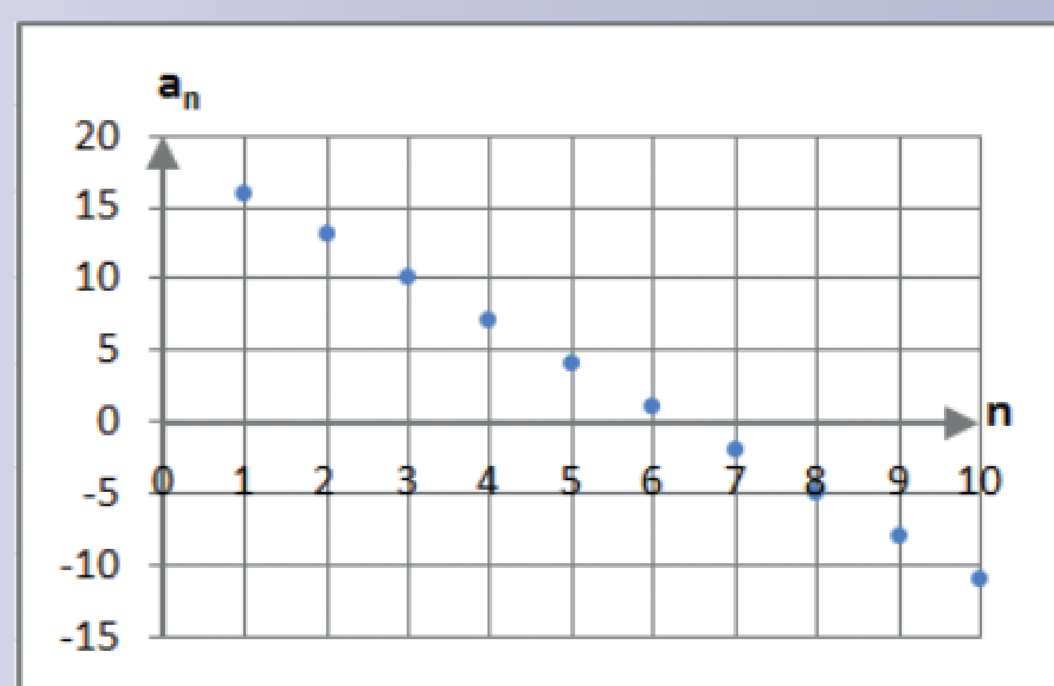
1) $a_5 = a_4 - 3 = 7 - 3 = 4$
$a_{n+1} = a_n - 3 \Rightarrow a_n = a_{n+1} + 3$
$a_3 = a_4 + 3 = 7 + 3 = 10$
$a_2 = a_3 + 3 = 10 + 3 = 13$
$a_1 = a_2 + 3 = 13 + 3 = 16$
$\langle a_n \rangle = \langle 16, 13, 10, 7, 4, \dots \rangle$

- a_5 wird mithilfe von a_4 berechnet.
- Für die Berechnung der vor a_4 liegenden Glieder wird die Formel umgeformt.

2)

	A	B	C	D
1				
2		n	a_n	
3		1	16	
4		2	13	
5		3	10	=C6+3
6		4	7	$a_4 = 7$
7		5	4	=C6-3
51		49	-128	
52		50	-131	

- Bei Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms wird die Rekursionsformel eingegeben und die Formel bis zum 50. Folgeglied kopiert.



Das 50. Folgeglied lautet $a_{50} = -131$.
Anhand der Grafik erkennt man eine lineare Abnahme.

3) Die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern ist immer 3 und das erste Glied ist 16. Damit ergibt sich: $a_n = 16 - (n - 1) \cdot 3$ bzw. $a_n = 19 - 3n$

1.3 Berechne die ersten drei Glieder der Folge $a_n = \frac{2n^2 - n + 3}{n + 1}$. B

Lösung:

$a_1 = \frac{2 \cdot 1^2 - 1 + 3}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$

$a_2 = \frac{2 \cdot 2^2 - 2 + 3}{2 + 1} = \frac{9}{3} = 3$

$a_3 = \frac{2 \cdot 3^2 - 3 + 3}{3 + 1} = \frac{18}{4} = 4{,}5$

- Für die Berechnung des 1. Glieds a_1 wird $n = 1$ gesetzt, für a_2 $n = 2$ usw.

1.4 Gegeben sind die ersten Glieder der Folge $\langle a_n \rangle = \langle 4, 5, 9, 14, 23, 37, ... \rangle$. AC
Gib ein mögliches Bildungsgesetz mithilfe einer Rekursionsformel an.
Beschreibe deine Überlegungen.

Lösung:

$a_3 = 9 = 4 + 5$

$a_4 = 14 = 5 + 9$

$a_5 = 23 = 9 + 14$

$a_6 = 37 = 14 + 23$

$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ mit $a_1 = 4$ und $a_2 = 5$

Ich erkenne, dass das 3. Glied die Summe der beiden ersten Glieder ist. Daher überprüfe ich, ob jedes Glied die Summe der beiden vorhergehenden Glieder ist. Damit erhalte ich das Bildungsgesetz und die Startglieder.

Aufgaben 1.5 – 1.6: Gib jeweils die ersten fünf Glieder der Folge an.

1.5 **a)** $a_{n+1} = 4a_n - 3$ mit $a_1 = 2$ **b)** $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ mit $a_1 = -2$ **c)** $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ mit $a_1 = 10^8$ B

1.6 **a)** $a_n = 3 \cdot 2^n$ **b)** $a_n = (n - 1) \cdot (3 - n)$ **c)** $a_n = 1 - \sin(n \cdot \pi)$ B

1.7 Gib ein mögliches Bildungsgesetz der Folge mithilfe einer Rekursionsformel an. AC
Beschreibe deine Überlegungen.

a) $\langle 2, 7, 12, 17, 22, 27, ... \rangle$
b) $\langle -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, ... \rangle$
c) $\langle 1, 3, 9, 27, 81, 243, ... \rangle$
d) $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ... \rangle$

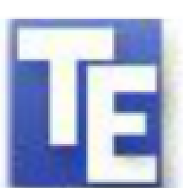
1.8 Gib ein mögliches Bildungsgesetz der Folge mithilfe eines erzeugenden Terms an. AC
Beschreibe deine Überlegungen.

a) $\langle 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... \rangle$
b) $\langle -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ... \rangle$
c) $\langle 1, 10, 100, 1\,000, 10\,000, ... \rangle$
d) $\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ... \rangle$

1.9 Gib die ersten fünf Glieder der Folge an. B

a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 2, a_2 = 1$ **b)** $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_1 = 5, a_2 = 1$

1.10 **1)** Zähle die ersten zehn Glieder der gegebenen Folge auf. B
2) Berechne das gesuchte Folgeglied mithilfe von Technologieeinsatz.



a) $a_{n+1} = 2a_n + 5$ mit $a_{10} = 52$, $a_{40} = ?$
b) $a_{n+1} = (a_n)^3$ mit $a_6 = 10^9$, $a_{50} = ?$

1.11 Die Glieder der **Fibonacci-Folge** werden durch $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ mit $f_1 = 1, f_2 = 1$ gebildet. BC
1) Berechne die ersten zwanzig Glieder der Folge.
2) Welches Glied der Fibonacci-Folge ist erstmals größer als eine Milliarde? Schätze zuerst und beantworte die Frage mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.



3) Die Glieder f_n können durch den erzeugenden Term $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ berechnet werden. Überprüfe dies für f_3 ohne Verwendung eines Taschenrechners.

1.1.2 Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen

AC **1.12** Gegeben sind die Folgen $\langle a_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9 \rangle$ und $\langle b_n \rangle = \langle 1, 2, 4, 8, 16 \rangle$.
1) Beschreibe die unterschiedlichen Rechenvorgänge bei der Bildung der Folgeglieder.
2) Gib für die Folgen jeweils einen erzeugenden Term und eine rekursive Darstellung an.

Zwei spezielle Folgentypen ergeben sich, wenn die Differenz bzw. der Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant ist (vergleiche Band 2, Abschnitt 11). Die angeschriebene endliche Summe der Glieder der Folge heißt endliche Reihe.

	arithmetisch	**geometrisch**
Folge	Die **Differenz** d zwischen zwei Gliedern ist **konstant**. $a_{n+1} = a_n + d$ bzw. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ ZB: $\langle a_n \rangle = \langle 2, 5, 8, 11, 14, \ldots \rangle$, $d = 3$	Der **Quotient** q zwischen zwei Gliedern ist **konstant**. $b_{n+1} = b_n \cdot q$ bzw. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ ZB: $\langle b_n \rangle = \langle 4; 2; 1; 0{,}5; 0{,}25; \ldots \rangle$, $q = 0{,}5$
Summe der Reihe	**Endliche arithmetische Reihe:** $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$	**Endliche geometrische Reihe:** $s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

ABD **1.13** ***1)*** Begründe, ob die gegebene Folge arithmetisch, geometrisch, beides oder keines von beiden ist.
2) Gib einen erzeugenden Term oder eine rekursive Darstellung an und berechne das 10. Folgeglied.

a) $\langle 1, -1, 1, -1, 1, \ldots \rangle$ ***c)*** $\langle 1, -1, -3, -5, -7, \ldots \rangle$ ***e)*** $\langle 2, 2, 2, 2, 2, \ldots \rangle$
b) $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \ldots \rangle$ ***d)*** $\langle \frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \ldots \rangle$ ***f)*** $\langle \frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}, \frac{5}{4}, \ldots \rangle$

D **1.14** Handelt es sich bei der gegebenen Folge um eine arithmetische oder geometrische Folge oder weder noch? Begründe deine Antwort.
1) $a_n = 2 - 3n$ ***2)*** $a_n = n^2 + 3$ ***3)*** $a_n = 2^n + 3$ ***4)*** $a_n = 3 \cdot 2^n$

B **1.15** Von einer arithmetischen Folge kennt man $a_1 = -3$, $a_n = 31$ und $d = 2$. Berechne n und s_{20}.

B **1.16** Von einer geometrischen Folge kennt man $b_3 = 16$ und $b_7 = 81$. Berechne q und s_8.

AB **1.17** Beim Bohren eines Brunnens kann am ersten Tag 15 m tief gebohrt werden. Mit steigender Tiefe wird der Boden härter und es können jeweils nur mehr 90 % der Strecke des Vortags gebohrt werden.
1) Wie viel Meter können am 4. Tag gebohrt werden?
2) Welche Tiefe hat der Brunnen am Ende des 4. Tags?
3) Wann wird eine Tiefe von 100 m erreicht?

AB **1.18** Sebastian trainiert für den Empire-State-Building-Run-Up. Dazu läuft er in einem Wohnhaus drei Stockwerke mit je 17 Stufen hoch, abwärts fährt er mit dem Lift. Am ersten Tag läuft er die drei Stockwerke einmal, am zweiten Tag zweimal, am dritten Tag dreimal usw.
1) Beim Empire-State-Building-Run-Up müssen insgesamt 1 576 Stufen nach oben gelaufen werden. Am wievielten Tag schafft er diese Stufenanzahl erstmals?
2) Wie viel Höhenmeter hat er nach zwei Wochen Training insgesamt zurückgelegt, wenn eine Stufe 18 cm hoch ist?



1.2 Unendliche Folgen – Grenzwert

1.2.1 Monotonie und Schranken



Bisher wurden Bildungsgesetze von Folgen bzw. die Werte einzelner Glieder einer Folge besprochen. Nun wird untersucht, ob alle Glieder einer Folge zwischen bestimmten Werten liegen bzw. ob sich die Glieder bei wachsendem Index n einem festen Wert immer mehr nähern.

1.19 Vergleiche die Folgen $\langle a_n \rangle = \langle 1, 2, 4, 8, 16, ... \rangle$ und $\langle b_n \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ... \rangle$ CD

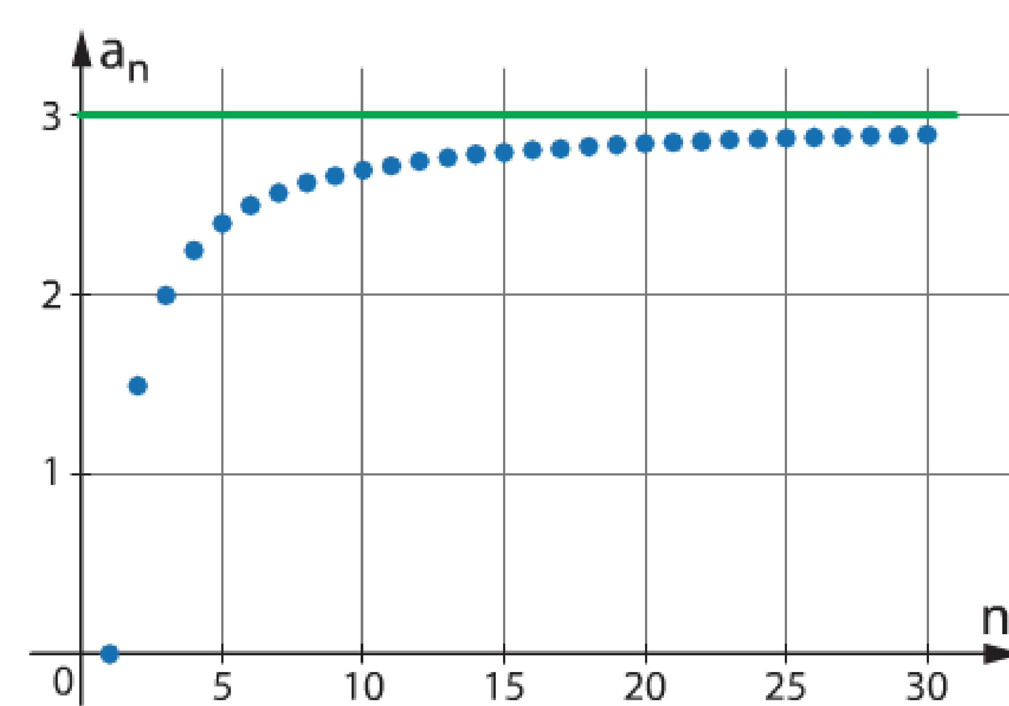
1) Beschreibe, in welchen Eigenschaften sie sich voneinander unterscheiden.
2) Kannst du eine Zahl angeben, die kleiner bzw. eine, die größer ist als jedes Glied der Folge? Begründe deine Antwort.

Sind in einer Folge $\langle a_1, a_2, a_3, ... \rangle$ die Werte der Glieder der Größe nach geordnet, so nennt man diese Eigenschaft **Monotonie** (griechisch: „monotonos" = mit immer gleicher Spannung).
Ist jedes Glied größer als das vorhergehende oder gleich groß, so nennt man diese Folge **monoton steigend** oder **monoton wachsend**. Es gilt: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq ...$
Ist jedes Glied kleiner als das vorhergehende oder gleich groß, so nennt man die Folge **monoton fallend**. Es gilt: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq ...$
Kann man „$\leq$" durch „$<$" ersetzen, ist also jedes Glied einer Folge **echt größer** als sein Vorgänger, so nennt man die Folge **streng monoton steigend** bzw. für „$>$" statt „$\geq$" **streng monoton fallend**.
Ist hingegen keine solche Regelmäßigkeit festzustellen, ist die Folge nicht monoton.

> Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **monoton steigend** (**wachsend**), wenn für alle Glieder gilt: $a_n \leq a_{n+1}$
> Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **monoton fallend**, wenn für alle Glieder gilt: $a_n \geq a_{n+1}$

Bemerkung: Für den Ausdruck „für alle" wird häufig das Symbol „$\forall$" (Allquantor) verwendet.

Gibt es Zahlen, die größer als alle Glieder einer Folge $\langle a_n \rangle$ sind, so sagt man, die Folge ist nach oben beschränkt (siehe Abbildung). Man nennt diese Zahlen **obere Schranken** der Folge. Die kleinste obere Schranke wird **Supremum** (latein: „supremus" = der Oberste) genannt und mit $\sup(a_n)$ bezeichnet.
Analog dazu sind **untere Schranken** jene Zahlen, die kleiner als alle Glieder der Folge sind. Die größte untere Schranke wird **Infimum** (latein: „infimus" = der Unterste) genannt und mit $\inf(a_n)$ bezeichnet.



Folgen, die **nach oben und unten beschränkt** sind, nennt man **beschränkte Folgen**. Jede beschränkte Folge hat **unendlich viele** Schranken. Folgen, die **nicht beschränkt oder einseitig beschränkt** sind, werden als **unbeschränkte Folgen** bezeichnet.

> Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass jedes Glied der Folge kleiner als bzw. gleich groß wie a ist. Sie heißt **nach unten beschränkt**, wenn eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ existiert, sodass jedes Glied der Folge größer als bzw. gleich groß wie b ist. Die kleinste obere Schranke nennt man **Supremum**, die größte untere Schranke **Infimum**.

BD **1.20** Überprüfe, ob die Folge $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ streng monoton steigend ist.

Lösung:

$\frac{n^2}{n+1} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)+1}$

$n^2 \cdot (n+2) < (n+1)^2 \cdot (n+1)$

$0 < n^2 + 3n + 1$ ... wahre Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$

Die Folge ist streng monoton steigend.

- a_n ist streng monoton steigend, wenn gilt: $a_n < a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$
- Ungleichung lösen

BD **1.21** ***1)*** Bestimme das Supremum der Folge $a_n = 0{,}5^n$.
2) Welchen Wert vermutest du für das Infimum? Begründe deine Antwort.

Lösung:

1) $\langle 0{,}5; 0{,}25; 0{,}125; 0{,}0625; ...\rangle$

- Die ersten Glieder werden berechnet.

$0{,}5^n > 0{,}5^{n+1} \quad |: 0{,}5^n$

$1 > 0{,}5$... $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sup(a_n) = 0{,}5$

- Die Folge ist monoton fallend, das erste Glied ist somit das Supremum.

2) Die Folge ist monoton fallend. Die Glieder nehmen immer kleinere Werte an, werden aber nicht negativ. Man kann daher annehmen, dass $\inf(a_n) = 0$ ist.

AD **1.22** Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe deine Antworten.
1) Eine streng monoton steigende Folge hat kein Supremum.
2) Die Folge $\langle(-1)^n\rangle$ ist nicht monoton.
3) Eine arithmetische Folge ist immer monoton.
4) a_1 ist eine untere Schranke der Folge $a_n = a_1 \cdot 2^n$.

BD **1.23** Zeige, dass die Folge streng monoton steigend ist.
a) $a_n = n^2 + 4n - 12$ ***b)*** $a_n = \frac{3n-7}{8+5n}$ ***c)*** $a_n = -\frac{5n}{n^2+1}$

BD **1.24** Zeige, dass die Folge streng monoton fallend ist.
a) $a_n = \frac{1}{n}$ ***b)*** $a_n = \frac{24n-5}{2n^2+1}$ ***c)*** $a_n = \frac{10n-3}{-15n+4}$

BCD **1.25** Berechne einige Glieder der Folge. Welche Art der Monotonie vermutest du? Zeige anschließend die Richtigkeit deiner Vermutung.
a) $a_n = 0{,}6n^3 - 5n^2 + 5n - 12$ ***c)*** $a_n = \sqrt{3n^2 - n - 1}$
b) $a_n = -\frac{n^2-4n}{7n+12}$ ***d)*** $a_n = \left(\frac{9}{3-2n}\right)$

BC **1.26** Gib 3 selbst gewählte Beispiele für obere bzw. untere Schranken der gegebenen Folge an.
a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ***b)*** $a_n = 5 \cdot 0{,}4^n$ ***c)*** $a_n = \frac{-3n+5}{6+6n}$ ***d)*** $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+5}$

BD **1.27** Prüfe, ob a eine obere Schranke und ob b eine untere Schranke der gegebenen Folge ist.
a) $a_n = \sqrt[4]{4n-4}$; $a = 4$; $b = 0$ ***b)*** $a_n = 2{,}9 \cdot 0{,}3^{0{,}66n}$; $a = 1{,}33$; $b = -1{,}31$

BD **1.28** Welchen Wert vermutest du für das Supremum bzw. Infimum der Folge? Begründe deine Antwort.



a) $a_n = \frac{1}{1+2n}$ ***b)*** $a_n = (-1)^n \cdot 0{,}25 \cdot n$ ***c)*** $a_n = \ln(n^2 + 2) - 2 \cdot \ln(n)$ ***d)*** $a_n = e^{n-1}$

1.2.2 Häufungswert und Grenzwert von Folgen

1.29 Führt Folgendes in eurer Klasse durch: Eine Schülerin bzw. ein Schüler nennt eine positive Zahl, die kleiner als 1 ist. Die oder der nächste nennt dann eine Zahl, die größer als die vorher genannte, aber wieder kleiner als 1 ist. ACD

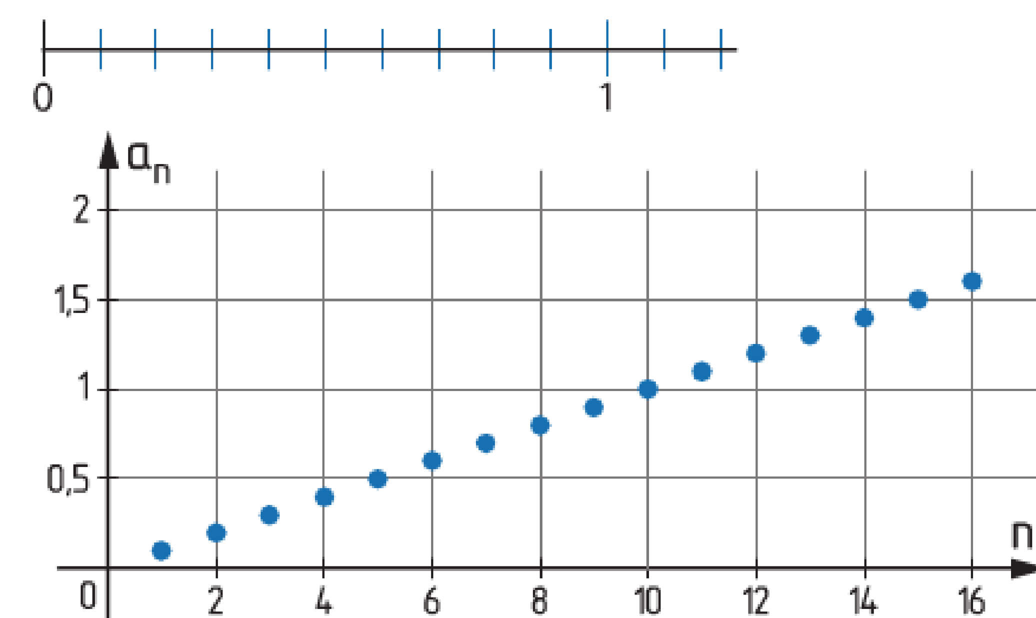
1) Kann man dieses „Spiel" beliebig lange fortsetzen?

2) Beschreibt mit eigenen Worten, wie sich die Differenz zwischen der letztgenannten Zahl und 1 bei wachsender Katalognummer verhält.

Nach dem Monotonieverhalten und den Schranken wird nun das Verhalten von Folgen untersucht, wenn der Index n „gegen Unendlich geht". Anhand von Beispielen werden nun unterschiedliche Fälle erläutert.

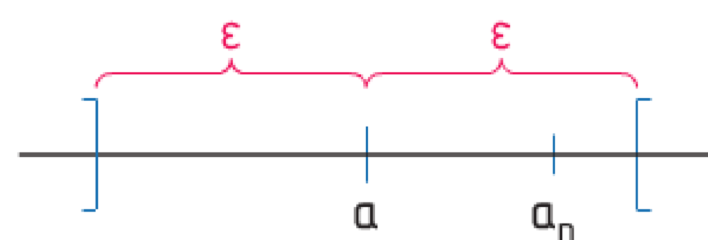
- Beispiel 1: $a_n = \frac{n}{10}$; $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, ... \rangle$

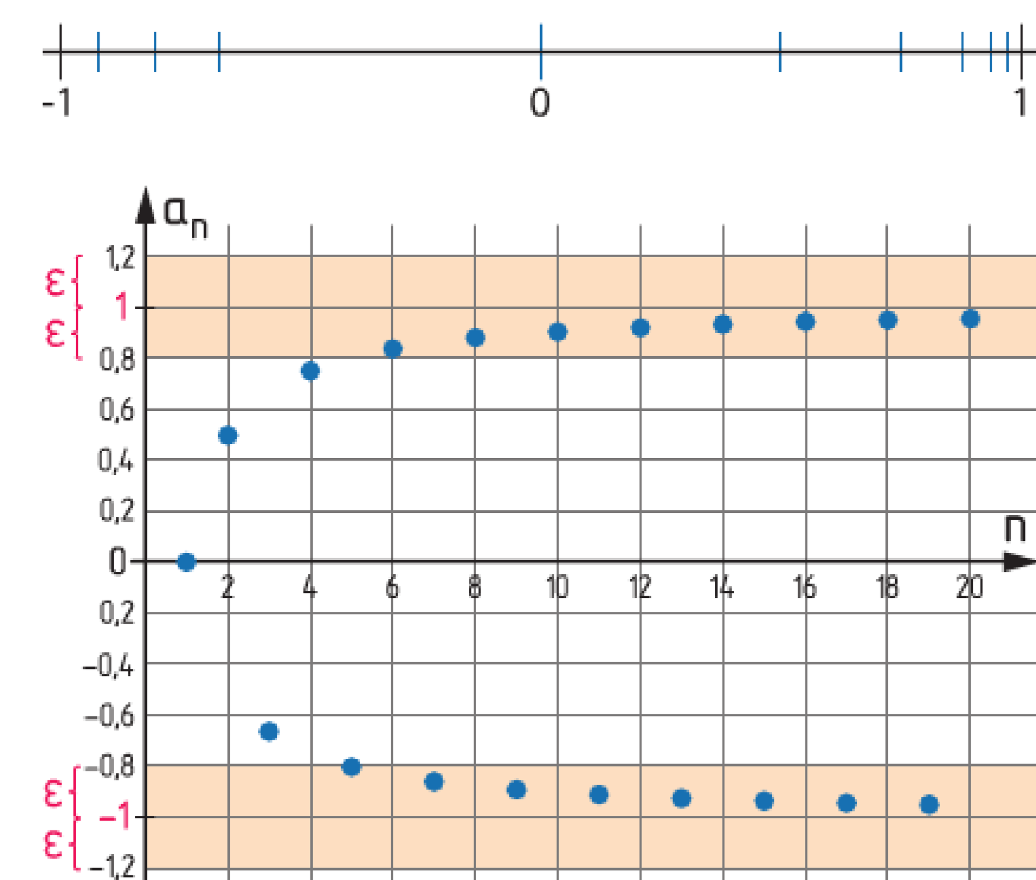
  Die Glieder sind gleichmäßig verteilt und werden immer größer.



- Beispiel 2: $a_n = (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$; $\langle a_n \rangle = \langle 0; 0{,}5; -\frac{2}{3}; 0{,}75; -0{,}8; ... \rangle$

  Die Glieder häufen sich bei den Werten −1 und 1.
  Um auszudrücken, dass Glieder einer Folge in der Nähe einer Zahl a liegen, verwendet man den Begriff der **ε-Umgebung U(a, ε)**. Die ε-Umgebung einer reellen Zahl a ist das um a symmetrische Intervall $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$, wobei ε eine beliebig kleine, positive Zahl ist. Liegt eine Zahl a_n in der ε-Umgebung von a, so gilt $|a_n - a| < \varepsilon$, das heißt, a_n unterscheidet sich von a um weniger als ε.

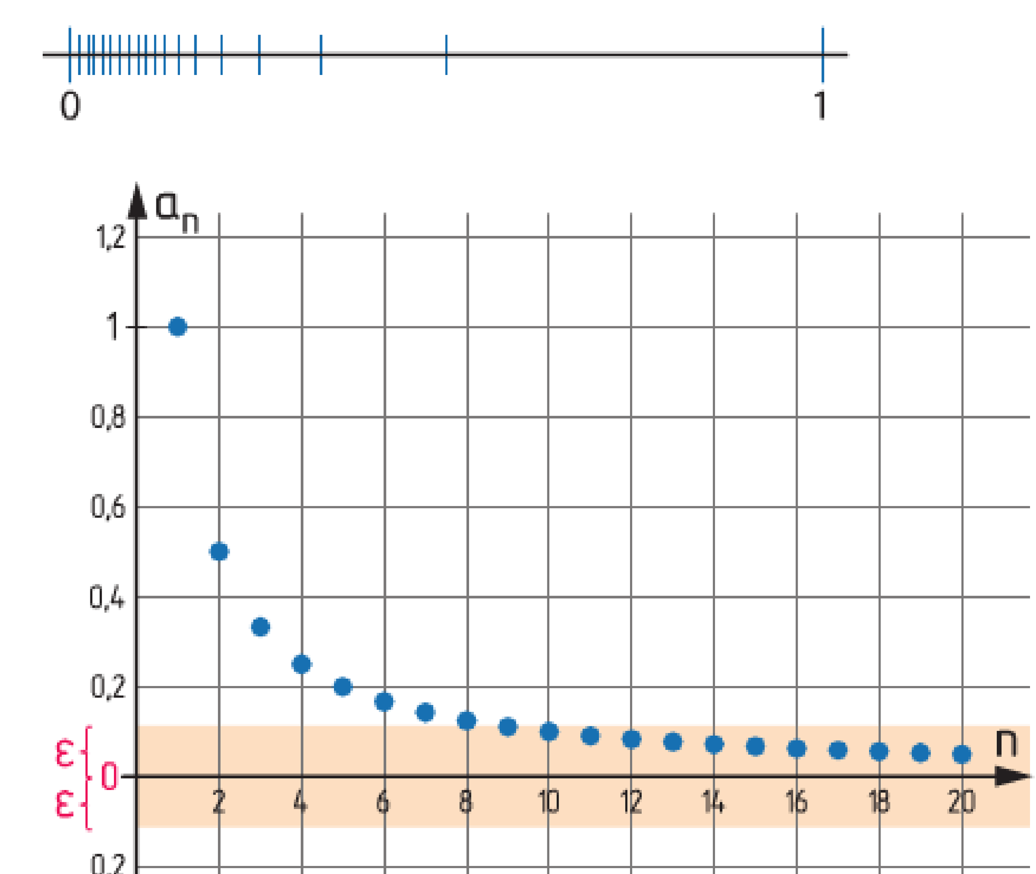




  Eine Zahl h heißt **Häufungswert** einer Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in **jeder ε-Umgebung** von h **unendlich viele** Glieder der Folge liegen. Es gilt $|a_n - h| < \varepsilon$ für unendlich viele Glieder.

- Beispiel 3: $a_n = \frac{1}{n}$; $\langle a_n \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ... \rangle$

  Hier liegen in jedem noch so kleinen Intervall um 0 unendlich viele Glieder der Folge, außerhalb jedoch nur endlich viele. Die mathematische Formulierung für diesen Sachverhalt lautet: „**alle bis auf endlich viele**" oder „**fast alle**".
  Eine Zahl g heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in **jeder ε-Umgebung** von g **fast alle** Glieder der Folge liegen. Es gilt $|a_n - g| < \varepsilon$ für fast alle Glieder der Folge. Man schreibt für diesen Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = g$ [sprich: „Limes von a_n für n gegen unendlich ist g"]. $n \to \infty$ heißt dabei, dass n über jede Grenze hinaus immer größer und größer wird. In diesem Fall nähern sich die Glieder a_n dem Grenzwert g.
  Da unendlich viele Glieder in jeder ε-Umgebung von g liegen, ist jeder Grenzwert auch ein Häufungswert. Umgekehrt ist jedoch nicht jeder Häufungswert ein Grenzwert.



Unendliche Folgen und Reihen

- Eine Zahlenfolge, die einen Grenzwert hat, wird **konvergent** genannt; sie konvergiert gegen den Grenzwert g (latein: „convergere" = sich hinneigen).
  Eine Zahlenfolge, die nicht konvergiert, nennt man **divergent** (latein: „divergere" = auseinander streben).
- Eine Folge, deren Grenzwert g = 0 ist, nennt man **Nullfolge**, zB die Folge in Beispiel 3, Seite 11.
- Eine monotone Folge, die beschränkt ist, hat immer einen Grenzwert.

Eine reelle Zahl g wird **Grenzwert** oder **Limes** einer Folge $\langle a_n \rangle$ genannt, wenn in jeder ε-Umgebung von g fast alle Glieder der Folge liegen. Man schreibt: $\lim_{n \to \infty} (a_n) = g$
Eine Folge, die einen Grenzwert hat, wird **konvergent** genannt, alle anderen Folgen heißen **divergent**.
Eine Folge wird **bestimmt divergent** genannt, wenn $\lim_{n \to \infty} (a_n) = \pm\infty$ gilt. Man spricht in diesem Fall von einem **uneigentlichen Grenzwert**.

Bemerkungen:

- Der Limes (latein: „limes" = Grenze) ist ein römischer Grenzwall, der in den ersten fünf Jahrhunderten in Europa errichtet wurde. Im heutigen Österreich lässt sich sein Verlauf von St. Marienkirchen (OÖ) bis nach Carnuntum (NÖ) verfolgen.
- Das Symbol „∞" wurde von John Wallis (englischer Mathematiker, 1616 – 1703) eingeführt. Es gibt verschiedene Vermutungen, wieso er dieses Symbol wählte. Eine besagt, es sei eine ursprünglich etruskische Schreibweise für die Zahl 1 000. Eine andere lautet, dass es sich dabei um eine Abwandlung des letzten Buchstaben des griechischen Alphabets, Omega ω, handelt.

BD **1.30** Gib an, ob die Folge konvergent oder divergent ist bzw. ob sie Häufungswerte hat. Begründe deine Antwort.

1) $a_n = \frac{1}{n^2}$ ***2)*** $b_n = \cos(n \cdot \pi)$ ***3)*** $c_n = n^2$

Lösung:

1) $\langle a_n \rangle = \langle 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, ..., \frac{1}{10\,000}, ... \rangle$
Da der Nenner immer größer wird, werden die Folgeglieder immer kleiner. Sie werden aber nie negativ. Daher konvergiert die Folge gegen 0, sie ist also eine Nullfolge.
0 ist auch ein Häufungswert.

2) $\langle b_n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, -1, 1, ... \rangle$
Die Glieder nehmen nur die Werte –1 und 1 an, diese sind daher Häufungswerte.
Die Folge ist divergent, weil zwei Häufungswerte existieren.

3) $\langle c_n \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, ..., 10\,000, ... \rangle$
Die Glieder der Folge werden immer größer, je größer n wird. Die Folge ist daher divergent und hat auch keinen Häufungswert.

D **1.31** Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründe deine Antworten.
1) Jeder Häufungswert ist ein Grenzwert.
2) Jeder Grenzwert ist ein Häufungswert.
3) Eine Nullfolge hat nur positive Werte.
4) Die Folge $\langle (-1)^n \rangle$ hat zwei Häufungswerte.

1.32 Gib jeweils eine Folge mit folgender Eigenschaft an. AB
1) Der Grenzwert ist 4.
2) Die Häufungswerte sind −3 und 3.
3) Die Folge ist eine alternierende Nullfolge.
4) Die Folge hat den Häufungswert 7 und ist divergent.

1.33 Ist die Folge $\langle a_n \rangle$ konvergent oder divergent? Begründe deine Antwort. BD
a) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ **b)** $a_n = n^2 - 4n$ **c)** $a_n = \sqrt{n}$

1.34 Hat die Folge $\langle a_n \rangle$ einen Grenzwert, Häufungswerte oder keines von beiden? C
a) $\langle a_n \rangle = \langle 1, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, \ldots \rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \langle 1; -1; 0{,}5; -0{,}5; 0{,}25; -0{,}25; \ldots \rangle$
b) $\langle a_n \rangle = \langle 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \ldots \rangle$ **d)** $\langle a_n \rangle = \langle 4, 3, 4, 5, 4, 7, 4, 9, 4, 11, 4, 13, \ldots \rangle$

1.35 Ermittle mit einem Tabellenkalkulationsprogramm die ersten 50 Glieder der Folge. Welchen Grenzwert vermutest du? BC

a) $a_n = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n}{n^2}$ **b)** $a_n = \frac{1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2}{n^3}$

1.2.3 Grenzwertsätze und Grenzwertberechnungen

1.36 Jemand behauptet, dass die drei Folgen $a_n = \frac{2n}{n+1}$, $b_n = \frac{n+1}{2n}$ und $c_n = \frac{n+1}{n^2}$ auf den unbestimmten Ausdruck „$\frac{\infty}{\infty}$" führen und daher denselben Grenzwert haben müssen. Setze für n große Werte ein und argumentiere anschließend, warum diese Behauptung nicht stimmen kann. BD

Die folgenden Rechenregeln, die für das Arbeiten mit Grenzwerten gelten, nennt man **Grenzwertsätze**, wobei $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergente Folgen sind und $k \in \mathbb{R}$ ist.

- $\lim\limits_{n \to \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim\limits_{n \to \infty} (a_n)$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (a_n) \pm \lim\limits_{n \to \infty} (b_n)$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n \to \infty} (b_n)$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} (a_n)}{\lim\limits_{n \to \infty} (b_n)}$ mit $b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n) \neq 0$

Mithilfe der Grenzwertsätze können die Grenzwerte vieler Folgen ermittelt werden.

- Beispiel 1: $a_n = \frac{n^2}{n^3 + 3}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2}{n^3 + 3}\right) = „\frac{\infty}{\infty}“$$

- Da in der gegebenen Form für $n \to \infty$ sowohl Zähler als auch Nenner ∞ werden, erhält man „$\frac{\infty}{\infty}$", also einen unbestimmten Ausdruck.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2}{n^3 + 3}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{3}{n^3}}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n^3}}\right) =$$

- Zähler und Nenner werden durch die höchste Potenz von n, hier n^3, dividiert. Durch Kürzen erhält man Terme, die entweder Nullfolgen oder Konstanten sind.

$$= \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n \to \infty} (1) + \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{n^3}\right)} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

- Grenzwertsätze anwenden: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{n^3}\right) = 3 \cdot \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^3}\right) = 3 \cdot 0 = 0$

Mit dieser Methode kann der Grenzwert jeder Folge ermittelt werden, die durch einen rationalen Term (Bruchterm mit je einem Polynom in Zähler und Nenner) dargestellt ist.

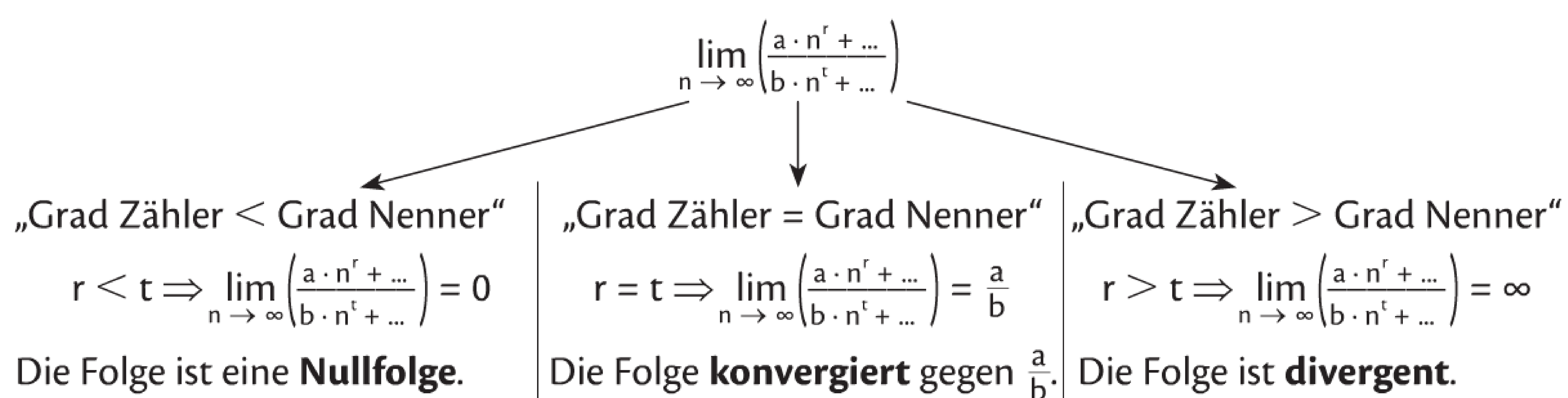
- Beispiel 2: $a_n = \frac{n^5 - n^2 - 7}{8n^5 + 10}$

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{n^5 - n^2 - 7}{8n^5 + 10}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1 - \frac{1}{n^3} - \frac{7}{n^5}}{8 + \frac{10}{n^5}}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n^3} - \frac{7}{n^5}\right)}{\lim\limits_{n \to \infty}\left(8 + \frac{10}{n^5}\right)} = \frac{1 - 0 - 0}{8 + 0} = \frac{1}{8}$$

- Beispiel 3: $a_n = \frac{n^4 + 2n - 1}{n^3 + 3n^2}$

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{n^4 + 2n - 1}{n^3 + 3n^2}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1 + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)} = „\frac{1}{0}“ = \infty$$

Anhand der drei Beispiele kann man erkennen, dass der Grenzwert von der höchsten Potenz des Zähler- und des Nennerpolynoms abhängt. Allgemein kann man angeben:



BD **1.37** Argumentiere, warum $g = \frac{4}{3}$ der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{8n + 2}{6n - 3}$ ist. Ermittle anschließend, ab welchem Index n die Glieder der Folge in der ε-Umgebung mit $\varepsilon = 0{,}01$ liegen.

Lösung:

Da der Grad von Zähler und Nenner gleich ist, konvergiert die Folge gegen $g = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

$\left|\frac{8n + 2}{6n - 3} - \frac{4}{3}\right| < 0{,}01$ — ● $|a_n - g| < \varepsilon$

$\left|\frac{8n + 2 - 4 \cdot (2n - 1)}{3 \cdot (2n - 1)}\right| = \left|\frac{2}{2n - 1}\right| = \frac{2}{2n - 1} < 0{,}01$ — ● $2n - 1 > 0$, die Betragstriche können daher weggelassen werden.

$2 < 0{,}02n - 0{,}01 \Rightarrow 100{,}5 < n$

Ab dem 101. Glied liegen alle Glieder in der angegebenen ε-Umgebung.

BC **1.38** Gib den Grenzwert g für $n \to \infty$ zuerst ohne zu rechnen an. Überprüfe deine Vermutung anschließend mithilfe der Grenzwertsätze.

a) $a_n = \frac{n + 4}{n^2 - 8}$ **b)** $a_n = \frac{8n^6 + 12}{n^6 + 3n - 5}$ **c)** $a_n = \frac{7n^6 + n^2 - 13}{n^5 - n - 2}$ **d)** $a_n = \frac{3 + 7n}{4n^4 - 11}$

BC **1.39** Bestimme den Grenzwert. Wie viele Glieder liegen außerhalb der ε-Umgebung?

a) $a_n = \frac{4n^2}{4n^2 + 3}$; $\varepsilon = \frac{1}{145}$ **b)** $a_n = 4 - \frac{6 - n^3}{2n^3 + 8}$; $\varepsilon = 10^{-3}$ **c)** $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{7n^2 + 3}$; $\varepsilon = 0{,}025$

A **1.40** **1)** Gib eine monoton steigende Folge mit dem Grenzwert 5 an.
2) Gib eine Folge mit dem Grenzwert $\frac{2}{3}$ an.

ABC **1.41** Die Population von Mäusen auf einem Dachboden lässt sich annähernd durch die Folge $a_n = 200 - 70 \cdot 0{,}8^n$ (a_n … Anzahl der Mäuse, n … Zeit nach Beginn der Beobachtung in Wochen) beschreiben.

1) Gib an, wie viele Mäuse zu Beginn auf dem Dachboden leben bzw. wie viele nach sehr langer Zeit theoretisch auf dem Dachboden leben würden.

2) Welcher Zahlenwert im angegebenen Term ändert sich, wenn sich nur der Anfangsbestand ändert, welcher, wenn sich nur der Endbestand ändert?

1.3 Endliche Reihen



Bildet man aus den Gliedern einer endlichen arithmetischen bzw. geometrischen Folge eine Summe, so spricht man von einer arithmetischen bzw. geometrischen Reihe. Ebenso können Summen beliebiger endlicher Folgen gebildet werden.

1.42 Schreibe die Folge der geraden Zahlen an. Berechne die Summe der ersten 10 Folgeglieder. Erkläre, wieso das Ergebnis auch mit der Formel $s_n = n \cdot (n + 1)$ berechnet werden kann. **ABD**

Werden endlich viele Glieder einer Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_n \rangle$ als Summe angeschrieben, so erhält man eine **endlichen Reihe** s_n:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Meist wird eine Reihe mithilfe des Summenzeichens Σ angeschrieben: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Beginnt eine Reihe mit a_0, so gilt: $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Das Ergebnis der Addition nennt man **Summe der endlichen Reihe** und man schreibt in der Praxis dafür ebenfalls s_n. Oft kann man eine Formel zur Berechnung der Summe angeben.
ZB: Es soll die endliche Reihe der Quadratzahlen bis n = 4 angegeben und deren Summe berechnet werden.

$$s_4 = \sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Diese Summe kann auch mithilfe der Formel $s_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ berechnet werden (Beweis siehe Aufgabe 1.54).

$$s_4 = \frac{4 \cdot (4+1) \cdot (2 \cdot 4 + 1)}{6} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 30$$

Unter einer **endlichen Reihe** versteht man die angeschriebene, aber nicht ausgerechnete Summe der Glieder einer endlichen Folge. Addiert man die Glieder einer endlichen Reihe bis zum Glied a_n, erhält man die **Summe s_n der endlichen Reihe**.

1.43 ***1)*** Schreibe die Reihe ohne Verwendung des Summenzeichens an. **BC**
2) Berechne die Summe s_5.

a) $\sum_{n=0}^{5} n^2$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \cdot 2^k$

Lösung:

a) 1) $\sum_{n=0}^{5} n^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25$

2) $s_5 = 55$

b) 1) $\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \cdot 2^k = (-1)^1 \cdot 2^1 + (-1)^2 \cdot 2^2 + (-1)^3 \cdot 2^3 + (-1)^4 \cdot 2^4 + (-1)^5 \cdot 2^5 =$
$= -2 + 4 - 8 + 16 - 32$

2) $s_5 = -22$

A **1.44** Schreibe die Reihe mithilfe des Summenzeichens an.

a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7$ **b)** $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$

Lösung:

a) $a_1 = 1$

$a_2 = -2 = (-1)^1 \cdot 2$

$a_3 = \ \ 3 = (-1)^2 \cdot 3$

$a_4 = -4 = (-1)^3 \cdot 4$

...

$a_n = (-1)^{n-1} \cdot n$

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = \sum_{n=1}^{7} (-1)^{n-1} \cdot n$

b) $a_1 = \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$

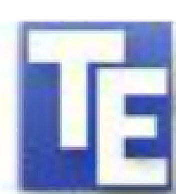
$a_2 = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$a_3 = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$a_4 = \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

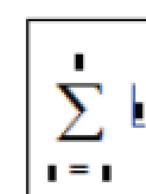
$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Bemerkung: In beiden Fällen aus Aufgabe 1.44 kann die Reihe auf verschiedene Arten angeschrieben werden, zB: $\sum_{n=1}^{7} (-1)^{n-1} \cdot n = \sum_{n=0}^{6} (-1)^n \cdot (n+1)$

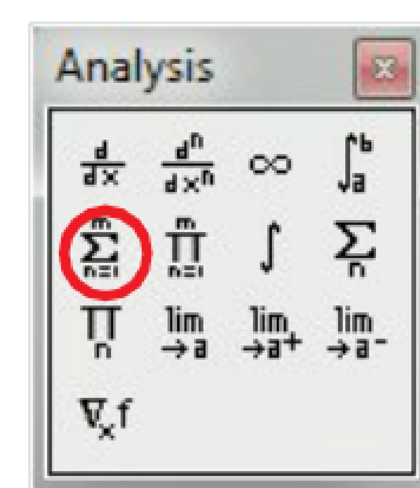


Technologieeinsatz: Endliche Reihe
Mathcad

TI-Nspire, GeoGebra: www.hpt.at

In der Symbolleiste **Analysis**  befinden sich die Symbole für die Summation. Es erscheint eine Vorlage, in der die Platzhalter ausgefüllt werden.

ZB: $\sum_{k=1}^{5} \left[(-1)^k \cdot 2^k\right] = -22$

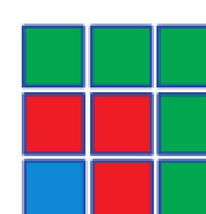


Beweis durch vollständige Induktion

Für viele endliche Reihen gibt es Summenformeln, deren Richtigkeit mithilfe der **vollständigen Induktion** (latein: „inducere“ = hinaufführen) gezeigt werden kann.

ZB: Schon die alten Griechen kannten die Formel für die Summe der ungeraden Zahlen:

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$


Grafische Darstellung der Formel

- 1. Schritt – **Induktionsanfang**: $n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$
  Man zeigt die Gültigkeit einer Aussage für den ersten möglichen Wert von n.
- 2. Schritt – **Induktionsannahme**: $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
  Man setzt voraus, dass die **Formel für n gilt** (Induktionsannahme, Induktionsvoraussetzung).
- 3. Schritt – **Induktionsbehauptung**: $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2 \cdot (n + 1) - 1) = (n + 1)^2$
  Man schreibt die Formel für die nächstgrößere Zahl, also (n + 1), an.
- 4. Schritt – **Induktionsschluss**:
  Man zeigt nun, dass die Formel unter der Voraussetzung, dass sie für n gilt (Induktionsannahme), dann auch für (n + 1) gilt.

  $\underbrace{1 + 3 + \ldots + (2n - 1)} + (2 \cdot (n + 1) - 1) =$

  $= n^2 + (2 \cdot (n + 1) - 1) =$

  $= n^2 + 2n + 2 - 1 =$

  $= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ ■

Bemerkung: Das Ende eines Beweises wird in der Literatur durch verschiedene Symbole wie zum Beispiel einem Kästchen  oder Abkürzungen wie „q. e. d.“ = „quod erat demonstrandum“, in der deutschen Übersetzung „w. z. z. w.“ = „was zu zeigen war“, gekennzeichnet.

1.45 Schreibe die Reihe ohne Verwendung des Summenzeichens an. AB

a) $\sum_{n=1}^{5}(n^2 + 5n - 4)$ **b)** $\sum_{n=2}^{8}\sqrt[n]{n^2}$ **c)** $\sum_{n=5}^{12}\frac{n^3 - 1}{2n + 1}$ **d)** $\sum_{n=1}^{7}(1\,000 \cdot 0{,}5^n)$

1.46 Schreibe die Reihe mithilfe des Summenzeichens an. A

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$

b) $7 + 14 + 21 + 28 + 35$

c) $1 + 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000$

d) $-3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3$

1.47 **1)** Schreibe die Reihe ohne Verwendung des Summenzeichens an. AB

2) Berechne die Summe s_5.

a) $\sum_{i=1}^{5}(-1)^i \cdot 2^i$ **b)** $\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ **c)** $\sum_{n=0}^{5}(-1)^n \cdot (2n + 1)$

1.48 Welche Ausdrücke geben dieselbe Reihe an? Begründe deine Antwort. CD

a) A) $\sum_{i=1}^{7}(-1)^i$ **B)** $\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}$ **C)** $\sum_{i=0}^{6}(-1)^{i+1}$ **D)** $\sum_{n=1}^{7}\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

b) A) $\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{2n+1}$ **B)** $\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{2n-1}$ **C)** $\sum_{n=2}^{9}\frac{1}{2n-1}$ **D)** $\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{2n+1}$

1.49 Schreibe die Reihe der geraden Quadratzahlen mithilfe des Summenzeichens an und berechne die Summe s_4. AB

Aufgaben 1.50 – 1.52: Zeige die Gültigkeit der Aussagen mithilfe vollständiger Induktion.

1.50 Für die Glieder der Fibonacci-Folge $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ mit $f_1 = f_2 = 1$ gilt: BD

a) $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$ **b)** $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$

1.51 **a)** $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$ BD

b) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n \cdot (n + 1)$

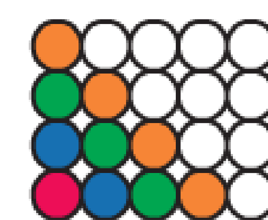
c) $m + (m + 1) + \ldots + (n - 1) + n = \frac{(m + n) \cdot (n - m + 1)}{2}$ mit $m < n$

d) $a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + n) = \frac{(n + 1) \cdot (2a + n)}{2}$

1.52 **a)** $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n \cdot (2n - 1) \cdot (2n + 1)}{3}$ BD

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2}{4} = \left(\frac{n \cdot (n + 1)}{2}\right)^2$

1.53 Die Summen der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ werden auch Dreieckszahlen genannt. Erkläre anhand der Zeichnung, warum dieser Name verwendet wird und wie man so die Summenformel aus **1.51 a)** herleiten kann. AD



1.54 Für die Summe endlich vieler Quadratzahlen gilt: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$ ABD

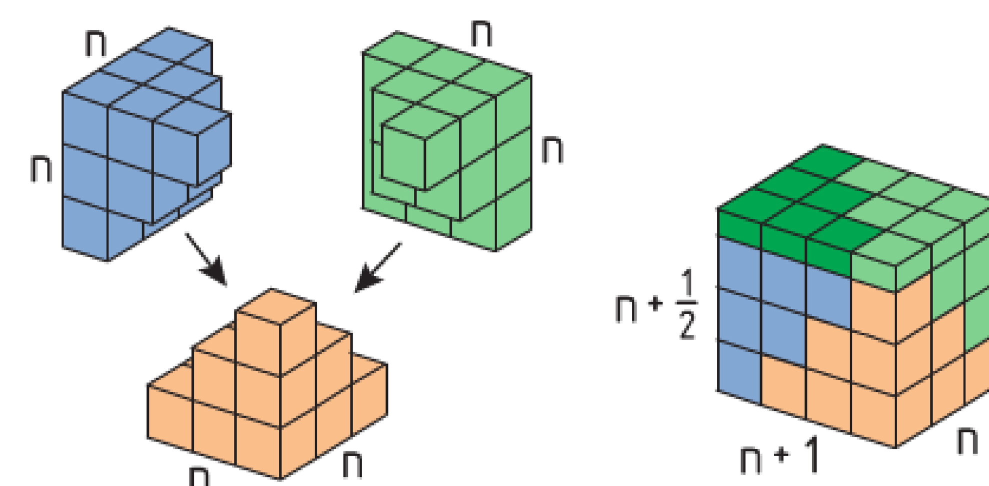


1) Berechne die Summe für n = 50 mithilfe von Technologieeinsatz.

2) Berechne die Summe mithilfe der Formel.

3) Zeige die Gültigkeit der Formel mithilfe der vollständigen Induktion.

4) Erkläre die Formel anhand der Zeichnung.



1.4 Unendliche Reihen

ABD **1.55** Das Teilungsparadoxon von Zenon von Elea lautet in einer überlieferten Form:



„Achilles, der nahezu unverwundbare Held der griechischen Mythologie, verfolgt eine Schildkröte, die ein Stadion (ca. 185 m) Vorsprung hat, mit zwölfmal größerer Geschwindigkeit. Kommt er zu der Stelle, an der sich das Tier zu Anfang befand, so ist es ihm bereits um $\frac{1}{12}$ Stadion voraus. Durchläuft Achilles nun diese kleine Strecke von $\frac{1}{12}$ Stadion, so wird die Schildkröte um $\frac{1}{144}$ Stadion voraus sein usw. Folglich wird Achilles die Schildkröte nie erreichen, da sie ihm immer um ein Stück voraus ist."
Begründe, warum diese Schlussfolgerung nicht richtig ist. Überlege, wie man die Strecke, die Achilles tatsächlich laufen müsste, um die Schildkröte einzuholen, berechnen könnte. Führe die Berechnung durch.

Bisher haben wir uns mit endlichen Reihen $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ beschäftigt. Soll nun die Summe aller Glieder einer unendlichen Folge angegeben werden, also $s_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, so erhält man in diesem Fall einen Ausdruck, der nicht durch Addieren aller Summanden berechnet werden kann. Daher betrachtet man die Folge der Zwischenergebnisse, die bei Addition des jeweils nächsten Summanden entstehen. Mithilfe dieser Teilsummen kann dann eine Aussage über das „Ergebnis" der unendlichen Summe getroffen werden.

ZB: Es soll $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ berechnet werden.
Man berechnet die erste Zwischensumme $s_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$
Als zweite Summe erhält man: $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$
Die dritte Summe s_3 lautet: $s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$
Die vierte Summe lautet: $s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$

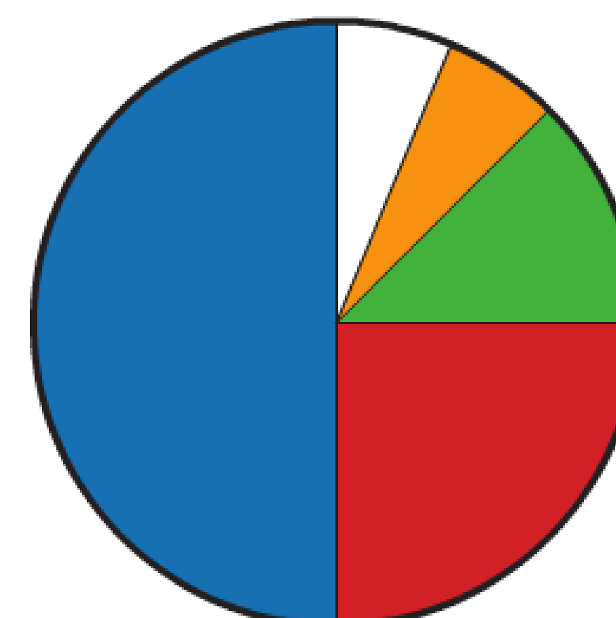


Abb. 1.1

Diese Addition kann einfach grafisch veranschaulicht werden (Abb. 1.1). Zwar wachsen die Zwischensummen, jedoch überschreiten diese Summen niemals den Wert 1. Auch nach sehr vielen Schritten bleibt immer eine kleine weiße Fläche frei. Führt man diesen Vorgang „unendlich oft" durch, wird auch die verbleibende weiße Fläche „unendlich klein" und der Kreis ist praktisch zur Gänze bedeckt. Man erhält die unendliche Folge $\langle 0{,}5; 0{,}75; 0{,}875; \dots \rangle$. Deren Grenzwert ist 1 und somit die Summe der Reihe.

Man schreibt: Die Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$.

Um die Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zu ermitteln, wird aus der unendlichen Folge $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ eine neue Folge $\langle s_n \rangle$, die Folge der Zwischensummen, gebildet.

$\langle s_n \rangle = \langle s_1, s_2, s_3, \dots \rangle = \langle a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots \rangle$

$\langle a_n \rangle$	$\langle s_n \rangle$
a_1	$s_1 = a_1$
a_2	$s_2 = a_1 + a_2$
a_3	$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
a_4	$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

Man nennt die Summen s_1, s_2 usw. **Partialsummen** (**Teilsummen**) der Folge $\langle a_n \rangle$. Der Grenzwert dieser Partialsummenfolge ist die Summe der unendlichen Reihe.

Um die Summe einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zu berechnen, benötigt man die Folge der Partialsummen. Falls deren **Grenzwert** existiert, nennt man ihn die **Summe der unendlichen Reihe**, die unendliche Reihe wird **konvergent** genannt.

Man schreibt: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Die Reihe heißt **divergent**, wenn die Folge der Partialsummen divergent ist. In diesem Fall existiert die Summe nicht.

Der Grenzwert einer unendlichen Reihe lässt sich oft nur schwer oder gar nicht bestimmen. Oft genügt es jedoch zu ermitteln, ob eine Reihe konvergent oder divergent ist. Zum Beispiel ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, die so genannte **harmonische Reihe**, divergent, wie sich durch geschicktes Klammernsetzen zeigen lässt:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \ldots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{56}\right) + \ldots \text{ und damit: } S = S + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \ldots$$

Ob eine unendliche Reihe konvergiert oder divergiert, lässt sich häufig mithilfe von Kriterien entscheiden, die in Band 4 gezeigt werden. Wir wollen nun das Konvergenzverhalten von arithmetischen und geometrischen Reihen untersuchen.

Unendliche arithmetische Reihen

Eine arithmetische Folge mit $d = 0$ ist eine konstante Folge $\langle a_1, a_1, a_1, \ldots \rangle$. Die Summe der zugehörigen Reihe ist daher unendlich, wenn $a_1 \neq 0$ ist bzw. 0, wenn $a_1 = 0$ ist.

In allen anderen Fällen gilt: Die Glieder einer arithmetischen Folge werden immer größer ($d > 0$) oder immer kleiner ($d < 0$). Die Folge und somit auch die zugehörige Reihe sind divergent.

Unendliche geometrische Reihen

Geht man von der geometrischen Folge $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ aus, so lässt sich die unendliche Reihe wie folgt anschreiben: $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots$ mit $b_1 \neq 0$

Die Partialsummen lassen sich mithilfe der Summenformel berechnen: $s_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Damit ergibt sich für den Grenzwert S der Partialsummenfolge: $S = \lim_{n \to \infty} (s_n) = \lim_{n \to \infty} \left(b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\right)$

Die Konvergenz hängt vom Faktor q ab. Man unterscheidet drei Fälle:

- $q = 1 \Rightarrow$ Die Folge ist konstant, daher ist die Reihe divergent.
- $|q| > 1 \Rightarrow$ Die Folge $\langle q^n \rangle$ divergiert, somit ist die Reihe divergent.
- $|q| < 1 \Rightarrow$ Die Folge $\langle q^n \rangle$ ist eine Nullfolge, dh. $S = b_1 \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = b_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}$

Die unendliche geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 \cdot q^{n-1}$ ist konvergent, wenn $|q| < 1$ ist.

$S = \frac{b_1}{1-q}$ mit $|q| < 1$ ... Summe der Reihe

Die Reihe ist divergent für alle anderen Werte von q (mit $b_1 \neq 0$).

Mithilfe dieser Formel kann zum Beispiel die Summe der unendlichen geometrischen Reihe von Seite 18 berechnet werden: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

$b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, da $q < 1$ ist, existiert der Grenzwert $\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$



Mathcad, GeoGebra: www.hpt.at

Technologieeinsatz: Unendliche Reihen
TI-Nspire



Das Summenzeichen kann aus den **mathematischen Vorlagen** gewählt werden. Danach werden die Platzhalter ausgefüllt. Das Zeichen ∞ befindet sich zum Beispiel in der Pi-Symbolpalette.

B **1.56** Von einer geometrischen Folge kennt man die ersten Glieder $\langle b_n \rangle = \langle -2; 1; -0{,}5; \ldots \rangle$
Berechne die Summe der Reihe.

Lösung:

$\langle b_n \rangle = \langle -2; 1; -0{,}5; \ldots \rangle \Rightarrow b_1 = -2$ und $q = -0{,}5 \Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-2}{1-(-0{,}5)} = -\frac{4}{3}$

ABCD **1.57** ***1)*** Eine einfache Regel zur Umrechnung einer periodischen Zahl in eine Bruchzahl lautet: Die Periode steht im Zähler des Bruchs. Die Anzahl der Neuner im Nenner entspricht der Anzahl der Ziffern der Periode.
ZB: $0,\overline{123} = \frac{123}{999}$
Zeige die Richtigkeit der Regel, indem du die gegebene Zahl als unendliche geometrische Reihe darstellst und die Summe berechnest.

2) Stelle $0{,}7\overline{23}$ als Bruch dar. Gib für die Bruchdarstellung einer gemischt periodischen Zahl eine ähnliche Rechenregel wie in ***1)*** an.

Lösung:

1) $0{,}123\,123\,123\ldots = \frac{123}{10^3} + \frac{123}{10^6} + \frac{123}{10^9} + \frac{123}{10^{12}} + \ldots$

$\Rightarrow b_1 = \frac{123}{10^3}$ und $q = \frac{1}{10^3}$

$\Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{123}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{123}{1\,000 - 1} = \frac{123}{999}$

- Der Exponent n der Zehnerpotenz von q entspricht der n-ten Stelle nach dem Komma. Von dieser Zehnerpotenz wird 1 subtrahiert und man erhält daher im Nenner eine Zahl mit n Neunern.

2) $0{,}7\overline{23} = \frac{7}{10} + \frac{23}{10^3} + \frac{23}{10^5} + \frac{23}{10^7} + \ldots$

$\Rightarrow b_1 = \frac{23}{10^3}$ und $q = \frac{1}{10^2} \Rightarrow S = \frac{\frac{23}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{23}{10 \cdot (100 - 1)} = \frac{23}{990}$

$0{,}7\overline{23} = \frac{7}{10} + \frac{23}{990} = \frac{99 \cdot 7 + 23}{990} = \frac{716}{990} = \frac{723 - 7}{990}$

Die Anzahl der Neuner im Nenner entspricht der Anzahl der Ziffern der Periode. Danach folgen Nullen, wobei die Anzahl der Nullen der Anzahl der Ziffern vor der Periode entspricht. Im Zähler steht die Differenz der Zahl nach dem Komma und der Zahl vor der Periode.

1.58 Einem Quadrat mit der Seitenlänge a = 10 cm wird ein Quadrat so eingeschrieben, dass die Eckpunkte in den Mittelpunkten der Seiten des äußeren Quadrats liegen. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt. ABC

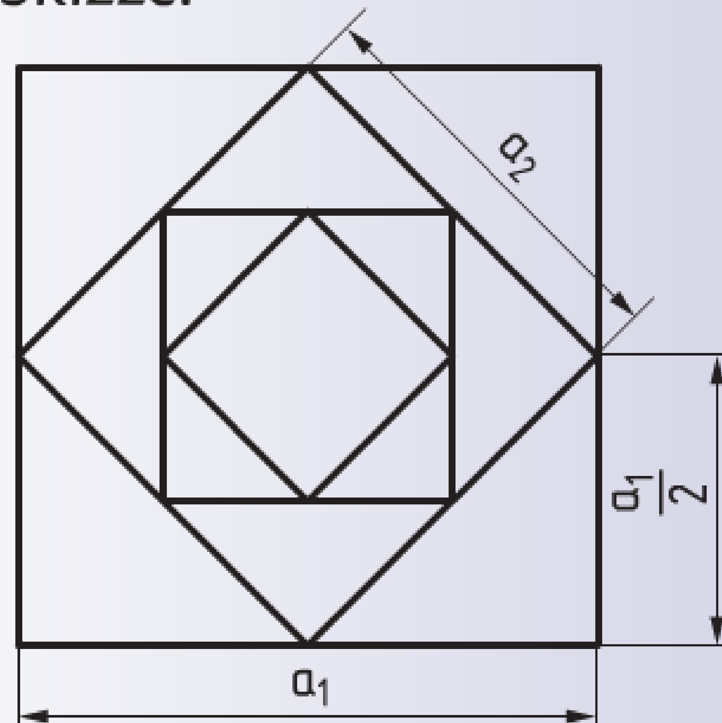
1) Fertige eine Skizze an und gib einen Zusammenhang zwischen den Seitenlängen an.

2) Berechne die Summe der Umfänge der ersten vier Quadrate und die Summe der Umfänge aller Quadrate.

3) Berechne die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate. Welchen Zusammenhang mit der Berechnung der Summe der Umfänge kannst du erkennen?

Lösung:

1) Skizze:



Die Seite des eingeschriebenen Quadrats ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks die Länge der Katheten beträgt $\frac{a_1}{2}$. Damit kann a_2 mithilfe von $a_1 = a$ ausgedrückt werden.

$a_2 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a_1^{\,2}}{4}} = a_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Der Quotient $q_a = \frac{a_2}{a_1}$ gibt das Verhältnis der jeweiligen Seitenlängen an.

$q_a = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $u_1 = 4 \cdot a_1$

$u_2 = 4 \cdot a_2 = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_1 = 2a_1 \cdot \sqrt{2}$

$q_u = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$u_1 = 40$ cm

$u_4 = 40\text{ cm} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 102{,}426\ldots\text{ cm}$

- Die Umfänge bilden eine geometrische Folge mit demselben Quotienten wie die der Seitenlängen.
- $s_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Die Summe der ersten vier Umfänge beträgt rund 102,4 cm.

$u = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{40\text{ cm}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 136{,}568\ldots\text{ cm}$

- $S = \frac{b_1}{1 - q}$

Die Summe aller Umfänge beträgt rund 136,6 cm.

3) $A_1 = a_1^{\,2} = 100\text{ cm}^2$

$A_2 = a_2^{\,2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_1\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot a_1^{\,2} \Rightarrow q_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2}$

$A = \frac{A_1}{1 - q_A} = \frac{100\text{ cm}}{1 - 0{,}5} = 200\text{ cm}^2.$

- $b_1 = A_1$

Ändern sich die Längen um den Faktor q, so ändern sich die Flächen um den Faktor q^2.

$q_A = (q_a)^2$

Die Summe aller Flächeninhalte ist 200 cm².

1.59 Argumentiere für jede der angegebenen Folgen, ob die Summe der zugehörigen unendlichen Reihe konvergiert oder divergiert. AD

1) $\langle 5, 5, 5, 5, \ldots\rangle$ ***3)*** $\left\langle \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, \ldots\right\rangle$ ***5)*** $\langle 2; 3; 4{,}5; 6{,}75; \ldots\rangle$

2) $\langle 3; 1{,}5; 0{,}75; 0{,}375; \ldots\rangle$ ***4)*** $\langle 2, 4, 6, 8, \ldots\rangle$ ***6)*** $\langle 1, 4, 7, 10, \ldots\rangle$

Unendliche Folgen und Reihen

ABD **1.60** Von einer geometrischen Folge $\langle b_n \rangle$ sind die ersten drei Glieder gegeben. Berechne die Summe der zugehörigen unendlichen Reihe, falls diese Summe existiert. Begründe andernfalls, warum sie nicht existiert.

a) $\langle b_n \rangle = \langle 8, 4, 2, \dots \rangle$ **c)** $\langle b_n \rangle = \langle 1{,}5; 1{,}65; 1{,}815; \dots \rangle$

b) $\langle b_n \rangle = \langle \frac{9}{4}, \frac{45}{28}, \frac{225}{196}, \dots \rangle$ **d)** $\langle b_n \rangle = \langle 0{,}9; -0{,}8; 0{,}7\dot{1}; \dots \rangle$

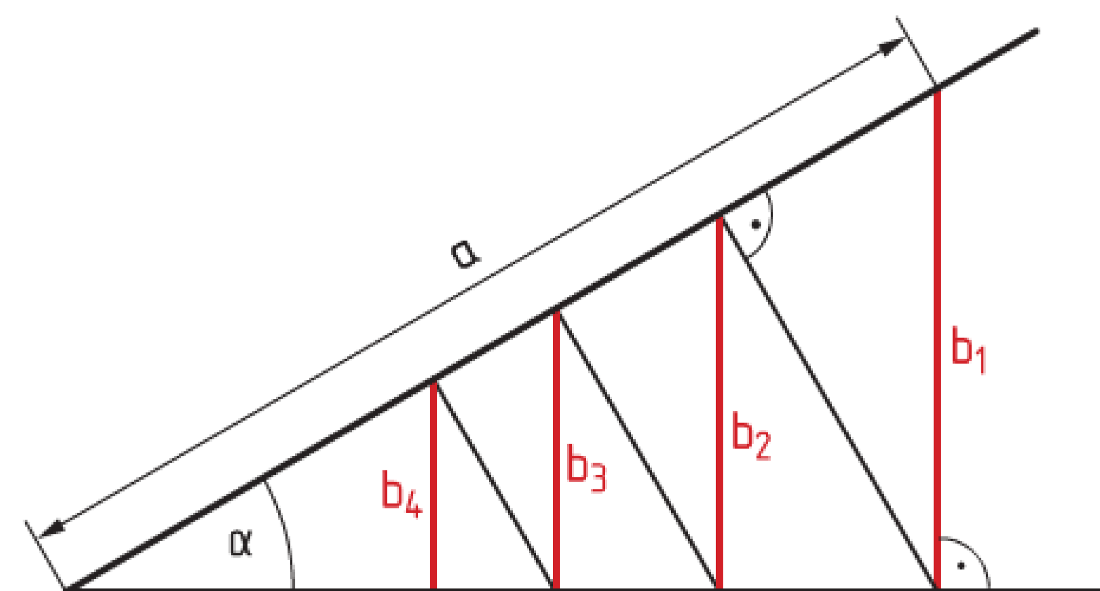
AB **1.61** Gib die periodische Dezimalzahl z als Bruch an. Verwende zuerst die Rechenregel aus Aufgabe **1.57** und überprüfe dann dein Ergebnis mithilfe einer geometrischen Reihe.

a) $z = 0{,}\overline{30}$ **b)** $z = 0{,}\overline{796}$ **c)** $z = 3{,}\overline{153\,846}$ **d)** $z = 4{,}\overline{769\,230}$

AB **1.62** Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist 25. Quadriert man die einzelnen Glieder der Reihe und bildet anschließend die Summe, so erhält man $\frac{625}{9}$.
Berechne b_1 und q.

AB **1.63** **1)** Berechne die Längen der rot eingezeichneten Strecken.
2) Berechne die Gesamtlänge aller Strecken, die – immer kleiner werdend – auf die gleiche Art eingezeichnet werden können.

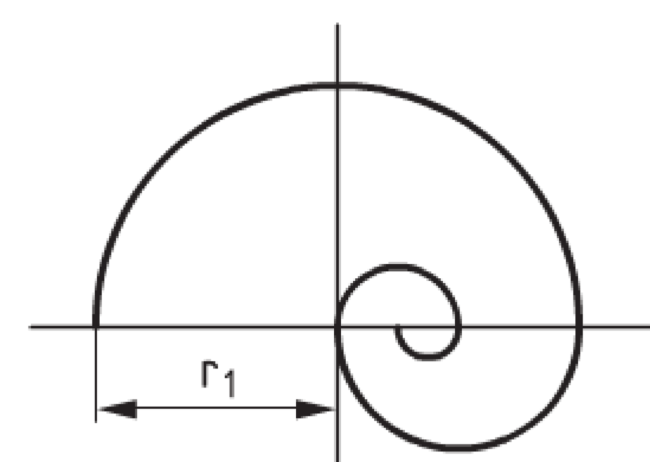
a) a = 1 m, $\alpha = 60°$ **b)** a = 25 cm, $\alpha = 45°$



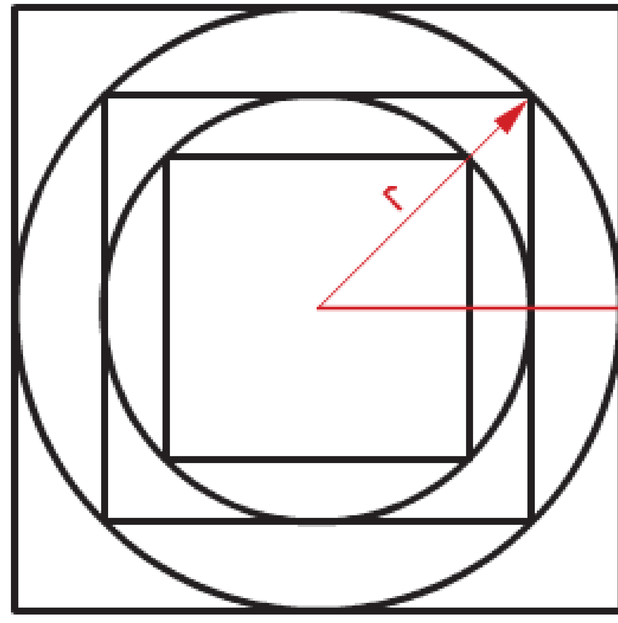
ABD **1.64** Die Seiten eines Quadrats Q_1 mit der Seitenlänge a_1 werden im Verhältnis 5 : 12 geteilt. Die Teilungspunkte sind die Eckpunkte eines zweiten Quadrats Q_2, dessen Seitenlängen ebenfalls im gleichen Verhältnis geteilt werden, sodass ein weiteres Quadrat Q_3 entsteht. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt.
1) Berechne die Summe der Umfänge von Q_1 bis Q_{12}.
2) Berechne die Summe aller Umfänge.
3) Argumentiere, warum das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Flächeninhalte $\frac{169}{289}$ ist. Berechne anschließend die Summe aller Flächeninhalte.

AB **1.65** An einen Halbkreis mit dem Radius r_1 wird ein Halbkreis mit dem Radius $r_2 = 0{,}5 \cdot r_1$ angehängt, an diesen ein Halbkreis mit dem Radius $r_3 = 0{,}5 \cdot r_2$. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt, sodass eine Spirale entsteht.
1) Berechne die Länge der ersten n Halbkreisumfänge.
2) Berechne die Gesamtlänge der Spirale.

a) $r_1 = 50$ cm, n = 12 **b)** $r_1 = 60$ mm, n = 7



ABCD **1.66** Für ein Logo wird auf einer Geraden über einer Strecke mit der Länge a ein Halbkreis gezeichnet. Anschließend an diese Strecke wird eine halb so lange Strecke gezeichnet und darüber wieder ein Halbkreis. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt.
Begründe, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.
1) Die Gesamtlänge der Strecken ist unendlich.
2) Die Gesamtlänge der Umfänge der Halbkreise ist so lang wie der Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser d = a.
3) Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Umfänge ist gleich groß wie das Verhältnis der Flächeninhalte zweier aufeinander folgender Halbkreise.
4) Würde man die Strecken vierteln, so würde sich der Gesamtflächeninhalt ebenfalls vierteln.

1.67 

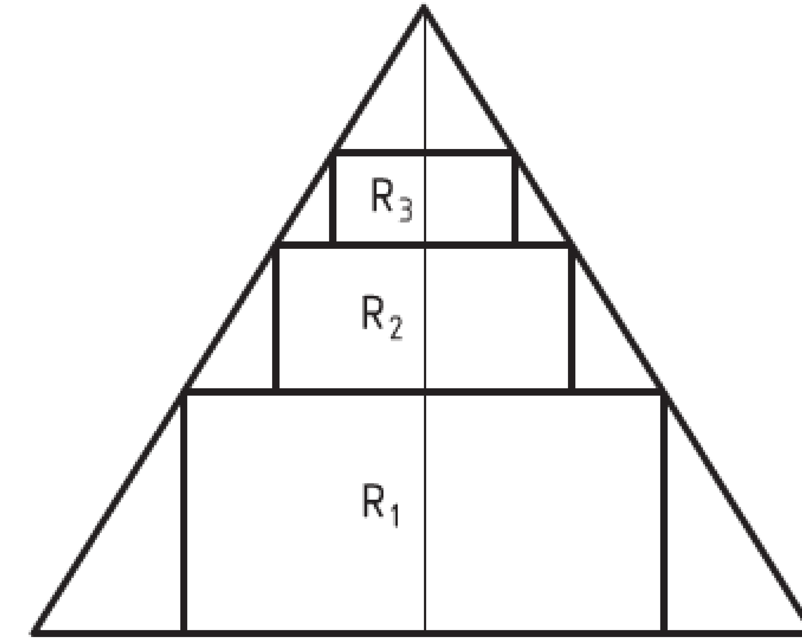
In ein Quadrat wird ein Kreis mit dem Radius r = 12 cm eingeschrieben. In diesen Kreis wird ein Quadrat eingeschrieben, in das wieder ein Kreis eingeschrieben wird. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt.

1) Berechne die Summe der Flächeninhalte aller Kreise.
2) Berechne die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate.
3) Wie ändert sich die in ***1)*** bzw. ***2)*** berechnete Summe, wenn der Radius des ersten Kreises verdoppelt wird?

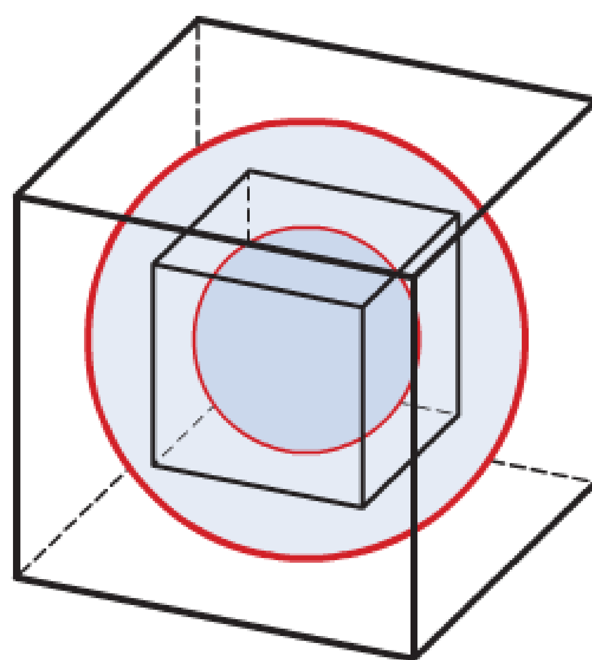
ABC

1.68 In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a = 10 cm wird ein Rechteck R_1 mit dem Seitenverhältnis 5 : 3 eingeschrieben. Auf dieses Rechteck wird ein ähnliches Rechteck aufgesetzt und dieser Vorgang unendlich oft wiederholt.

a) Wie viel Prozent der Dreiecksfläche werden durch die Rechtecke bedeckt?
b) R_1 wird hochkant eingeschrieben, ebenso die folgenden Rechtecke. Wie viel Prozent der Dreiecksfläche wird durch die Rechtecke bedeckt?



AB

1.69 

In einen Würfel mit der Seitenlänge a = 30 cm wird eine Kugel eingeschrieben. In diese Kugel wird wieder ein Würfel eingeschrieben, dem wieder eine Kugel eingeschrieben wird. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt.

1) Wie groß ist die Summe aller Kugeldurchmesser?
2) Wie groß ist die Summe aller Würfeloberflächen?
3) In welchem Verhältnis steht die Summe der Oberflächen der Kugeln zur Oberfläche des ursprünglichen Würfels?

AB

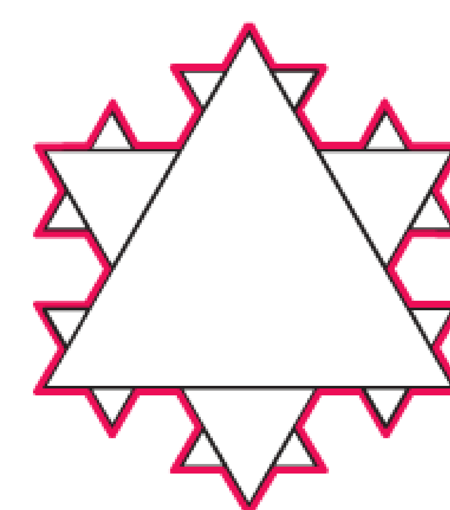
1.70 Viele irrationale Zahlen werden mithilfe unendlicher Reihen dargestellt. Der Wert der irrationalen Zahl kann mit begrenzter Genauigkeit ermittelt werden, indem man eine endliche Teilsumme der Reihe berechnet. Berechne die gegebene Summe für n = 10, 100 und 1 000. Vergleiche das Ergebnis mit jenem Wert, den der Taschenrechner ausgibt. Beachte, dass dieser Wert ebenfalls nur ein Näherungswert ist.

a) $\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$ ***b)*** $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2k-1}$

BC



1.71 Werden auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks gleichseitige Dreiecke gezeichnet, deren Seitenlänge ein Drittel der Seitenlänge des Ausgangsdreiecks ist, und auf deren Außenseiten wieder gleichseitige Dreiecke usw., dann entsteht die **Koch'sche Schneeflocke**. Diese gehört zu den **Fraktalen**, die entstehen, wenn immer kleiner werdende selbstähnliche geometrische Figuren aneinander gereiht werden.



1) Zeige, dass der Umfang der Schneeflocke unendlich, der Flächeninhalt aber endlich ist.
2) Das Sierpiński-Dreieck und der Sierpiński-Teppich sind ebenfalls Fraktale. Recherchiere deren Entstehung und besondere Eigenschaften und präsentiere dein Ergebnis.

ABCD

1.72 Eine Hundebesitzerin wandert mit ihrem Hund zu einer 11 km entfernten Hütte. Der Hund läuft zwischen ihr und der Hütte hin und her, er rennt dabei dreimal so schnell wie seine Besitzerin. Welchen Weg legt der Hund im Vergleich zu seiner Besitzerin zurück? Beschreibe deine Überlegungen.

ABC

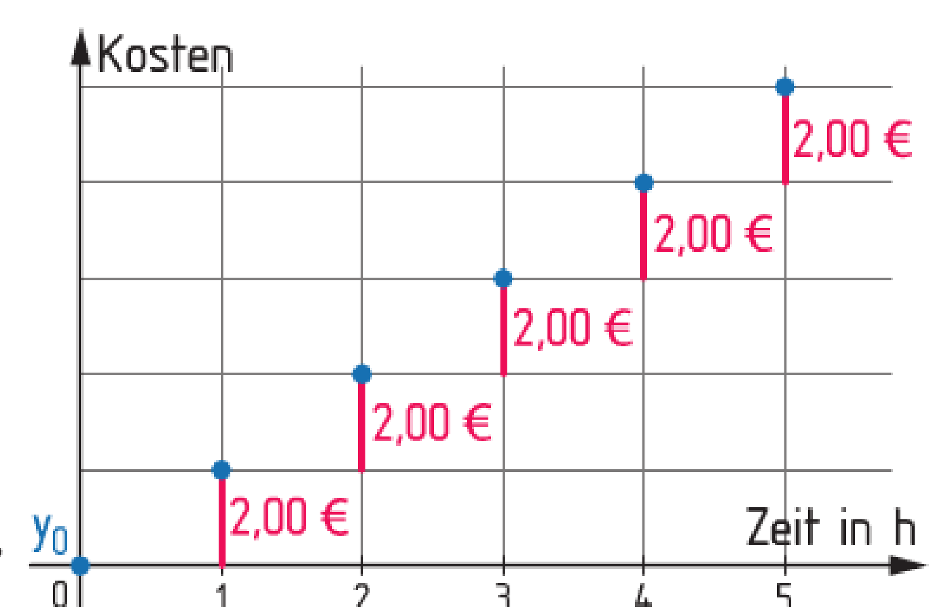
1.5 Anwendungen zu Folgen und Reihen

1.5.1 Differenzengleichungen

ABD **1.73** Bei einer Gehaltsverhandlung werden zwei Varianten angeboten:
A: Das Monatsgehalt von 1 800,00 € wird jährlich um 100,00 € erhöht.
B: Das Monatsgehalt von 1 800,00 € wird jährlich um 3 % erhöht.
Überlege, welche Variante du wählen würdest und begründe deine Entscheidung.

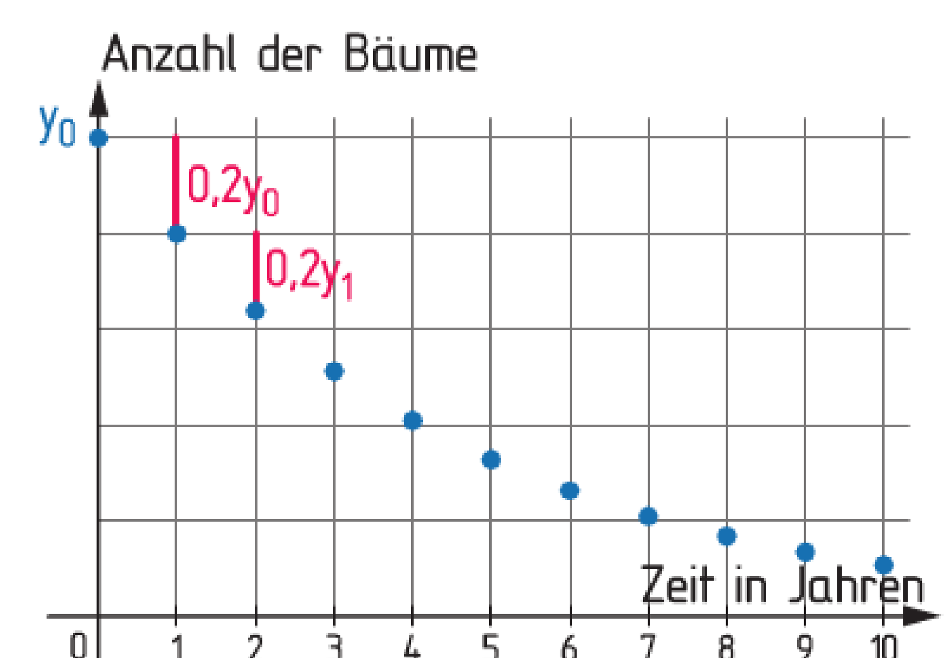
Bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen sind wir bisher davon ausgegangen, dass es sich um kontinuierliche Prozesse handelt und die Werte zu jedem beliebigen Zeitpunkt angegeben werden können. Oft erfolgt das Wachstum aber nur zu bestimmten Zeiten oder kann nur zu bestimmten Zeitpunkten ermittelt werden. Zum Beispiel wird ein Geldbetrag jährlich eingezahlt oder die Anzahl einer Population wird monatlich erhoben. Das Wachstum ist dann diskret und man kann die Veränderung immer nur von einem Zeitpunkt zum nächsten angeben. Dadurch ergeben sich so genannte **Differenzengleichungen**, mit deren Hilfe auch komplexe Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse in Natur, Wirtschaft und Technik beschrieben werden können. In einer Differenzengleichung wird ein Prozess mithilfe der **Änderung von einem Zeitpunkt zum nächsten** beschrieben: $\Delta y(t) = y(t + 1) - y(t)$, t = 0, 1, 2, 3, ...
Mithilfe der (bekannten) Differenzen der Funktionswerte wird dann die zugehörige Funktion ermittelt. Für die gesuchte Funktion y(t) gilt: Jeder natürlichen Zahl t kann ein Wert y(t) zugeordnet werden. Die Funktion y(t), die Lösung einer Differenzengleichung ist, ist daher eine Folge.

ZB: Die Kosten für eine Parkgarage erhöhen sich stündlich um 2,00 €.
Die Differenzengleichung lautet: $\Delta y(t) = 2{,}00$ €
oder: $y(t + 1) - y(t) = 2{,}00$ € $\Rightarrow$ $y(t + 1) = y(t) + 2{,}00$ €
Das entspricht der rekursiven Darstellung einer arithmetischen Folge mit d = 2,00 €. Das Wachstum ist linear.
Die Lösung lautet daher: $y(t) = y_0 + 2{,}00\text{ €} \cdot t$, t = 0, 1, 2, ...



Die Konstante y_0 entspricht dem Anfangswert zum Zeitpunkt t = 0: $y_0 = y(0)$
Erst durch Angabe dieses Anfangswerts wird die Folge eindeutig festgelegt.

ZB: In einer Christbaumzucht werden jährlich 20 % der Bäume gefällt und nicht nachgepflanzt.
Die Differenzengleichung lautet: $\Delta y(t) = -0{,}2 \cdot y(t)$
$y(t + 1) - y(t) = -0{,}2 \cdot y(t)$ $\Rightarrow$ $y(t + 1) = 0{,}8 \cdot y(t)$
Das entspricht der rekursiven Darstellung einer geometrischen Folge mit q = 0,8. Die Abnahme ist exponentiell.
Die Lösung lautet daher: $y(t) = y_0 \cdot 0{,}8^t$, t = 0, 1, 2, ...



Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf **Differenzengleichungen 1. Ordnung**, das bedeutet, dass die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Funktionswerten gegeben ist.

Kommt in einer Gleichung die Differenz $\Delta y(t) = y(t + 1) - y(t)$, t = 0, 1, 2, 3, ... vor, so spricht man von einer **Differenzengleichung 1. Ordnung**, wobei y(t) die Funktion ist, die den Prozess beschreibt.
Lösung einer Differenzengleichung ist jede **Folge**, die die Gleichung erfüllt. Ist ein Anfangswert gegeben, so ist die Differenzengleichung eindeutig lösbar.

Durch die rekursive Angabe der Differenzengleichung ist es auch möglich, Glieder der Lösungsfolge zu berechnen, ohne die Gleichung allgemein zu lösen.

1.74 Ermittle jeweils die ersten 7 Glieder der Lösungsfolge und stelle sie grafisch dar. Interpretiere die Unterschiede zwischen den beiden Lösungen.

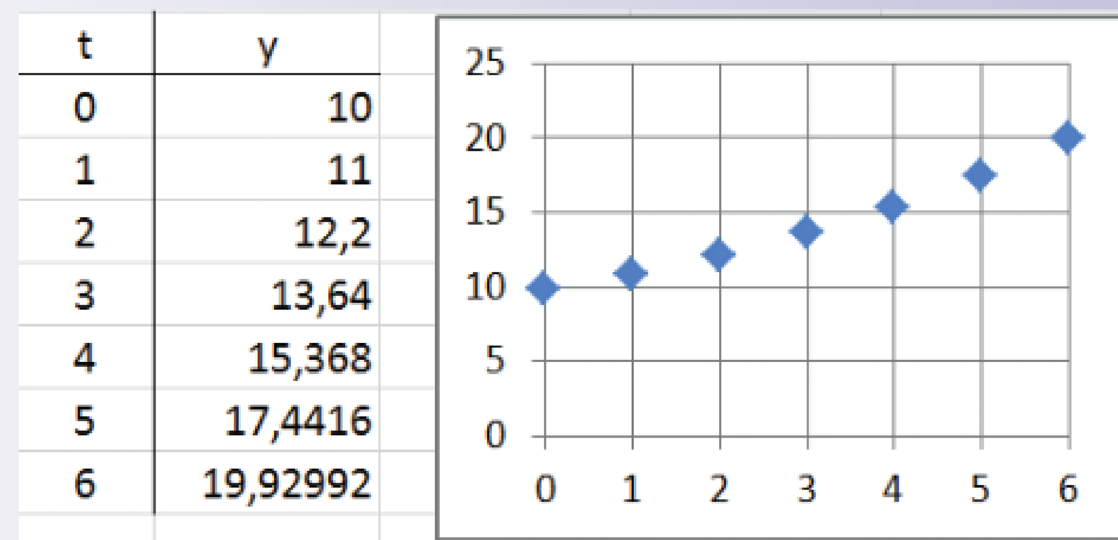
a) 1) $y(t + 1) = 1{,}2 \cdot y(t) - 1,\ y_0 = 10$ **2)** $y(t + 1) = 1{,}2 \cdot y(t) - 1,\ y_0 = 5$

b) 1) $y(t + 1) = -0{,}6 \cdot y(t) + 5,\ y_0 = 8$ **2)** $y(t + 1) = -1{,}6 \cdot y(t) + 5,\ y_0 = 8$



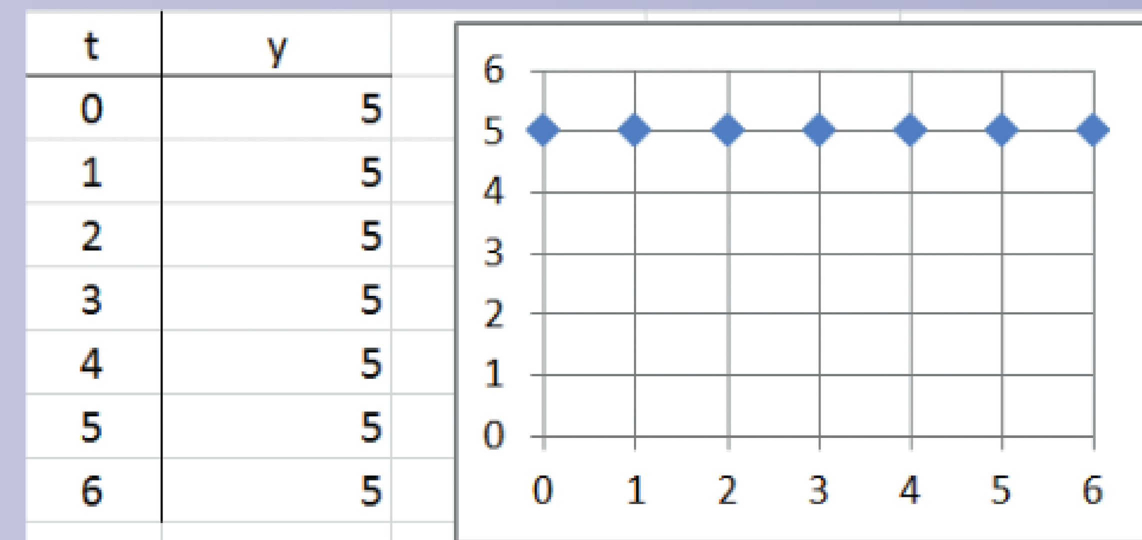
Lösung mit Excel 2010:

a) 1)



t	y
0	10
1	11
2	12,2
3	13,64
4	15,368
5	17,4416
6	19,92992

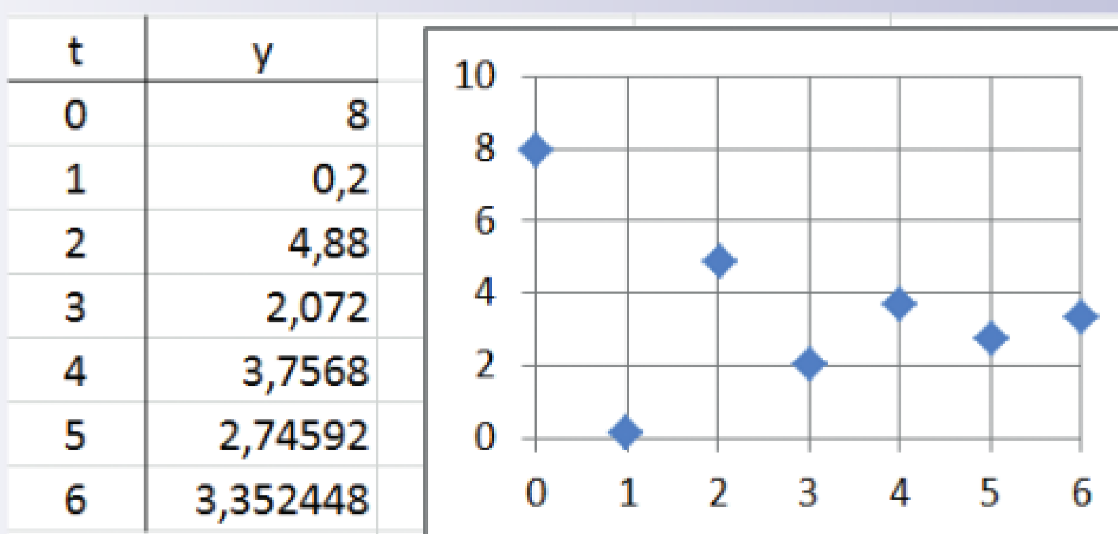
2)



t	y
0	5
1	5
2	5
3	5
4	5
5	5
6	5

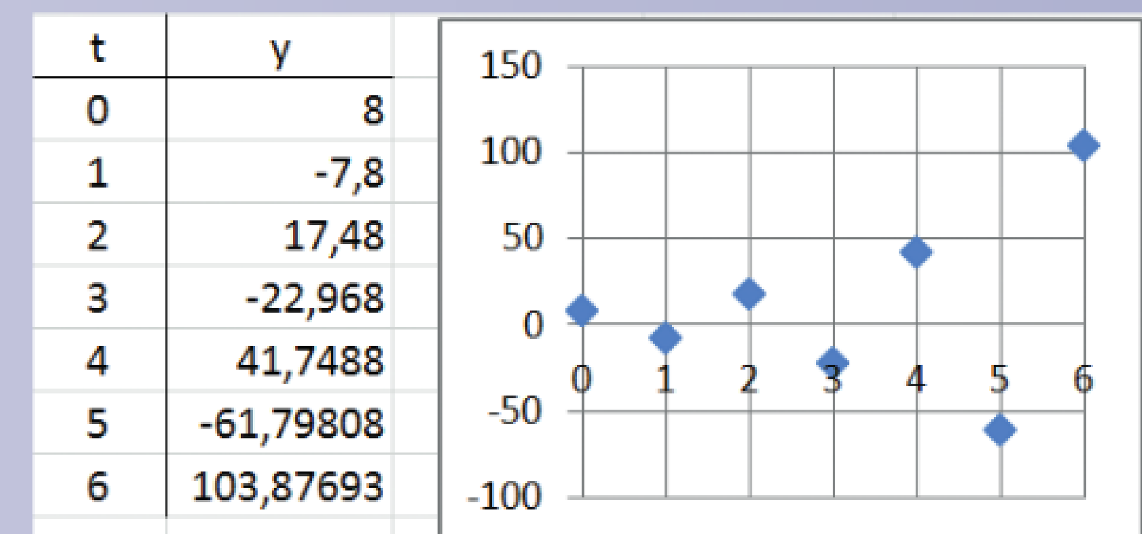
Durch die unterschiedlichen Anfangswerte ergeben sich unterschiedliche Verläufe.

b) 1)



t	y
0	8
1	0,2
2	4,88
3	2,072
4	3,7568
5	2,74592
6	3,352448

2)



t	y
0	8
1	-7,8
2	17,48
3	-22,968
4	41,7488
5	-61,79808
6	103,87693

Im 1. Fall konvergiert die Folge, im 2. Fall divergiert die Folge. Das Konvergenzverhalten wird vom Koeffizienten von y(t) beeinflusst.

Prozesse mit konstanter Wachstumsrate

Viele Vorgänge, wie zum Beispiel die Verzinsung eines Kapitalsparbuchs oder der radioaktive Zerfall, stellen einen reinen Wachstums- oder Zerfallsprozess dar. Die Änderung Δy ist dann proportional zur Menge y(t) und die zugehörige Differenzengleichung lautet:

$y(t + 1) - y(t) = k \cdot y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t + 1) = (1 + k) \cdot y(t)$

Die Lösungsfolge ist daher eine geometrische Folge: $y(t) = y_0 \cdot (1 + k)^t$

1.75 Ein Wald besteht aus 1 300 Bäumen. Der Baumbestand wächst jährlich um 4 %.

1) Gib die Differenzengleichung an, die diesen Vorgang beschreibt und löse sie.

2) Wie viele Bäume wird es in 15 Jahren geben, wenn kein Baum gefällt wird?

3) Stelle die Lösung grafisch dar. Um welchen Wachstumsvorgang handelt es sich?



Lösung mit Excel 2010:

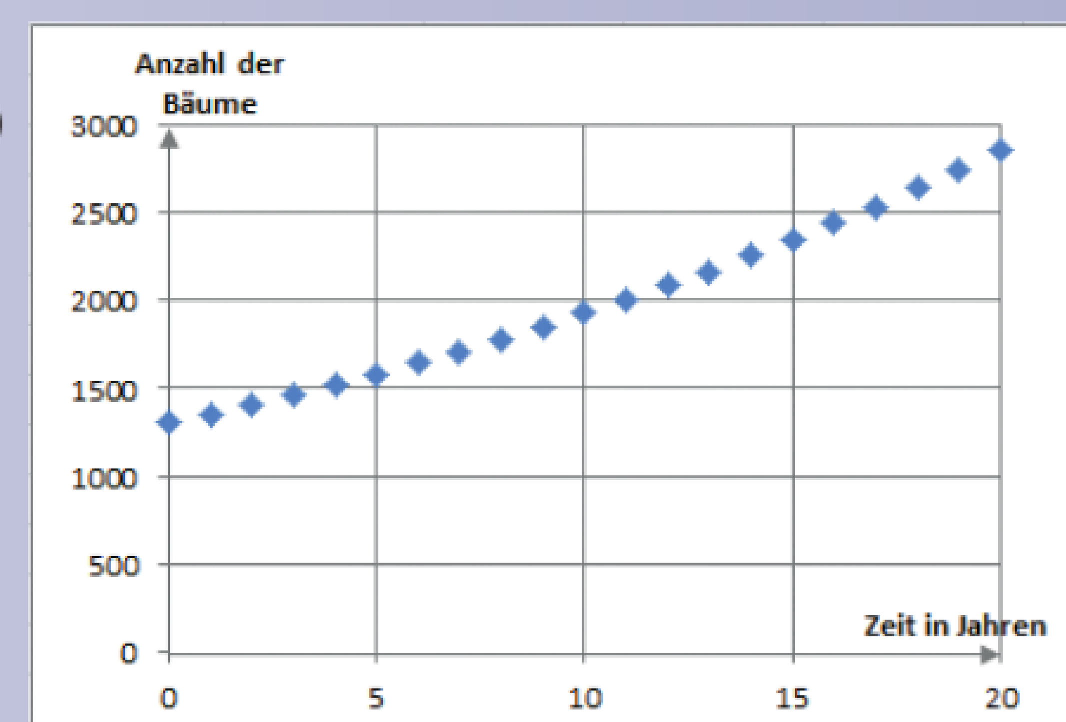
1) $\Delta y(t) = 0{,}04 \cdot y(t)$ bzw. $y(t + 1) = 1{,}04 \cdot y(t)$ mit $y(0) = 1\,300$

$y(1) = 1{,}04 \cdot y(0) = 1{,}04 \cdot 1\,300$

$y(2) = 1{,}04 \cdot y(1) = 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1\,300 = 1{,}04^2 \cdot 1\,300$

...

$y(t) = 1\,300 \cdot 1{,}04^t$



2) $y(15) = 1\,300 \cdot 1{,}04^{15} = 2\,341{,}226$

In 15 Jahren wird es rund 2 340 Bäume geben.

3) Es handelt sich um exponentielles Wachstum.

Unendliche Folgen und Reihen

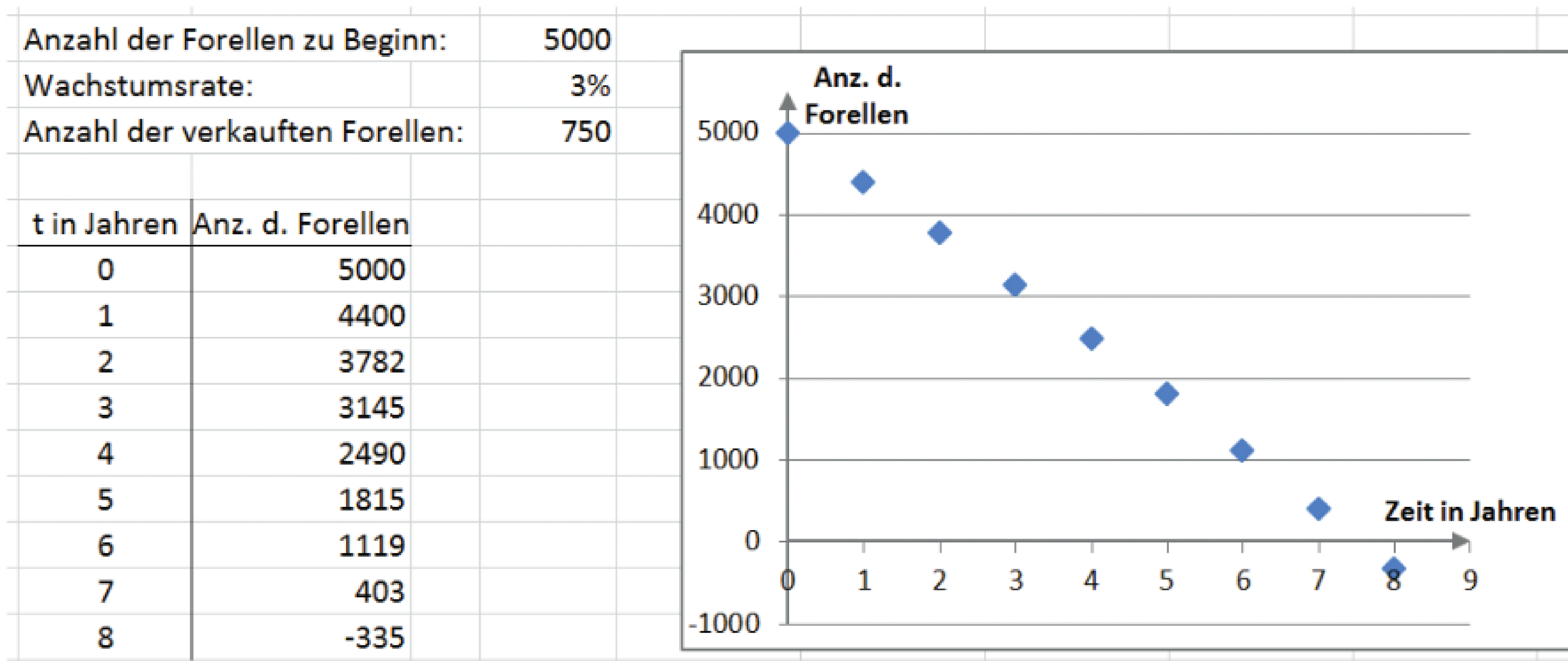
Prozesse mit konstanter Wachstumsrate und gleich bleibender Zu- bzw. Abnahme

In einem Teich vermehren sich die Fische proportional zum Bestand, also mit einer konstanten Wachstumsrate. Die jährliche Fangquote eines Fischereivereins ist konstant. Sie stellt eine von der Wachstumsrate unabhängige Veränderung durch einen äußeren Eingriff dar.
Ein Vorgang mit einer konstanten Wachstumsrate und konstanter Zu- bzw. Abnahme wird durch eine Gleichung der Form $y(t + 1) = a \cdot y(t) + b$ beschrieben.





ZB: Ein Forellenzüchter besitzt 5 000 Forellen. Er weiß, dass deren Anzahl sich jedes Jahr um 3 % vergrößert. Am Ende jeden Jahres verkauft er 750 Forellen.
Der Verlauf der Anzahl der Forellen wird grafisch dargestellt.



Anzahl der Forellen zu Beginn:	5000
Wachstumsrate:	3%
Anzahl der verkauften Forellen:	750

t in Jahren	Anz. d. Forellen
0	5000
1	4400
2	3782
3	3145
4	2490
5	1815
6	1119
7	403
8	-335

Aus der Tabelle kann man ablesen, dass der Forellenzüchter zum Beispiel nach fünf Jahren noch 1 815 Forellen besitzt. Nach acht Jahren hätte er alle Forellen verkauft.
Würde er hingegen am Ende eines Jahres nur 150 Forellen verkaufen, dann könnte er seinen Bestand konstant halten.
Um die Funktion zu ermitteln, die die Anzahl der Forellen abhängig von der Anzahl der Jahre angibt, stellt man die Differenzengleichung auf.
Wachstumsrate: $a = 1{,}03$ konstante Abnahme: $b = -750$
$y(t + 1) = 1{,}03 \cdot y(t) - 750$

$y(0) = 5\,000$

- Zu Beginn sind $y_0 = 5\,000$ Forellen vorhanden.

$y(1) = 1{,}03 \cdot 5\,000 - 750 = 4\,400$

- Die Anzahl der Forellen nach einem Jahr hat sich aufgrund der Zuwachsrate erhöht und um die Anzahl der verkauften Forellen vermindert.

$y(2) = 1{,}03 \cdot y(1) - 750 =$
$= 1{,}03 \cdot (1{,}03 \cdot 5\,000 - 750) - 750 =$
$= 1{,}03^2 \cdot 5\,000 - 1{,}03 \cdot 750 - 750$
$= 1{,}03^2 \cdot 5\,000 - 750 \cdot (1{,}03 + 1) = 3\,782$

- Analog kann die Anzahl der Forellen in den nächsten drei Jahren berechnet werden.

$y(3) = 1{,}03 \cdot y(2) - 750 = 1{,}03^3 \cdot 5\,000 - 750 \cdot (1{,}03^2 + 1{,}03 + 1) = 3\,145{,}46$

$y(4) = 1{,}03 \cdot y(3) - 750 = 1{,}03^4 \cdot 5\,000 - 750 \cdot (1{,}03^3 + 1{,}03^2 + 1{,}03 + 1) = 2\,489{,}823...$

$y(5) = 1{,}03 \cdot y(4) - 750 = 1{,}03^5 \cdot 5\,000 - 750 \cdot (1{,}03^4 + 1{,}03^3 + 1{,}03^2 + 1{,}03 + 1) = 1\,814{,}518...$

Der Faktor $(1{,}03^4 + 1{,}03^3 + 1{,}03^2 + 1{,}03 + 1)$ ist die Summe einer endlichen Reihe mit $b_1 = 1$ und $q = 1{,}03$. Mithilfe der Summenformel für geometrische Reihen kann man für $y(t)$ folgende Formel angeben:
$y(t) = 1{,}03^t \cdot 5\,000 - 750 \cdot \frac{1{,}03^t - 1}{1{,}03 - 1}$

Prozesse mit konstanter Wachstumsrate und veränderlicher Zu- bzw. Abnahme

Hängt die Zu- oder Abnahme in einem Prozess von der Variablen ab, dann kann der Vorgang durch eine Differenzengleichung der Form $y(t + 1) = a \cdot y(t) - b(t)$ beschrieben werden.
ZB: In einer Stadt leben 49 000 Menschen. Das jährliche Bevölkerungswachstum beträgt 1,8 %. Aufgrund eines neu gebauten Einkaufszentrums ergibt sich ein Zuzug von 180 Personen im ersten Jahr. Dieser Zuzug nimmt jährlich um 0,4 % zu. Es soll nun berechnet werden, wie viele Menschen unter diesen Bedingungen in 15 Jahren in der Stadt leben werden.

- Zuzug im 1. Jahr: $b_1 = 180$
- Zuzug im 2. Jahr: $b_2 = 1{,}004 \cdot b_1$

$y(0) = 49\,000$

$y(1) = 1{,}018 \cdot 49\,000 + 180 = 50\,062$

$$\begin{aligned} y(2) &= 1{,}018 \cdot y_1 + 1{,}004 \cdot b_1 = \\ &= 1{,}018 \cdot (1{,}018 \cdot 49\,000 + 180) + 1{,}004 \cdot 180 = \\ &= 1{,}018^2 \cdot 49\,000 + 1{,}018 \cdot 180 + 1{,}004 \cdot 180 = \\ &= 1{,}018^2 \cdot 49\,000 + 180 \cdot (1{,}018 + 1{,}004) = 51\,143{,}836 \end{aligned}$$

$y(3) = 1{,}018 \cdot y_2 + 1{,}004 \cdot b_2 = 1{,}018^3 \cdot 49\,000 + 180 \cdot (1{,}018^2 + 1{,}018 \cdot 1{,}004 + 1{,}004^2) = 52\,245{,}8...$

...

$$y(t) = 1{,}018^t \cdot 49\,000 + 180 \cdot \underbrace{(1{,}018^{t-1} + 1{,}018^{t-2} \cdot 1{,}004 + \ldots + 1{,}018 \cdot 1{,}004^{t-2} + 1{,}004^{t-1})}_{\text{geometrische Reihe mit t Gliedern}}$$

$b_1 = 1{,}018^{t-1}$, $q = \frac{1{,}004}{1{,}018}$

$$s_t = b_1 \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} = 1{,}018^{t-1} \cdot \frac{\left(\frac{1{,}004}{1{,}018}\right)^t - 1}{\frac{1{,}004}{1{,}018} - 1}$$

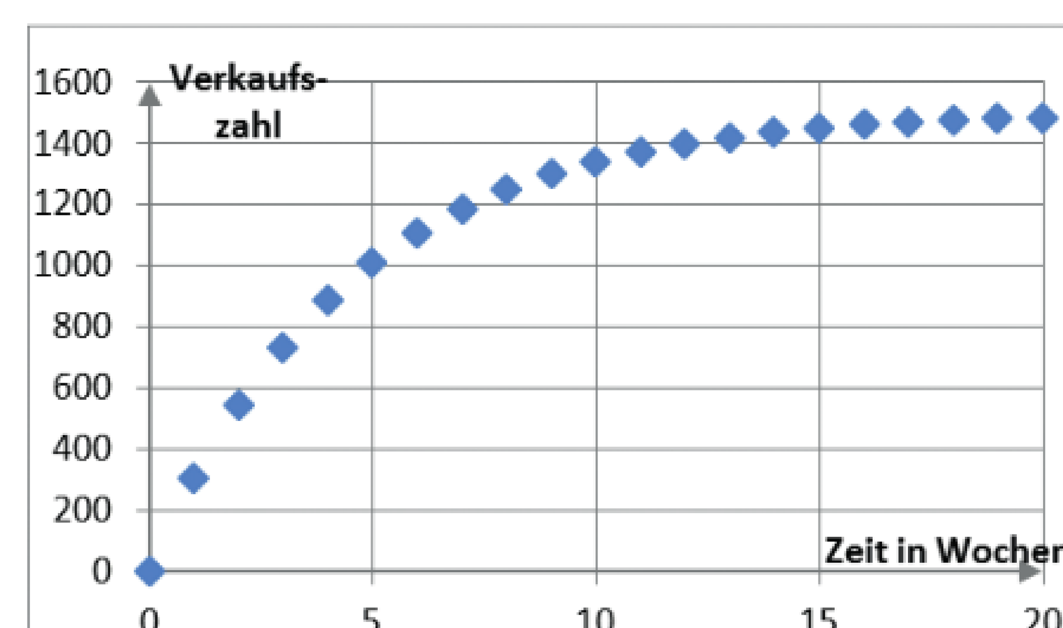
$$y(t) = 1{,}018^t \cdot 49\,000 + 180 \cdot 1{,}018^{t-1} \cdot \frac{\left(\frac{1{,}004}{1{,}018}\right)^t - 1}{\frac{1{,}004}{1{,}018} - 1}$$

$$y(15) = 1{,}018^{15} \cdot 49\,000 + 180 \cdot 1{,}018^{14} \cdot \frac{\left(\frac{1{,}004}{1{,}018}\right)^{15} - 1}{\frac{1{,}004}{1{,}018} - 1} = 67\,185{,}768$$

Auf Basis des gewählten Modells kann man in 15 Jahren mit einer Einwohnerzahl von rund 67 200 Menschen rechnen.

Beschränktes Wachstum

ZB: Ein Elektrohändler verkauft von einer Lieferung von 1 500 Laptops zu Beginn mehr Stück als nach einiger Zeit. Die Änderung Δy der Verkaufszahlen y pro Woche ist proportional zur noch vorhandenen Stückzahl, also zur Differenz der 1 500 Stück und der bereits verkauften Laptops. Die Verkaufszahlen sollen für den Proportionalitätsfaktor $k = 0{,}2$ grafisch dargestellt werden.
Die Differenzengleichung lautet:
$\Delta y = k \cdot (K - y(t))$ bzw.
$y(t + 1) = y(t) + k \cdot (K - y(t))$
mit $K = 1\,500$, $k = 0{,}2$ und $y(0) = 0$
Stellt man den Zusammenhang grafisch dar, so erkennt man, dass es sich um **beschränktes exponentielles Wachstum** handelt.



Differenzengleichung für **beschränktes Wachstum**: $y(t + 1) = y(t) + k \cdot (K - y(t))$

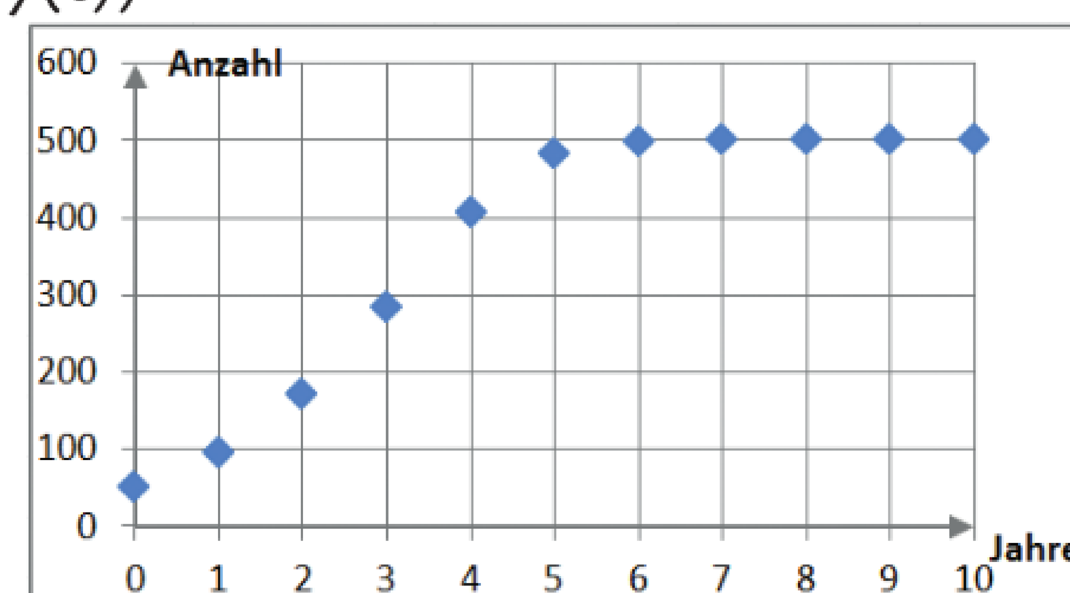
Logistisches Wachstum

ZB: In einem Nationalpark leben 50 Erdmännchen. Der Park bietet ausreichend Lebensraum für 500 Erdmännchen. Der jährliche Zuwachs Δy der Erdmännchenpopulation ist sowohl proportional zur vorhandenen Anzahl y der Erdmännchen als auch zur Differenz zur Kapazitätsgrenze K = 500. Es soll die Entwicklung der Anzahl der Erdmännchen für den Proportionalitätsfaktor k = 0,002 grafisch dargestellt werden.



Der Zuwachs Δy wird durch folgende Differenzengleichung beschrieben:
$\Delta y = k \cdot y(t) \cdot (K - y(t))$ bzw. $y(t + 1) = y(t) + k \cdot y(t) \cdot (K - y(t))$

Im Diagramm ist die Anzahl für K = 500, k = 0,002 und y(0) = 50 grafisch dargestellt. Das anfangs langsame Wachstum steigt mit zunehmender Populationsgröße zuerst an. Kommt man der Kapazitätsgrenze näher, verlangsamt sich das Wachstum wieder. Es handelt sich daher um **logistisches Wachstum**.



Differenzengleichung für **logistisches Wachstum**: $y(t + 1) = y(t) + k \cdot y(t) \cdot (K - y(t))$

B **1.76** Ermittle die Lösung der Differenzengleichung.

a) $y(t + 1) - y(t) = 4$, $y_0 = 2$ **b)** $y(t + 1) = 1{,}1 \cdot y(t)$, $y_0 = 5$

AC **1.77** Stelle die Differenzengleichung auf und gib an, um welches Wachstum es sich handelt.

a) Ein Kapital vermehrt sich am Ende jeden Jahres um 2,25 %.
b) Das Guthaben wird während eines Telefonats jede Minute um 5 Cent weniger.
c) Die Menge des Wirkstoffs eines Medikaments halbiert sich jede Stunde.

BC **1.78** Ermittle jeweils die ersten sechs Glieder der Lösungsfolge und stelle sie grafisch dar. Interpretiere die Unterschiede zwischen den beiden Lösungen.



a) 1) $y(t + 1) = 0{,}8 \cdot y(t)$, $y_0 = 10$ **2)** $y(t + 1) = 1{,}8 \cdot y(t) - 1$, $y_0 = 10$
b) 1) $y(t + 1) = 1{,}06 \cdot y(t) - 10$, $y_0 = 100$ **2)** $y(t + 1) = 1{,}06 \cdot y(t) - 5$, $y_0 = 100$

ABCD **1.79** Ein Zwillingspaar erhält zur Geburt je 1 000,00 €. Für einen Zwilling wird das Geld auf ein Kapitalsparbuch mit einem Zinssatz von 3,75 % p. a. gelegt. Für den anderen Zwilling wird das Geld in ein Sparschwein gegeben und dieses jedes Jahr mit 50,00 € gefüttert.



1) Gib die zugehörigen Differenzengleichungen an und löse diese.
2) Erkläre, mit welchem Wachstumsmodell der Vorgang jeweils beschrieben werden kann.
3) Vergleiche mithilfe von Technologieeinsatz die Guthaben der Zwillinge zum 12. und zum 18. Geburtstag.

AB **1.80** In einer HTL begann ein 1. Jahrgang mit 250 Schülerinnen und Schülern. Im 1. Jahr verließen 80 Jugendliche dieses Jahrgangs die Schule. Die Zahl der Schulabbrecher sank in den nächsten vier Jahren jährlich um (rund) 60 %.
Beantworte die Frage zuerst mithilfe von Technologieeinsatz und einer grafischen Darstellung und anschließend durch Lösen der Differenzengleichung.



a) Wie viele Schülerinnen und Schüler gab es nach fünf Jahren in diesem Jahrgang, wenn keine weiteren Jugendlichen eingetreten waren?
b) Wie viele Schülerinnen und Schüler gab es nach fünf Jahren in diesem Jahrgang, wenn zusätzlich jährlich zehn Jugendliche eingetreten waren?

1.81 Jemand erbt ein Sparbuch mit einer Einlage von 245 000,00 €, das mit einem fixen Zinssatz von 4,5 % p. a. nach Abzug der KESt verzinst ist. Jeweils zu Jahresbeginn werden 6 000,00 € abgehoben. ABC





1) Stelle die Kapitalentwicklung grafisch dar.
2) Welcher Betrag ist nach 15 Jahren auf dem Sparbuch?
3) Lies aus der Grafik ab, ob man unter diesen Bedingungen 45 Jahre lang jährlich 6 000,00 € abheben kann.
4) Gib die Differenzengleichung an und löse diese.

1.82 Jahrgangssardinen sind eine Delikatesse, für die Gourmets bis zu 10,00 € pro Dose bezahlen. Ein Delikatessengeschäft führt diese Spezialität und hat im Moment 1 500 Dosen gelagert. Erfahrungsgemäß werden 85 % der Dosen jährlich verkauft. Um die Lagerbestände wieder zu füllen, werden zu Beginn jeden Jahrs 2 000 Dosen eingekauft. Wie viele Dosen wird es in diesem Geschäft in **1)** 10, **2)** 20 Jahren geben? AB

1.83 Nach der Fangsaison 2011 befanden sich in einem Teich 100 Fische. Vor Beginn der Fangsaison 2012 betrug der Fischbestand des Teichs 150 Fische. ABCD
1) Gib die Differenzengleichung an, wenn exponentielles Wachstum vorausgesetzt wird.
2) Jemand schlägt vor, dass in einer Fangsaison 60 Fische gefangen werden sollen. Erkläre, ob der Fischbestand in den folgenden Jahren zu- oder abnimmt.
3) Argumentiere, wie viele Fische man fangen darf, damit der Fischbestand gleich bleibt.
4) Es werden jährlich 30 Fische gefangen. Gib die Differenzengleichung an und löse sie.

1.84 In einer Gemeinde beträgt das jährliche Bevölkerungswachstum 1,2 %. Momentan leben 5 000 Menschen in der Gemeinde. In der Nachbarstadt werden neue Arbeitsplätze geschaffen, sodass 100 Gemeindebewohner im ersten Jahr in die Nachbarstadt ziehen. In den weiteren Jahren geht man davon aus, dass die „Landflucht" jährlich um 10 % abnimmt. Berechne, wie viele Menschen nach fünf Jahren in der Gemeinde leben werden. AB

1.85 Für die Tombola eines Schulballs standen 200 Lose zur Verfügung. Nach einer Stunde waren bereits 100 Lose verkauft. Für die Verkaufszahlen gilt: $y(t+1) = y(t) + k \cdot (K - y(t))$ ABC



1) Um welches Wachstumsmodell handelt es sich?
2) Gib die Kapazitätsgrenze K an und ermittle den Faktor k.
3) Stelle die Lösung der Differenzengleichung grafisch dar.
4) Dar Ball wurde um 20:00 Uhr eröffnet. Wie viele Lose waren um Mitternacht verkauft?

1.86 Auf einer Wiese hat sich die Anzahl der Feldhamster innerhalb eines Monats von 25 Tieren auf 100 Tiere erhöht. ABC



1) Stelle die Differenzengleichungen für drei verschiedene Wachstumsmodelle auf:
Modell 1: Das Wachstum ist linear.
Modell 2: Das Wachstum ist exponentiell.
Modell 3: Es handelt sich um logistisches Wachstum mit der Differenzengleichung
$y(t+1) = y(t) + k \cdot y(t) \cdot (800 - y(t))$.
2) Stelle die Entwicklung der Hamsterpopulation für jedes der drei Modelle grafisch dar und ermittle, nach wie vielen Monaten 700 Hamster auf der Wiese leben würden. Vergleiche die Ergebnisse.

1.87 Österreichs Wälder bestehen derzeit aus einer Milliarde Festmeter (fm) Holz. Dabei entspricht 1 fm = 1 m^3 fester Holzmasse. Pro Sekunde wächst ein Festmeter nach, 2 % des Bestands werden jährlich geerntet. Wie viele Festmeter Holz wird es unter diesen Bedingungen in 20 Jahren in Österreich geben? AB



1.5.2 Rentenrechnung



AB **1.88** Ein Kapitalsparbuch mit einer Einlage von 1 000,00 € wird zu einem Zinssatz von 2,25 % p. a. angelegt.

1) Welcher Geldbetrag ist nach 25 Jahren auf dem Sparbuch, wenn sich in dieser Zeit der Zinssatz nicht geändert hat?

2) Welchen gleich bleibenden Betrag hätte man jährlich in ein Sparschwein stecken müssen, um nach 25 Jahren den gleichen Geldbetrag angespart zu haben?

Viele Versicherungen bieten eine Altersvorsorge an, bei der zuerst über möglichst viele Jahre ein festgelegter Betrag eingezahlt wird und dann in regelmäßigen Abständen ein bestimmter Anteil der Gesamtsumme, die so genannte **Rate**, ausbezahlt wird. Dieses Einkommen wird **Rente** (althochdeutsch: „rentôn“ = ergeben) genannt. Man versteht unter einer Rente eine immer wiederkehrende Zahlung. Dabei ist wichtig zu wissen, wie eine solche wiederkehrende, zumeist gleich bleibende Auszahlung in eine einmalige Einzahlung umgerechnet werden kann. Auch werden meist Kredite in Raten zurückgezahlt. Die übersichtliche Darstellung der Rückzahlungen erfolgt in einem **Tilgungsplan**.

Das Gebiet der Mathematik, das sich mit dem Berechnen von Renten auseinandersetzt, ist die **Rentenrechnung**. Eine Rente, deren Dauer zeitlich begrenzt ist, nennt man **Zeitrente**. Eine Rente, die bis zum Tod bezogen wird, wird **Leibrente** genannt. Die Zeitspanne zwischen zwei Ratenzahlungen wird **Rentenperiode** genannt. Wird eine Rente am Ende einer Rentenperiode gezahlt, so spricht man von einer **nachschüssigen Rente**. Wird sie zu Beginn gezahlt, so nennt man sie **vorschüssige Rente**. Eine Rente, bei der das Kapital unverändert bleibt, bei der also nur die Zinsen ausgezahlt werden, heißt **ewige Rente**. Der **Endwert** einer Rente ist der Wert am Ende des Rentenzeitraums, der **Barwert** der Wert zu Beginn des Rentenzeitraums.
Im Folgenden werden Formeln zur Berechnung das Endwerts E bzw. des Barwerts B einer Rente mit der Rate R, dem Aufzinsungsfaktor q und n Verzinsungsperioden hergeleitet.

	Nachschüssige Rente	Vorschüssige Rente
Verzinsungs-perioden:	1 2 … n	1 2 … n
Einzahlungen:	R R … R R	R R R … R
Wert am Ende der Laufzeit:	$\cdot q^{n-1}$, $\cdot q^{n-2}$, $\cdot q$ $R \cdot q^{n-1}$ $R \cdot q^{n-2}$ … $R \cdot q$ R	$\cdot q^{n}$, $\cdot q^{n-1}$, $\cdot q$ $R \cdot q^{n}$ $R \cdot q^{n-1}$ … $R \cdot q$

Der **Endwert einer nachschüssigen Rente** wird durch Anwenden der Summenformel für die endliche geometrische Reihe berechnet:

$$E = R + R \cdot q + R \cdot q^2 + \dots + R \cdot q^{n-1} = R \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Den **Endwert einer vorschüssigen Rente** erhält man durch Multiplikation mit q, da das Ende des Rentenzeitraums eine Periode nach der letzten Zahlung liegt: $E = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Da der Barwert einschließlich der Zinseszinsen nach n Rentenperioden den gleichen Wert wie der Endwert haben muss, gilt: $E = B \cdot q^n \Rightarrow B = \frac{E}{q^n}$

Somit gilt für den **Barwert einer nachschüssigen Rente**: $B = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1}$

und für den **Barwert einer vorschüssigen Rente**: $B = R \cdot \frac{q \cdot (q^n - 1)}{q^n \cdot (q - 1)} = R \cdot q \cdot \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1}$

Sind die Rentenperiode und die Zinsperiode gleich lang, so gilt $q = 1 + \frac{p}{100}$, wobei p % der Zinssatz p. a. ist. Sind die beiden Perioden nicht gleich lang, so muss der entsprechende Aufzinsungsfaktor q aus dem Zinssatz p ermittelt werden. Zum Beispiel ergibt sich für eine monatliche Ratenzahlung bei einem Jahreszinssatz von 4 % ein Aufzinsungsfaktor von $q = \sqrt[12]{1{,}04}$.
Wird hingegen die Rate nur alle zwei Jahre ausbezahlt, so ergibt sich mit einem Jahreszinssatz von 4 % ein Aufzinsungsfaktor von $q = 1{,}04^2$.
Falls nicht anders angegeben, ist bei den Prozentsätzen in den Aufgaben die KESt bereits berücksichtigt. Nebenkosten, die zum Beispiel bei Krediten anfallen, bleiben hier ebenfalls unberücksichtigt.

Endwert einer nachschüssigen Rente

$$E = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Barwert einer nachschüssigen Rente

$$B = \frac{E}{q^n} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1}$$

Endwert einer vorschüssigen Rente

$$E = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Barwert einer vorschüssigen Rente

$$B = \frac{E}{q^n} = R \cdot q \cdot \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1}$$

R ... Rate (Rente), q ... Aufzinsungsfaktor, n ... Anzahl der Rentenperioden

Technologieeinsatz: Rentenrechnung
Tabellenkalkulationsprogramm (Excel 2010)



TI-Nspire: www.hpt.at

In einem Tabellenkalkulationsprogramm stehen viele Funktionen für finanzmathematische Berechnungen zur Verfügung. ZB: Die Funktion **RMZ(Zins;ZZr;Bw;Zw;F)** kann zur Berechnung einer Rente verwendet werden. Der Wert für **Zw** (Endwert) muss nicht ausgefüllt werden. Ist F = 1, so erfolgt die Zahlung vorschüssig.

	A	B
1	Zinsen	4%
2	Barwert	€ 36.000,00
3	Jahre	25
4	Rente	=RMZ(B1;B3;B2;;1)

	A	B
1	Zinsen	4%
2	Barwert	€ 36.000,00
3	Jahre	25
4	Rente	-€ 2.215,80

1.89 Herr Sauer zahlt 20 Jahre lang jeweils am 31. Dezember einen Betrag von 1 000,00 € zu einem Zinssatz von 4 % p. a. in eine Pensionsvorsorge ein. Mit dem so ersparten Geld möchte er 25 Jahre lang eine vorschüssige Jahresrate beziehen. Dabei soll die erste Auszahlung fünf Jahre nach der letzten Einzahlung beginnen. Welchen jährlichen Betrag erhält Herr Sauer? AB

Lösung:

$E_{20} = 1\,000{,}00 \cdot \frac{104^{20} - 1}{1{,}04 - 1} = 1\,000{,}00 \cdot 29{,}778... = 29\,778{,}078...$ €
- Endwert der nachschüssigen Einzahlungen nach 20 Jahren

$E_{25} = E_{20} \cdot 1{,}04^5 = 36\,229{,}585...$ €
- Aufzinsung für weitere fünf Jahre

$36\,229{,}585... = R \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}04^{25}}}{1{,}04 - 1}$
- Die Auszahlung erfolgt vorschüssig: $B_{25} = E_{25}$

$36\,229{,}585... = R \cdot 1{,}04 \cdot 15{,}622... \Rightarrow$

$R = 2\,229{,}929...$ €

Herr Sauer erhält eine jährliche Auszahlung von rund 2 230 €.

ABC **1.90** Frau Arnold benötigt für den Finanzierungsbeitrag ihrer Mietwohnung einen Kredit von 25 000,00 €, den sie mit einer Laufzeit von 10 Jahren in nachschüssigen Jahresraten bei einem Kreditzinssatz von 5 % p. a. zurückzahlen möchte.



1) Gib die Kreditrate an und erstelle einen Tilgungsplan. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

2) Nach drei Jahren erhöht die Bank den Zinssatz auf 6,5 % p. a. Berechne, um wie viele Jahre sich die Kreditlaufzeit verlängert, wenn die Raten in derselben Höhe wie in den ersten drei Jahren weitergezahlt werden.

Lösung mit Excel 2010:

1) Der Kreditbetrag entspricht dem Barwert B_{10} einer nachschüssigen Rente. Daraus kann die Kreditrate berechnet werden.

$$25\,000{,}00\text{ €} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}05^{10}}}{1{,}05 - 1} \quad \Rightarrow \quad R = 3\,237{,}614\ldots\text{ €} \approx 3\,237{,}61\text{ €}$$

Tilgungsplan: Zinsen = Schuld · Zinssatz, Zahlung = Kreditrate,
Tilgung = Zahlung – Zinsen, Restschuld = Schuld – Tilgung

Kredit	€ 25.000,00				
Laufzeit	10		Rate	-€ 3.237,61	
Zinssatz	5%				
Jahr	Saldo zu Jahresbeginn	Zinsen	Zahlung	Tilgung	Restschuld zu Jahresende
1	€ 25.000,00	€ 1.250,00	-€ 3.237,61	-€ 1.987,61	€ 23.012,39
2	€ 23.012,39	€ 1.150,62	-€ 3.237,61	-€ 2.087,00	€ 20.925,39
3	€ 20.925,39	€ 1.046,27	-€ 3.237,61	-€ 2.191,34	€ 18.734,05
4	€ 18.734,05	€ 936,70	-€ 3.237,61	-€ 2.300,91	€ 16.433,13
5	€ 16.433,13	€ 821,66	-€ 3.237,61	-€ 2.415,96	€ 14.017,18
6	€ 14.017,18	€ 700,86	-€ 3.237,61	-€ 2.536,76	€ 11.480,42
7	€ 11.480,42	€ 574,02	-€ 3.237,61	-€ 2.663,59	€ 8.816,83
8	€ 8.816,83	€ 440,84	-€ 3.237,61	-€ 2.796,77	€ 6.020,05
9	€ 6.020,05	€ 301,00	-€ 3.237,61	-€ 2.936,61	€ 3.083,44
10	€ 3.083,44	€ 154,17	-€ 3.237,61	-€ 3.083,44	€ 0,00

2) Restschuld nach drei Jahren: 18 734,05 €

$$18\,734{,}05 = 3\,237{,}61 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}065^{n}}}{1{,}065 - 1} \quad \Rightarrow \quad n = 7{,}491\ldots \approx 8\text{ Jahre}$$

Der Kredit wäre erst ein Jahr später getilgt.

CD **1.91** ***1)*** Erkläre anhand der Grafiken von Seite 30 den Unterschied zwischen einer nachschüssigen und einer vorschüssigen Ratenzahlung.

2) Begründe die Formel für den Endwert einer vorschüssigen Rate.

3) Finde Beispiele für vorschüssige bzw. nachschüssige Zahlungen.

AB **1.92** Berechne den Barwert der Rente bei der Auszahlungsrate R, einer jährlichen Verzinsung p und der angegebenen Laufzeit n.

a) R = 1 000,00 €, am Jahresanfang ausbezahlt, p = 4 % p. a. und n = 15 Jahre

b) R = 500,00 €, am Jahresende ausbezahlt, p = 5 % p. a. und n = 35 Jahre

c) R = 150,00 €, am Monatsanfang ausbezahlt, p = 3 % p. a. und n = 5 Jahre

1.93 Berechne den Endwert der Rente bei der Einzahlungsrate R, einer jährlichen Verzinsung p und einer Laufzeit von n Jahren. Berücksichtige die KESt. AB

a) R = 300,00 €, Anfang Jänner und Anfang Juli eingezahlt, p = 2 % p. a. und n = 3

b) R = 75,00 €, am Monatsende eingezahlt, p = 3,5 % p. a. und n = 7

c) R = 12 000,00 €, am Jahresanfang eingezahlt, p = 6 % p. a. und n = 30

1.94 Ein Kredit K mit einem Zinssatz p und einer Laufzeit von n Jahren soll in vorschüssigen Jahresraten zurückgezahlt werden. Wie hoch muss die Rate sein? AB

a) K = 200 000,00 €, n = 30, p = 3 % p. a.

b) K = 10 000,00 €, n = 5, p = 7 % p. a.

c) K = 75 000,00 €, n = 20, p = 3,5 % p. a.

d) K = 5 000,00 €, n = 6, p = 6 % p. a.

1.95 Marion erbt von ihrer Großmutter 30 000,00 €, die sie zu 5,5 % p. a. anlegt. Sie will damit ihren Lebensunterhalt während ihres Studiums finanzieren, für das sie fünf Jahre kalkuliert. Berechne, wie viel Geld ihr pro Jahr zur Verfügung steht, wenn sie die Auszahlung der Rate zu Jahresbeginn vereinbart. AB

1.96 Zur Finanzierung eines Autos muss zusätzlich zum vorhandenen Bargeld noch ein Kredit von 8 000,00 € zu einem Zinssatz von 6,125 % p. a. aufgenommen werden. Die nachschüssige monatliche Rückzahlung beträgt 140,00 €. Nach drei Jahren entsteht bei einem Unfall ein Totalschaden an dem Wagen. Wie lang muss der Kredit noch gezahlt werden, obwohl das Auto nicht mehr zur Verfügung steht? AB

1.97 Becky möchte 15 000,00 € ansparen. Sie zahlt jeweils am Jahresende 1 700,00 € auf ein mit p = 3,75 % p. a. verzinstes Sparbuch ein. Wie lang muss sie einzahlen? AB

1.98 Oskar zahlt sieben Jahre lang am Ende jedes Quartals 350,00 € auf ein mit 5,125 % p. a. verzinstes Sparbuch ein. Nach dieser Zeit begibt er sich auf eine zweijährige Weltreise und lässt das Sparbuch sperren. Welcher Betrag steht ihm bei seiner Rückkehr zur Verfügung? AB

1.99 Georg zahlt jährlich 2 500,00 € vorschüssig auf ein mit 4 % verzinstes Sparkonto ein, Uschi zahlt denselben Betrag unter den gleichen Bedingungen nachschüssig ein. ABD

1) Erkläre anhand der Summenformeln, wie groß der Unterschied der Endwerte ist.

2) Berechne, welchen Betrag Uschi einzahlen müsste, wenn beide nach 20 Jahren über die gleiche Summe verfügen wollen.

3) Berechne, wie viel Georg als Einmalzahlung leisten müsste, um nach 10 Jahren denselben Betrag zu erhalten wie bei der Ratenzahlung.

1.100 Noemi nimmt für ihre Wohnung einen nachschüssigen Kredit von 18 000,00 € zu einem Zinssatz von p_1 = 7,5 % p. a. über eine Laufzeit von zehn Jahren auf. ABC TE

1) Gib die Kreditrate an und erstelle einen Tilgungsplan.

2) Aufgrund der Wirtschaftslage sinkt der Zinssatz nach 5 Jahren auf p_2 = 5 % p. a. Wie hoch ist nun die jährliche Rate?

1.101 Kaufen oder mieten? Diese Frage stellt sich Frau Vogl, die ihre geförderte Mietwohnung für 105 000,00 € kaufen könnte. Dafür benötigt sie einen Kredit mit einem Zinssatz von p = 5,5 % p. a. und einer Laufzeit von 20 Jahren. Die Kreditrate wäre ebenso wie die Miete von 650,00 € im Monat jeweils am Monatsanfang zu zahlen. Sie plant, noch 20 Jahre in dieser Wohnung zu leben. Soll sie die Wohnung kaufen? Begründe die Antwort durch entsprechende Berechnungen. ABD

Weitere Aufgaben im Zusatzheft für Wirtschaftsingenieurwesen

Unendliche Folgen und Reihen

Zusammenfassung

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ kann **rekursiv** oder mithilfe eines **erzeugenden Terms** angegeben werden.

Arithmetische Folge: $a_{n+1} = a_n + d$ bzw. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Summe s_n einer **endlichen arithmetischen Reihe:** $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Geometrische Folge: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ bzw. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Summe s_n einer **endlichen geometrischen Reihe:** $s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **monoton steigend**, wenn für alle Folgeglieder gilt: $a_n \leqslant a_{n+1}$
Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **monoton fallend**, wenn für alle Folgeglieder gilt: $a_n \geqslant a_{n+1}$

Jede nach oben beschränkte Folge hat ein **Supremum**, eine kleinste obere Schranke.
Jede nach unten beschränkte Folge hat ein **Infimum**, eine größte untere Schranke.

Eine reelle Zahl g wird **Grenzwert** oder **Limes** einer Folge $\langle a_n \rangle$ genannt, wenn in jeder ε-Umgebung von g fast alle Glieder der Folge liegen, man schreibt: $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = g$
Hat eine Folge einen Grenzwert, wird sie **konvergent** genannt, andernfalls nennt man sie **divergent**.

Grenzwertsätze

- $\lim\limits_{n \to \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim\limits_{n \to \infty} (a_n)$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (a_n) \pm \lim\limits_{n \to \infty} (b_n)$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n \to \infty} (b_n)$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} (a_n)}{\lim\limits_{n \to \infty} (b_n)}$ mit $b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n) \neq 0$

Eine **unendliche Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Folge der Partialsummen $\langle s_n \rangle$. Sie konvergiert, wenn der Grenzwert der Partialsummenfolge existiert.

Summe S einer **unendlichen geometrischen Reihe**: $S = \frac{b_1}{1 - q}$ für $|q| < 1$

Eine **Differenzengleichungen** ist eine Gleichung, in der die Differenz $\Delta y(t)$ vorkommt:
$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$, $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Lösung einer Differenzengleichung ist jede **Folge**, die die Gleichung erfüllt.

Rentenrechnung:

Endwert einer **nachschüssigen Rente**

$E = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Endwert einer **vorschüssigen Rente**

$E = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Barwert einer **nachschüssigen Rente**

$B = \frac{E}{q^n} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1}$

Barwert einer **vorschüssigen Rente**

$B = \frac{E}{q^n} = R \cdot q \cdot \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1}$

R ... Rate (Rente), q ... Aufzinsungsfaktor, n ... Anzahl der Rentenperioden

Weitere Aufgaben

1.102 Gib jeweils das Bildungsgesetz der endlichen Folge mit eigenen Worten an. A

a) $\langle 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 4 \rangle$ **b)** $\langle 8, 3, 1, 5, 9, 0, 6, 7, 4, 2 \rangle$

Aufgaben 1.103 – 1.104: Beantworte jeweils die folgenden Fragen.

1) Wie lauten die ersten fünf Glieder der Folge?
2) Welche Art von Monotonie liegt gegebenenfalls vor?
3) Welchen Wert hat das Infimum bzw. Supremum, falls es existiert?

1.103 **a)** $a_n = \frac{1}{4n-7}$ **b)** $a_n = 2^n \cdot (-1)^{n+1}$ **c)** $a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **d)** $a_n = \ln(n)$ BC

1.104 **a)** $a_{n+1} = a_n - 0{,}2;\ a_1 = 5$ **b)** $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n;\ a_1 = 0,\ a_2 = 1$ BC

1.105 Berechne den Grenzwert der Folge. B

a) $a_n = \frac{1-n+5n^4}{2n^2-10}$ **b)** $a_n = \frac{(4n+7)^3}{2n^3+n-8}$ **c)** $a_n = \frac{(3n-1)\cdot(3n+1)}{(n+3)\cdot(n-3)}$

1.106 Berechne die ersten zehn Glieder der Folge $a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ für **1)** c = 4 und **2)** c = 2 mit $a_1 = 1$. Welchen Grenzwert vermutest du? Wähle $a_1 \neq 1$ beliebig und führe die Berechnung erneut durch. Was fällt dir auf? BCD TE

1.107 Berechne die Summe der gegebenen unendlichen geometrischen Reihe. AB

a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sqrt{3} - 1 + \ldots$ **b)** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{5}{3} + \frac{1}{15} + \ldots$ **c)** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a + \frac{a^3}{b^2+1} + \ldots$

1.108 Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist 925, die Partialsumme s_3 hat den Wert 917,6. Berechne s_7. AB

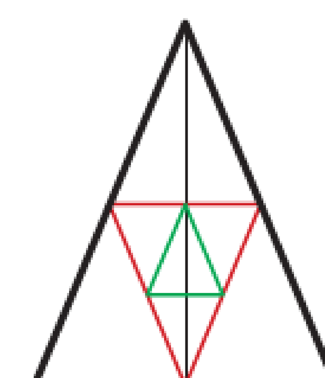
1.109 Ein Grund soll für 20 Jahre verpachtet werden. ABC
Angebot 1: Ein Betrag von 20 000,00 € wird sofort bezahlt.
Angebot 2: Der Pachtzins wird jährlich nachschüssig gezahlt. Er beträgt im 1. Jahr 800,00 € und wird zur Inflationsabdeckung mit q = 1,05 aufgezinst.
Argumentiere, für welches Angebot man sich entscheiden sollte.

1.110 Herr Macheiner wollte sich eine neue Küche kaufen, dafür benötigte er 10 000,00 €. Ein Viertel davon hatte er bereits gespart und auf ein Sparbuch mit einem fixen Zinssatz von p = 3,75 % p. a. gelegt. Er zahlte nun drei Jahre lang vorschüssig jeden Monat einen gleich bleibenden Betrag auf dieses Sparbuch ein, bis die benötigte Summe erreicht war. Zwei Jahre danach hat er seine Wunschküche endlich gefunden.
Wie hoch war die monatliche Einzahlung? Welcher Betrag stand ihm für den Kauf der Küche zur Verfügung? AB

1.111 Ermittle die ersten 5 Glieder der Lösungsfolge und stelle sie grafisch dar. Interpretiere das Ergebnis. BC TE
a) $y(t+1) = 1{,}2 \cdot y(t) - 3,\ y(0) = 2$ **b)** $y(t+1) = 0{,}4 \cdot (4 - y(t)),\ y(0) = 6$

1.112 In einen Kreis mit dem Radius r = 100 mm wird ein Kreis eingeschrieben, dessen Durchmesser dem Radius des ersten Kreises entspricht. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt. Berechne den Flächeninhalt **a)** der ersten vier Kreise. **b)** aller Kreise. AB

1.113 Einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis c_1 = 10 cm und dem Schenkel a_1 = 26 cm wird ein ähnliches Dreieck „verkehrt herum“ eingeschrieben, sodass die Basis c_2 parallel zu c_1 ist, usw. Berechne die Summe der Umfänge **a)** der ersten zehn Dreiecke. **b)** aller Dreiecke. AB

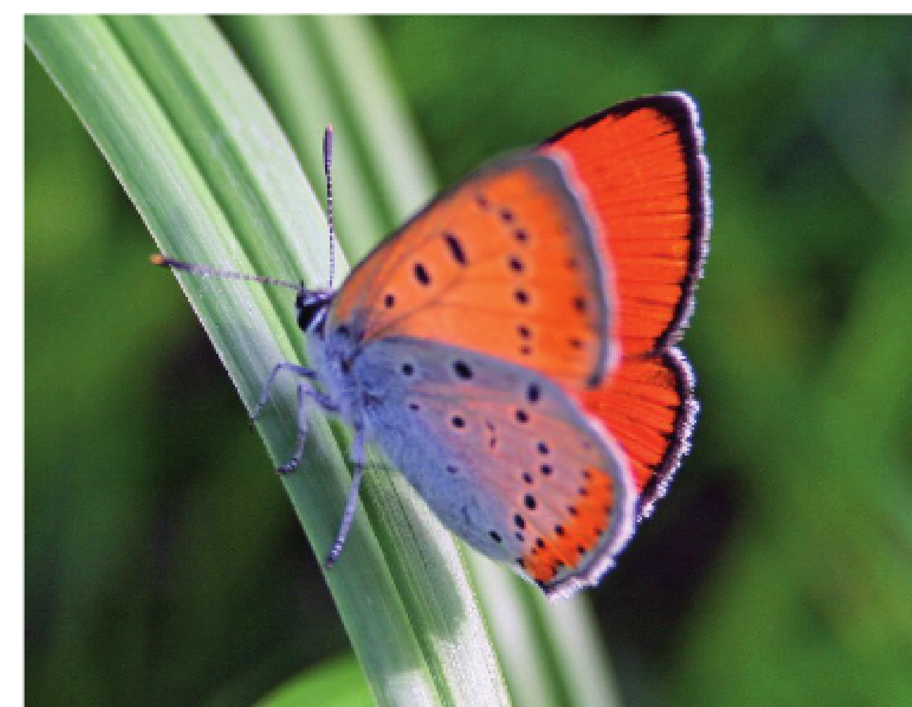


AB **1.114** Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Die Höhe dieses Dreiecks ist die Seitenlänge eines zweiten, kleineren Dreiecks, dessen Höhe die Seite eines dritten Dreiecks ist, usw. Berechne die Summe der Flächeninhalte

a) der ersten drei Dreiecke. ***b)*** aller Dreiecke.

AB 

1.115 Ein Schmetterlingsweibchen legt jährlich 100 Eier, von denen sich die Hälfte wieder zu Weibchen entwickelt, von denen jedes wieder jährlich 100 Eier legt, usw.



1) Gib die Differenzengleichung für die Anzahl der Schmetterlingsweibchen an und löse sie.

2) Stelle die Entwicklung der Anzahl der Weibchen grafisch dar.

3) Das Schmetterlingsweibchen und alle seine Nachfahren haben eine Flügelfläche von 10 cm². Wann würden – unter der Annahme, dass keine gestorben sind – alle weiblichen Nachkommen die Landfläche der Erde ($A \approx 148{,}9 \cdot 10^6$ km²) bedecken?

4) Nimm an, dass jährlich 25 Schmetterlingsweibchen sterben. Gib die Differenzengleichung an und stelle die Lösung grafisch dar.

D **1.116** Zeige für die geometrische Folge $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ die Gültigkeit der folgenden Aussagen.

1) Die Folge divergiert für $q > 1$.

2) Die Folge konvergiert für $q = 1$ gegen den Grenzwert $g = b_1$ und für $q = 0$ gegen $g = 0$.

3) Die Folge konvergiert für $|q| < 1$ gegen den Grenzwert $g = 0$.

D **1.117** Zeige die Gültigkeit der Aussage mithilfe der vollständigen Induktion. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Aufgaben in englischer Sprache

annuity	Rente	monotonicity	Monotonie
arithmetic series	arithmetische Reihe	monotonically	monoton
convergent	konvergent	increasing/decreasing	wachsend/fallend
divergent	divergent	present value	Barwert
final (future) value	Endwert	rate of interest	Zinssatz
finite series	endliche Reihe	recursive	rekursiv
geometric series	geometrische Reihe	sequence	Folge
infinite series	unendliche Reihe	series	Reihe
limit/limit value	Grenzwert	sum	Summe

AB **1.118** Given is the sequence $\left\langle \frac{2n^2 + n - 3}{4n^2 - 5} \right\rangle$. Write down the first four terms. Is the sequence monotonically increasing or decreasing? What is the limit of the sequence?

AB **1.119** The first term of a geometric sequence is 3, the second is 1. Calculate the sum of the infinite geometric series.

AB **1.120** A grandfather pays £ 500,00 into a savings account at the beginning of each year. He started in the year of the first birthday of his granddaughter and will cease in the year of her 16th birthday. Calculate the future value if the rate of interest is 3,5 %.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann eine Folge in rekursiver Darstellung und durch einen erzeugenden Term angeben und je ein Beispiel nennen.	
2	Berechne die ersten vier Glieder der Folge $\langle 1 - \frac{1}{n} \rangle$. Ist diese Folge monoton steigend oder fallend? Begründe deine Antwort.	
3	Ich kenne den Unterschied zwischen einer konvergenten und einer divergenten Folge. Ergänze folgende Sätze. A) Die Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ ist ... C) Die Folge $\langle \frac{3n^2}{n^3 + 1} \rangle$ ist ... B) Die Folge $\langle \frac{n^2}{n + 1} \rangle$ ist ... D) Die Folge $\langle \sin(n \cdot \pi) \rangle$ ist ...	
4	Ergänze: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3n^2}{n^3 + 1} \right) = 0$, da ...	
5	Sind folgende Aussagen jeweils richtig oder falsch? Begründe deine Antworten. A) Eine endliche Reihe hat immer eine Summe. B) Jede unendliche Reihe ist divergent. C) Eine unendliche Reihe konvergiert, wenn die Partialsummenfolge konvergiert. D) Eine monoton steigende Folge ist immer divergent. E) Die unendliche geometrische Reihe ist für $q > 1$ konvergent.	
6	Ich kann die Summe der unendlichen geometrischen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ berechnen.	
7	Ich kann das Prinzip der vollständigen Induktion erklären.	
8	Ergänze: A) Ist der Zuwachs einer Population von einem Zeitpunkt zum nächsten konstant, so ist die Lösung der Differenzengleichung eine … Folge. B) Ist der Zuwachs einer Population von einem Zeitpunkt zum nächsten proportional zum Bestand, so ist die Lösung der Differenzengleichung eine … Folge.	
9	Ich kann die Begriffe Rente, Endwert und Barwert erklären.	
10	Jemand zahlt fünf Jahre lang zu Jahresbeginn 1 000,00 € auf ein Sparbuch ein. Ist der Betrag auf dem Sparbuch am Ende des fünften Jahres höher oder niedriger als bei einer nachschüssigen Einzahlung? Begründe deine Antwort.	

Lösung:

1) siehe Seiten 5ff, zB: $a_{n+1} = a_n + 3$; $a_n = 2n$ 2) $\langle 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \rangle$; monoton steigend: $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow n + 1 > n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ 3) siehe Seiten 11f; A), C) konvergent, B), D) divergent

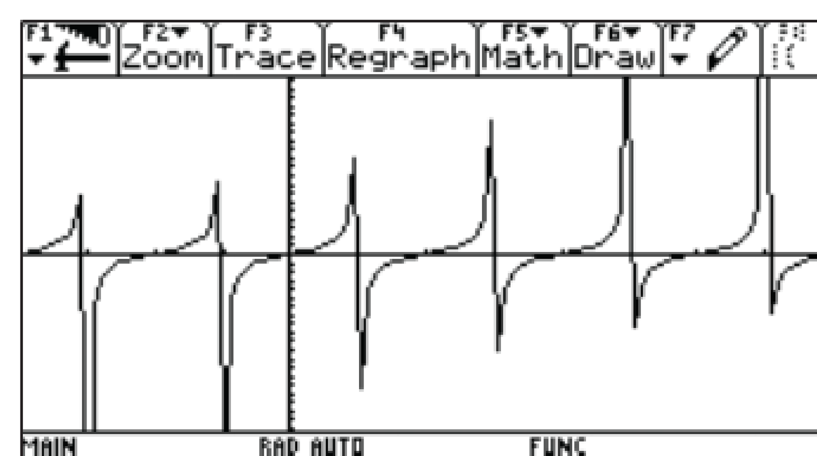
4) der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist als jener des Nennerpolynoms.

5) A) richtig, endlich viele Zahlen können addiert werden; B) falsch, zB geometrische Reihe mit $q < 1$; C) richtig, laut Definition; D) falsch, zB $\langle 1 - \frac{1}{n} \rangle$; E) falsch, $|q| < 1$ 6) $S = \frac{1}{2}$ 7) siehe Seite 16

8) A) arithmetische, B) geometrische 9) siehe Seite 30 10) Höher, da auch die letzte Einzahlung verzinst wird.

2 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Der Technologieeinsatz im Mathematikunterricht des 21. Jahrhunderts erleichtert viele Berechnungen, die vor wenigen Jahren noch unter großem Zeitaufwand händisch durchgeführt werden mussten. Heute gibt es viele Möglichkeiten, Funktionen grafisch darzustellen. Die grafische Darstellung verleitet zu der Annahme, dass man den Verlauf und die Eigenschaften von Funktionen nur anhand des Graphen ablesen kann.



Darstellung der Tangens-Funktion, ausgegeben von einer Mathematik-Software

Das ist jedoch nur bis zu einem gewissen Grad richtig, da vor allem an „kritischen" Stellen einer Funktion die grafische Umsetzung oft mangelhaft ist. Daher können wichtige Eigenschaften nur durch präzise mathematische Untersuchungen erfasst werden. Zwei in diesem Zusammenhang wichtige Begriffe, nämlich der **Grenzwert** und die **Stetigkeit** von Funktionen, werden in diesem Abschnitt nun besprochen.

2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$

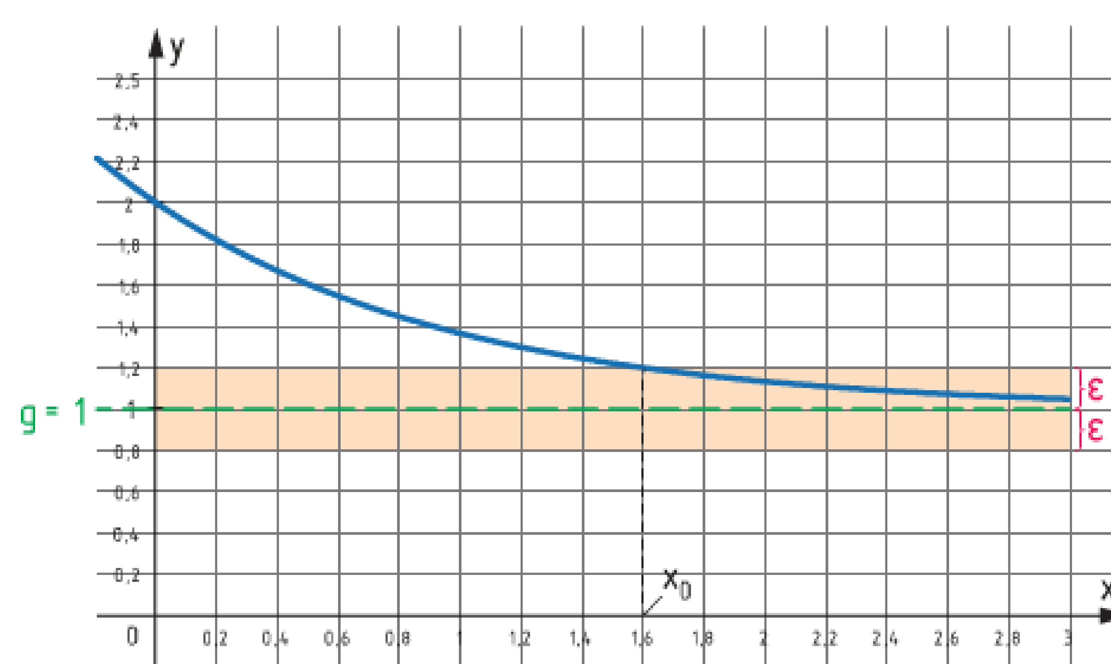
ACD **2.1** Ein Getränk wird mit einer Temperatur von 7 °C aus dem Kühlschrank genommen und in einen Raum mit einer Temperatur von 25 °C gestellt.

1) Welche Temperatur wird deiner Meinung nach das Getränk nach sehr langer Zeit haben, wenn es niemand trinkt?

2) Nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz gilt für die Temperatur ϑ in °C des Getränks: $\vartheta(t) = 25\,°C - 18\,°C \cdot e^{-\frac{0,8}{h} \cdot t}$ t … Zeit in Stunden
Versuche eine mathematische Begründung zu geben, warum die Funktionswerte die Temperatur von 25 °C nicht übersteigen.

Wir haben in Band 2 bereits Funktionen kennengelernt, deren langfristiges Verhalten intuitiv erkennbar war. Um dieses Verhalten auch mathematisch korrekt beschreiben zu können, benötigt man den Begriff des **Grenzwerts einer Funktion** für $x \to \infty$, also $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Stellt man zum Beispiel die Funktion $y = 1 + e^{-x}$ grafisch dar, so kann man vermuten, dass sich die Funktionswerte für $x \to \infty$ dem Wert 1 nähern. Wie den Grenzwert einer Folge kann man auch den Grenzwert einer Funktion mithilfe der ε-Umgebung beschreiben. Zeichnet man symmetrisch um den vermuteten Grenzwert g = 1 einen Streifen der Breite 2ε, so kann man eine Stelle x_0 angeben, ab der alle Funktionswerte in diesem Streifen liegen.
Es gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + e^{-x}) = 1$



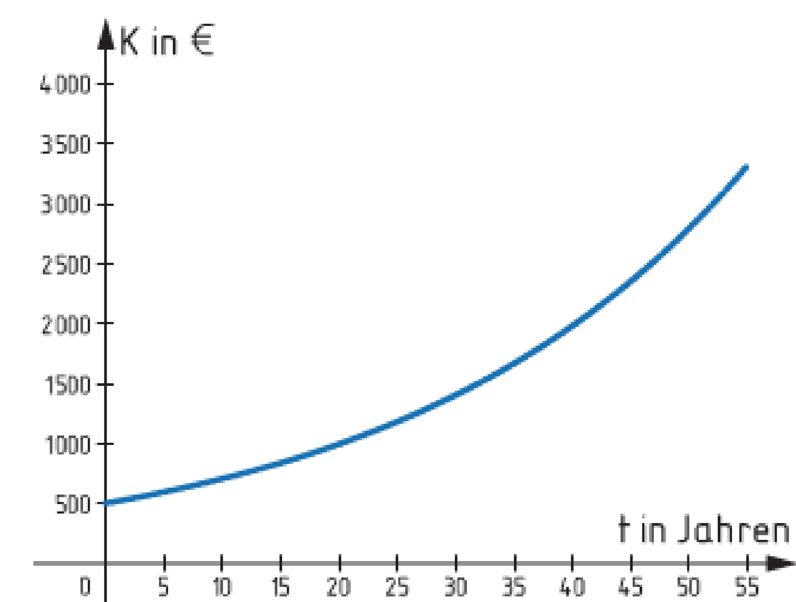
Das Verhalten einer Funktion kann auch für $x \to -\infty$ untersucht werden. Der Ausdruck $x \to \pm\infty$ bedeutet, dass beide Grenzwerte gebildet werden.

> Der **Grenzwert g einer Funktion** f(x) für $x \to +\infty$ existiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle x_0 gibt, sodass für alle $x > x_0$ stets $|f(x) - g| < \varepsilon$ gilt.
> Man schreibt: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = g$
>
> Ist $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, so spricht man von einem **uneigentlichen Grenzwert**.
>
> Der Grenzwert für $x \to -\infty$ ist analog definiert.

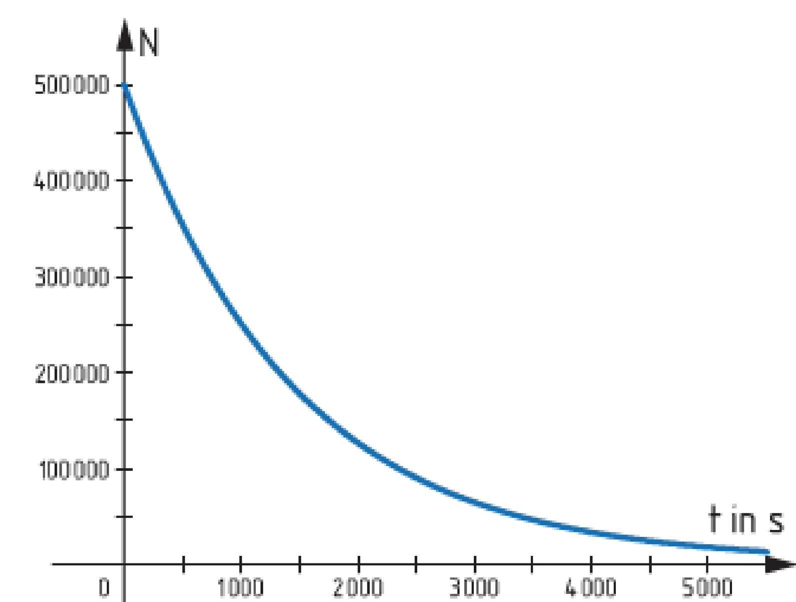
Grenzwerte von Exponentialfunktionen

In Band 2 wurden bereits verschiedene, meist zeitabhängige Wachstums- und Zerfallsprozesse mithilfe von Exponentialfunktionen beschrieben.

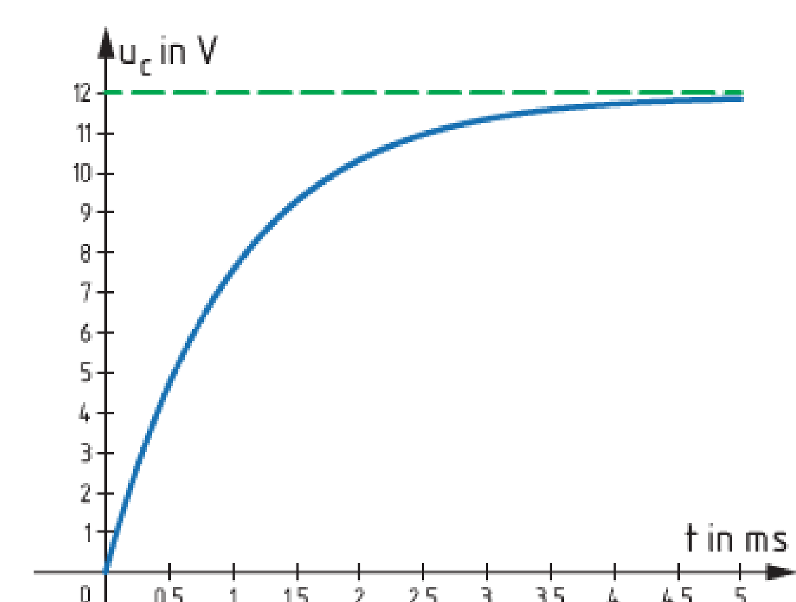
- Wird ein Kapital $K_0 = 500{,}00$ € zu einem Zinssatz von 3,5 % p. a. verzinst, ohne dass weitere Kontobewegungen stattfinden, so wächst das Kapital ständig an. Es handelt sich daher um **exponentielles Wachstum**. Es gilt:
  $K(t) = 500 \cdot 1{,}035^t$
  $\lim\limits_{t \to \infty}(500 \cdot 1{,}035^t) = \infty$
  Dieses Modell kann die Realität aber nur innerhalb gewisser Grenzen korrekt beschreiben, auf lange Sicht hin ist es ungeeignet.



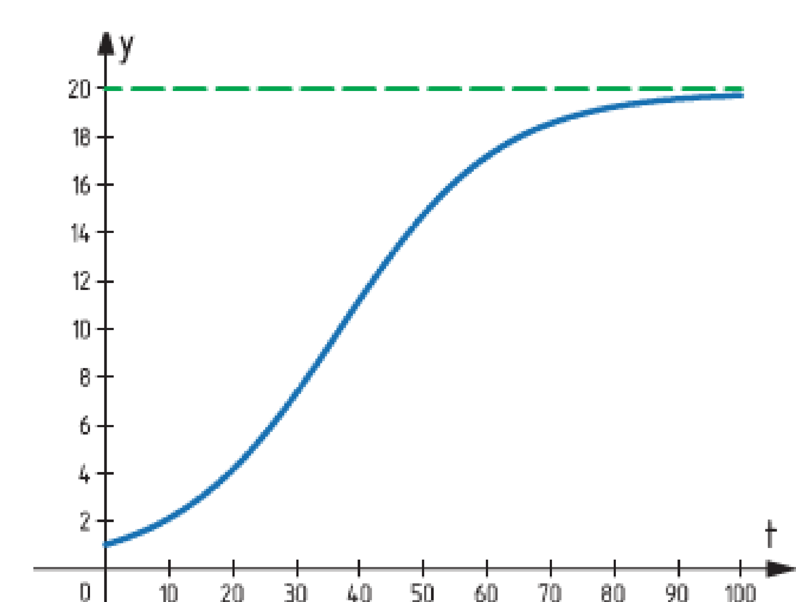
- Der radioaktive **Zerfall** ist gekennzeichnet durch eine ständige Abnahme der Anzahl der Kerne eines Isotops. Die Anzahl der Kerne N wird immer kleiner, aber nie negativ. Die Funktionswerte nähern sich also dem Wert 0. Zum Beispiel gilt für 500 000 Kerne eines Isotops mit der Halbwertszeit $\tau = 1\,000$ s:
  $N(t) = 500\,000 \cdot e^{\frac{-0{,}000693}{s} \cdot t}$
  $\lim\limits_{t \to \infty}\left(500\,000 \cdot e^{\frac{-0{,}000693}{s} \cdot t}\right) = 0$



- Bei **Sättigungsvorgängen** wie zum Beispiel dem Aufladen eines Kondensators nähern sich die Funktionswerte einem konstanten Endwert.
  $u_c(t) = 12\text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{ms}}\right)$
  $\lim\limits_{t \to \infty}\left(12\text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{ms}}\right)\right) = 12\text{ V}$
  u_c nähert sich für $t \to \infty$ dem Wert 12 V, da $\lim\limits_{t \to \infty}(e^{-t}) = 0$ gilt.

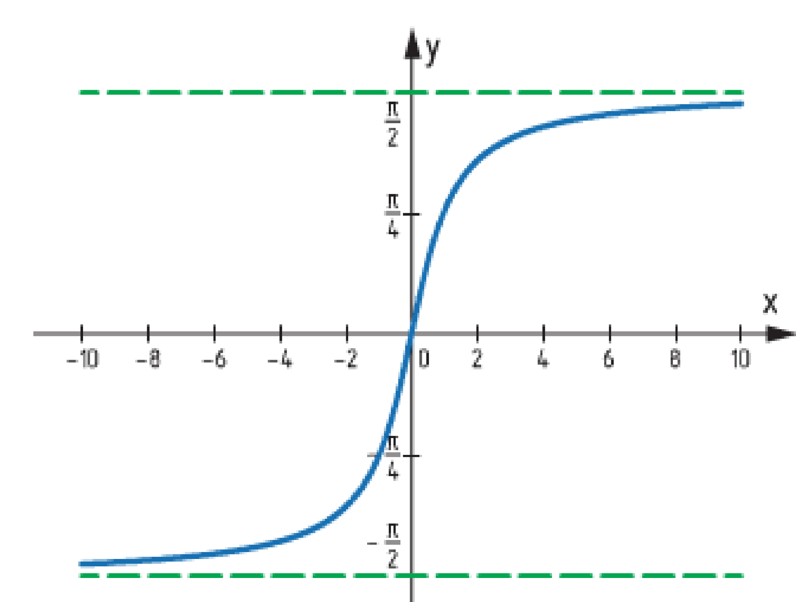


- Bei **logistischem Wachstum** mit der Kapazitätsgrenze K nähern sich die Funktionswerte dieser Grenze.
  Zum Beispiel gilt für K = 20:
  $y = \frac{20}{1 + 19 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}}$
  $\lim\limits_{t \to \infty}\left(\frac{20}{1 + 19 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}}\right) = 20$



Viele Funktionen haben für $x \to +\infty$ nicht den gleichen Grenzwert wie für $x \to -\infty$.
ZB: $y = \arctan(x)$
Anhand des Einheitskreises kann man überprüfen, dass gilt:

$$\lim_{x \to -\infty}(\arctan(x)) = -\frac{\pi}{2} \text{ und } \lim_{x \to +\infty}(\arctan(x)) = +\frac{\pi}{2}$$



In den oben beschriebenen Fällen nähert sich der Funktionsgraph einer Geraden, der so genannten **Asymptote**.

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Grenzwerte von gebrochen rationalen Funktionen

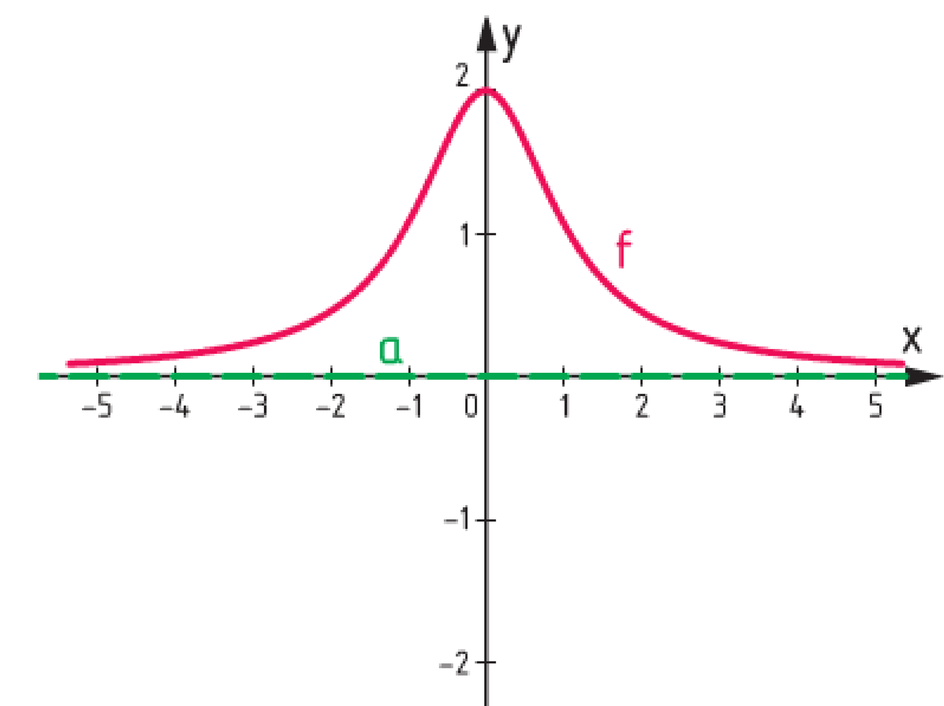
Bildet man den Quotienten zweier Polynomfunktionen g(x) und h(x), erhält man eine **gebrochen rationale Funktion** $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Der Grenzwert von f(x) für $x \to \pm\infty$ hängt vom Grad der Polynome im Zähler und im Nenner ab (siehe Abschnitt 1.2.3).

- Der Grad des **Zählerpolynoms** ist **kleiner** als der Grad des **Nennerpolynoms**.

  ZB: $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$

  Es gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2}{x^2 + 1}\right) = 0$

  Die Funktionswerte nähern sich dem Grenzwert 0, der Graph nähert sich der Asymptote a: y = 0.

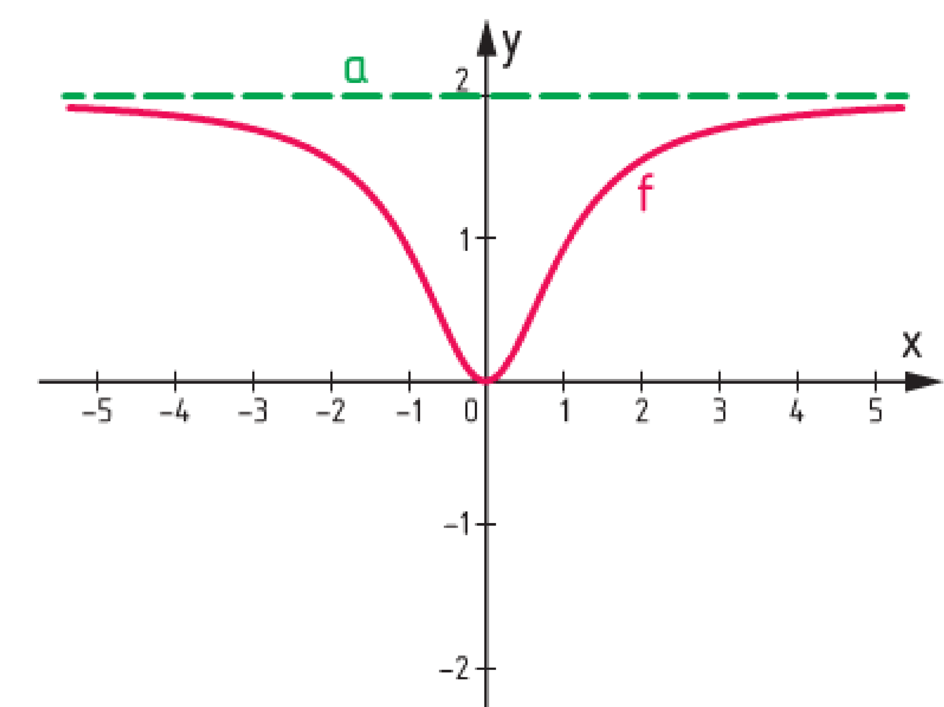


- Der Grad des **Zählerpolynoms** und der Grad des **Nennerpolynoms** sind **gleich groß**.

  ZB: $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

  Es gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2 + 1}\right) = 2$

  Die Gleichung der Asymptote lautet a: y = 2.



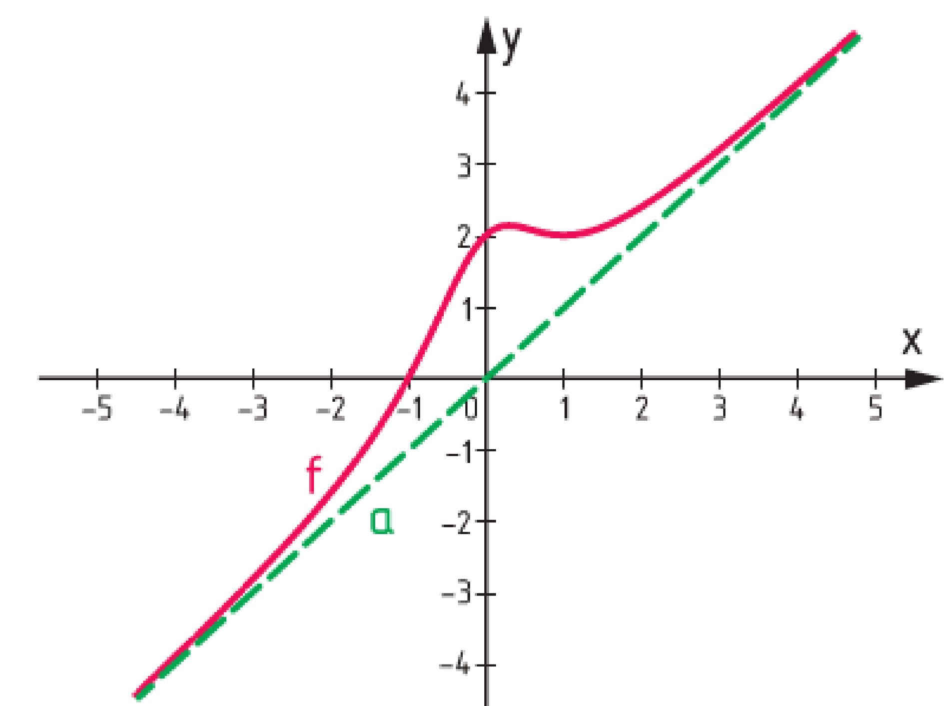
- Der Grad des **Zählerpolynoms** ist **um 1 größer** als der Grad des **Nennerpolynoms**.

  ZB: $f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 1}$

  Es gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 1}\right) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 1}\right) = -\infty$

  Die Gleichung der Asymptote erhält man zum Beispiel mithilfe einer Polynomdivision:

  $$(x^3 + x + 2) : (x^2 + 1) = x + \underbrace{\frac{2}{x^2 + 1}}_{\to 0 \quad \text{für } x \to \pm\infty} \Rightarrow a : y = x$$

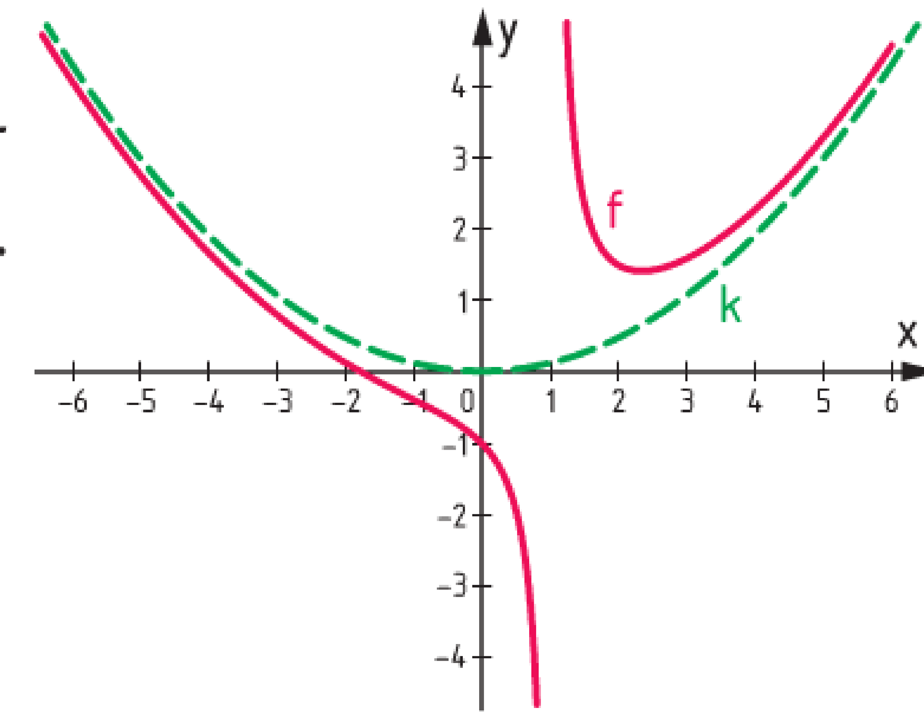


Allgemein versteht man unter einer **Asymptote** eine **Gerade**, der sich ein **Funktionsgraph nähert**. Anders formuliert kann man sagen, dass der „Abstand“ zwischen dem Graphen der Funktion und der Asymptote immer geringer wird und gegen 0 geht.

Die **Berechnungen von Grenzwerten** liefern nun das mathematische „Rüstzeug“, um anhand einer Zeichnung geäußerte Vermutungen präzise zu erfassen. Die mathematische Definition einer Asymptote lautet:

> Eine Gerade a = a(x) ist eine **Asymptote** der Funktion y = f(x), wenn gilt:
>
> $\lim\limits_{x \to -\infty} |f(x) - a(x)| = 0$ bzw. $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - a(x)| = 0$
>
> Die Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion ist abhängig vom Grad des Zähler- und des Nennerpolynoms.

Wenn der Grad des Zählerpolynoms um mehr als 1 größer als der Grad des Nennerpolynoms ist, nähert sich der Funktionsgraph für $x \to \pm\infty$ einer nichtlinearen Kurve, der so genannten **Grenzkurve**. Die Definition der Asymptote gilt sinngemäß auch für die Grenzkurve, sie wird in der Literatur deshalb auch oft als Asymptote bezeichnet. Die Gleichung einer Grenzkurve k kann ebenfalls mithilfe einer Polynomdivision ermittelt werden.



ZB: $y = \frac{x^3 - x^2 + 8}{8x - 8}$

$(x^3 - x^2 + 8) : (8x - 8) = \frac{1}{8} \cdot x^2 + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to 0 \quad \text{für } x \to \pm\infty}$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$

Gleichung der Grenzkurve k: $y = \frac{1}{8} \cdot x^2$

- Die Grenzkurve ist eine Parabel.

Die Funktion $y = \frac{x^3 - x^2 + 8}{8x - 8}$ zeigt ein für viele gebrochen rationale Funktionen typisches Verhalten. Sie ist an einer Stelle unterbrochen, da die Division durch null nicht sinnvoll ist und daher die Nullstellen des Nennerpolynoms h(x) aus der Definitionsmenge D_f ausgenommen werden müssen. Das Verhalten von gebrochen rationalen Funktion an solchen Stellen wird in Abschnitt 2.3 genauer besprochen.

Auch für Funktionen gelten die aus Abschnitt 1 bekannten **Grenzwertsätze**.

Grenzwertsätze

Existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$, so gilt:

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) + \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x)}$ mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) \neq 0$

2.2 Ordne den Funktionen jeweils die richtige Aussage über deren Verhalten für $x \to \infty$ zu. Begründe deine Entscheidungen. **BCD**

1) $y = \frac{4x^2 + x}{2x^2 - 10}$ ***2)*** $y = \sin(x)$ ***3)*** $y = 3x - 1$ ***4)*** $y = \frac{10}{e^{-0,05 \cdot x}}$

A: Der Grenzwert existiert.
B: Die Funktion hat einen uneigentlichen Grenzwert.
C: Der Grenzwert existiert nicht.

Lösung:

1) A; der Grenzwert existiert, da der Grad des Zähler- und des Nennerpolynoms gleich sind.

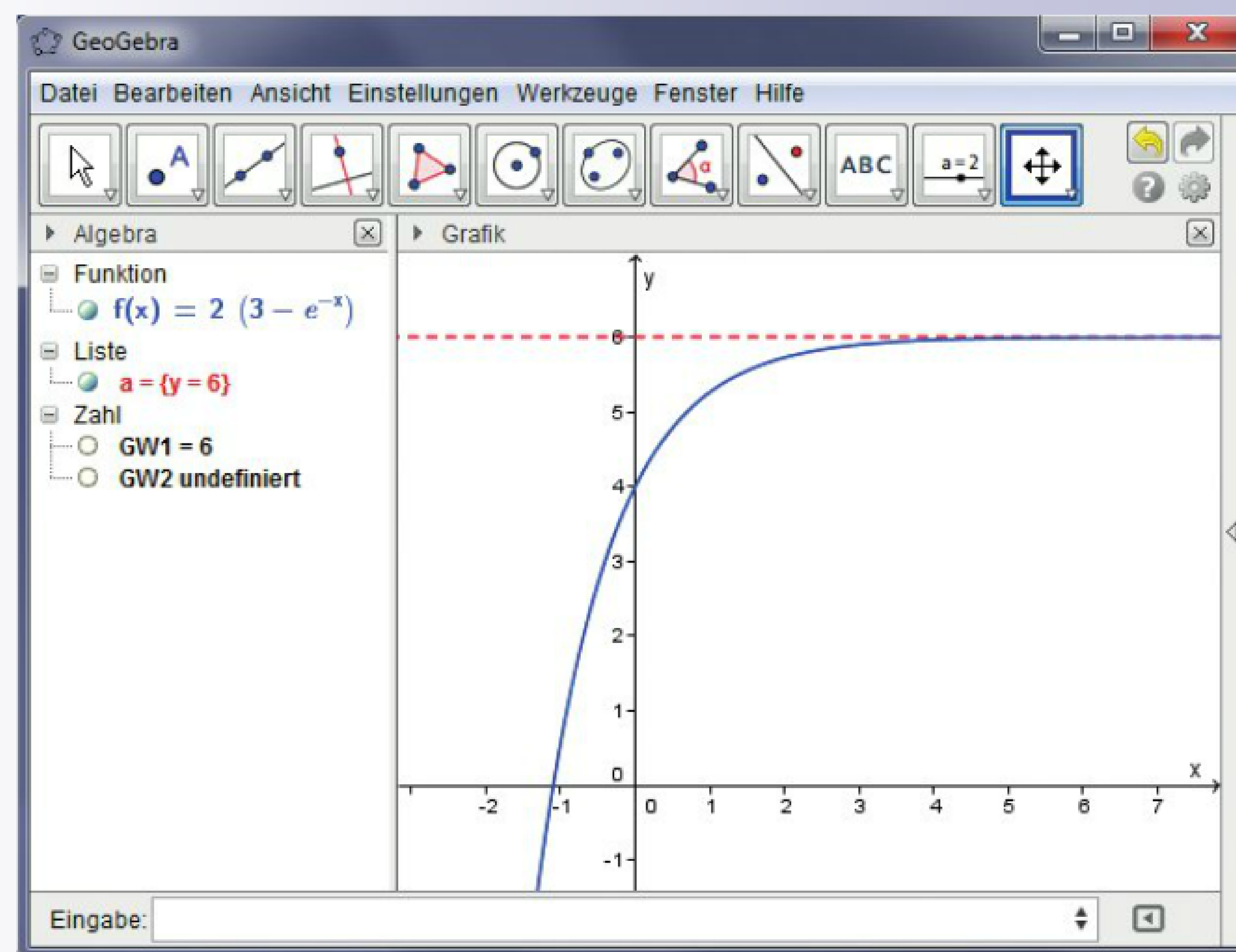
2) C; es existiert kein Grenzwert, da die Sinusfunktion eine periodische Funktion ist.

3) B; die Funktion hat einen uneigentlichen Grenzwert, da $\lim\limits_{x \to \infty} (3x - 1) = 3 \cdot \infty - 1 = \infty$ gilt.

4) B; die Funktion hat einen uneigentlichen Grenzwert, da $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{-0,05 \cdot x}) = 0$ gilt.

BCD **2.3** Stelle die Funktion $f(x) = 2 \cdot (3 - e^{-x})$ grafisch dar. Bestimme die Grenzwerte der Funktion für $x \to \pm\infty$ und gib die Gleichung der Asymptote an. Begründe und beschreibe die Ergebnisse.

Lösung mit GeoGebra:



- Die Grenzwerte werden mithilfe des Befehls **Grenzwert** ermittelt:
  GW1=Grenzwert[f,∞]
  GW2=Grenzwert[f, −∞]
- Die Gleichung und die Darstellung der Asymptote erhält man mithilfe des Befehls **Asymptote**:
  a=Asymptote[f]

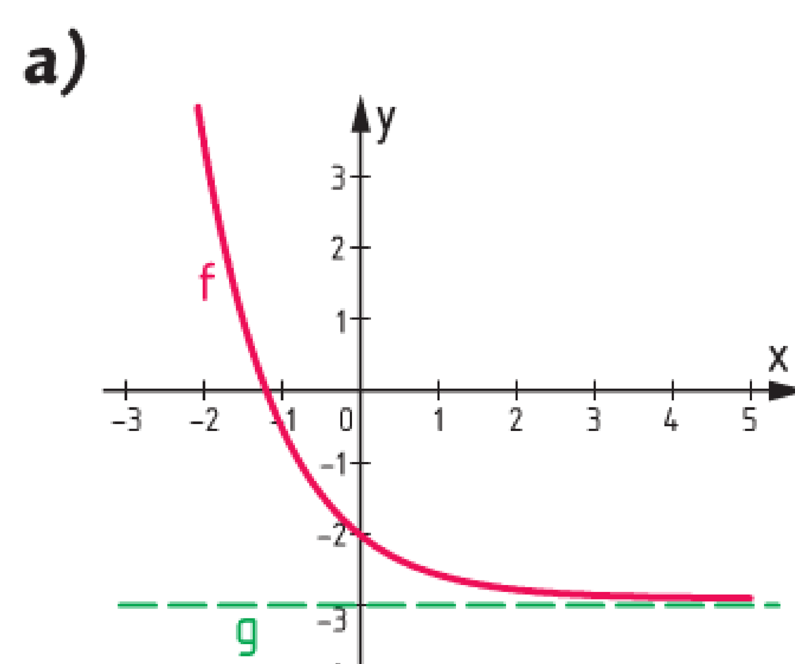
$\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 \cdot \left(3 - e^{-x}\right)\right) = 6$; für $x \to \infty$ geht e^{-x} gegen 0.

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 \cdot \left(3 - e^{-x}\right)\right) = -\infty$; für $x \to -\infty$ geht e^{-x} gegen ∞.

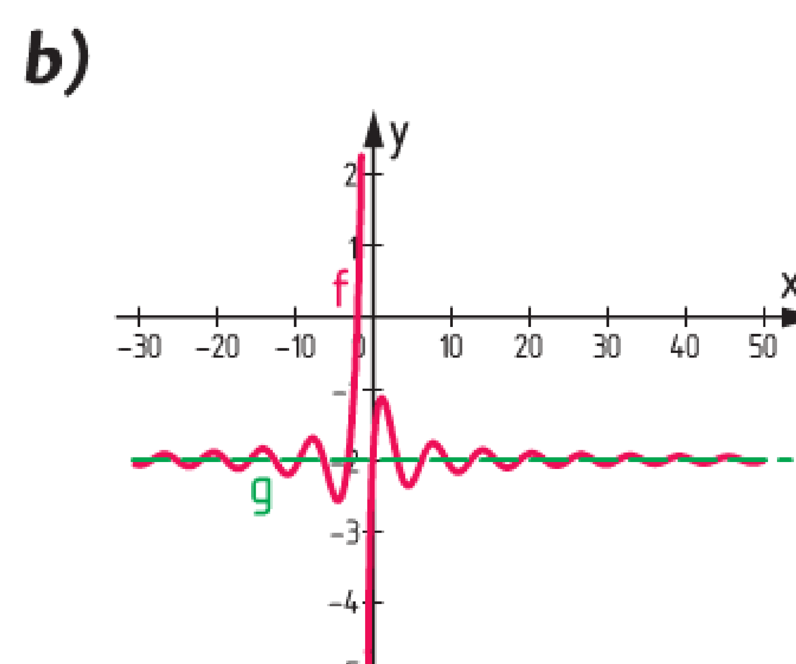
Asymptote a: $y = 6$
Der Funktionsgraph nähert sich immer mehr der Geraden a, wenn x immer größer wird. Wird x immer kleiner, werden auch die Funktionswerte unbegrenzt kleiner.

C **2.4** Ist die Gerade g eine Asymptote der Funktion f für $x \to \infty$? Formuliere deine Überlegungen mit eigenen Worten.

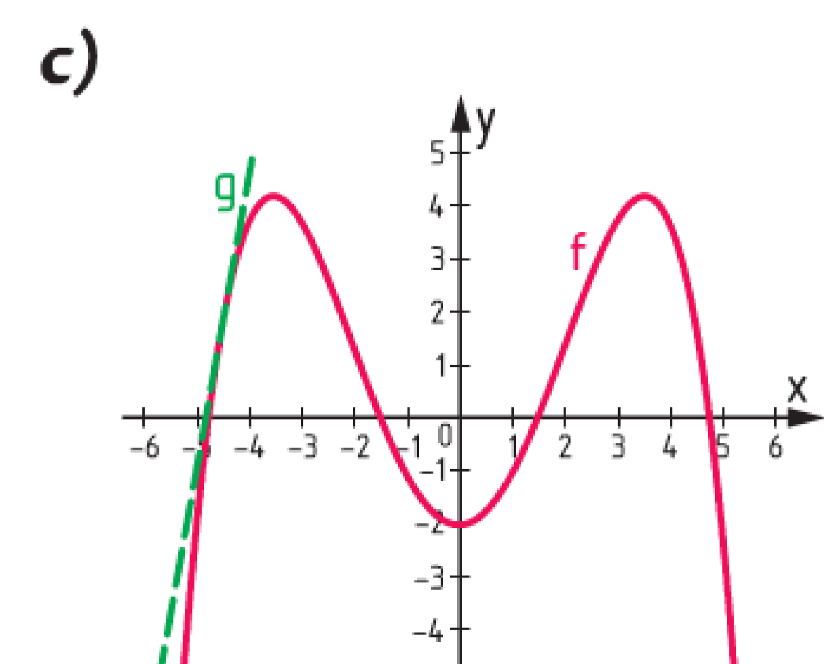
a)



b)



c)



A **2.5** Gib die Gleichung einer Funktion an, die folgende Asymptote hat.
a) $x = 0$ **b)** $y = 0$ **c)** $x = 5$ **d)** $y = -3$

Aufgaben 2.6 – 2.7: Gib die Gleichungen der Asymptoten an und überprüfe das Ergebnis jeweils durch eine geeignete Zeichnung.

B **2.6** **a)** $f(x) = \frac{3x^3}{x^4 + 1}$ **b)** $f(x) = \frac{4x^3 - x + 2}{2x - 1}$ **c)** $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 2}$ **d)** $f(x) = \frac{x^2}{x - 3}$

B **2.7** **a)** $f(x) = \frac{4}{2 - e^{-x}}$ **b)** $f(x) = (1 - e^{-x})^2$ **c)** $f(x) = 3 - e^{-x^2}$ **d)** $f(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2.8 Unter Berücksichtigung der herrschenden Wetterbedingungen wurde der Geschwindigkeitsverlauf v für einen Fallschirmsprung vor dem Öffnen des Schirms durch folgende Funktion berechnet: BCD



$v(t) = 20\frac{m}{s} \cdot \frac{e^{\frac{0,4905}{s} \cdot t} - e^{-\frac{0,4905}{s} \cdot t}}{e^{\frac{0,4905}{s} \cdot t} + e^{-\frac{0,4905}{s} \cdot t}}$ t … Zeit in Sekunden, v … Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$

1) Stelle die Funktion grafisch dar.
2) Welchem Grenzwert nähert sich die angegebene Geschwindigkeitsfunktion für $t \to \infty$? Ermittle den Wert mithilfe der Grafik und überprüfe rechnerisch.
3) Erkläre, welche praktische Bedeutung der in **2)** berechnete Grenzwert hat.

2.9 Um Mitternacht wird ein Leichnam gefunden. Die Umgebungstemperatur beträgt konstant 17,4 °C. Die Temperatur ϑ des Leichnams beträgt zwei Stunden später noch 25,2 °C. Der Temperaturverlauf kann durch folgende Funktion beschrieben werden: AB
$\vartheta(t) = \vartheta_U + (\vartheta_0 - \vartheta_U) \cdot e^{-k \cdot t}$
t … Zeit nach dem Tod in Stunden, ϑ_U … Umgebungstemperatur in °C,
ϑ_0 = 27 °C … Körpertemperatur um Mitternacht
1) Berechne den Faktor k aus den gegebenen Temperaturwerten.
2) Bestimme den Todeszeitpunkt.
3) Berechne, welche Temperatur der Leichnam nach sehr langer Zeit hätte.

2.10 Möchte man eine Raumsonde mit der Masse m von der Erdoberfläche aus in eine bestimmte Höhe h befördern, muss Hebearbeit der Form $W(h) = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + h}\right)$ verrichtet werden. ABD

G … Newton'sche Gravitationskonstante
$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
M … Masse der Erde $M \approx 5,97 \cdot 10^{24}$ kg
m … Masse der Raumsonde
r_0 … Erdradius $r_0 \approx 6,37 \cdot 10^6$ m



1) Berechne, welche Hebearbeit in Joule notwendig war, um die Raumsonde Voyager 1 mit der Masse m ≈ 825,50 kg aus dem Schwerefeld der Erde (ins Unendliche) zu bringen.
2) Berechne, welche minimale Anfangsgeschwindigkeit in $\frac{km}{s}$ erreicht werden muss, um einen Körper aus dem Schwerefeld der Erde zu bringen. In der Physik wird diese Geschwindigkeit als **Fluchtgeschwindigkeit** bezeichnet.
Hinweis: Beschleunigungsarbeit $W = \frac{m \cdot v^2}{2}$

2.11 Die Masse ist ein Maß für die Trägheit eines Körpers. Nach der speziellen Relativitätstheorie wächst die Masse m_0 eines Körpers immer mehr an, je größer die Geschwindigkeit v wird, mit der er sich gleichförmig bewegt; er wird also träger. Diese Massenzunahme wird mithilfe der Funktion m beschrieben. ABD
$m(v) = k(v) \cdot m_0$ mit $k(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, c … Lichtgeschwindigkeit, $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$
1) Stelle den sogenannten **Lorentzfaktor** k als Funktion der Geschwindigkeit grafisch dar.
2) Bestimme die Masse eines Körpers, der sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Benutze dabei die Regeln zur Grenzwertberechnung. Ist es (theoretisch) möglich, mit Lichtgeschwindigkeit zu reisen? Begründe deine Antwort.

2.12 Kann eine Asymptote den Graph einer Funktion auch schneiden? Begründe deine Antwort anhand einer Skizze. D

2.2 Grenzwert und Stetigkeit

ABCD **2.13** ***1)*** Orangen kosten 1,20 € pro Kilogramm. Stelle die Kostenfunktion grafisch dar. Welchen Preis kann man in diesem Fall für 2 kg Orangen erwarten?

2) Im Sonderangebot kostet ein 2-kg-Netz Orangen 2,00 €, ansonsten beträgt der reguläre Preis weiterhin 1,20 € pro kg. Stelle die Kostenfunktion für diesen Fall grafisch dar.



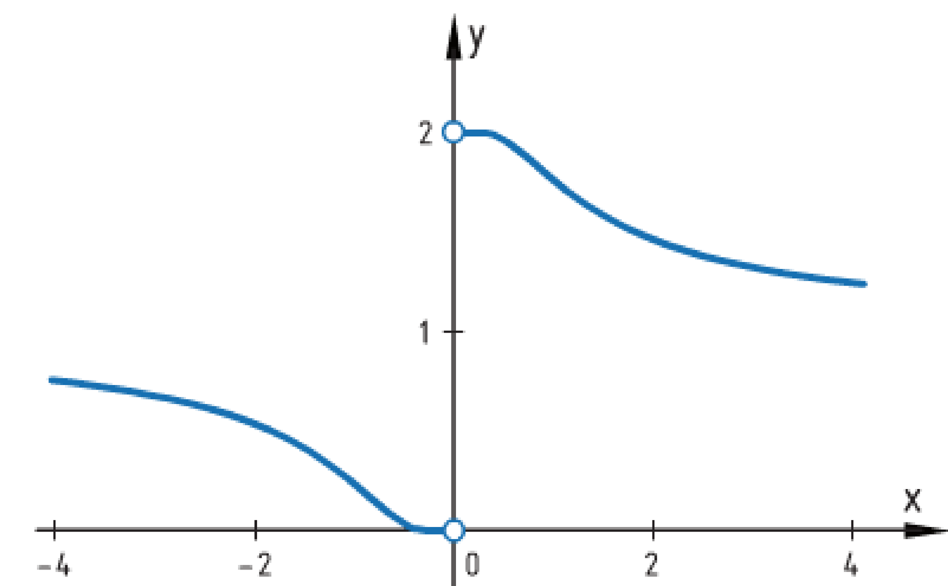
3) Beschreibe für beide Situationen den Preisunterschied zwischen „etwas weniger als 2 kg Orangen" bzw. „etwas mehr als 2 kg Orangen" und „genau 2 kg Orangen".

Um den Verlauf von Funktionsgraphen zu beschreiben, wurden in Band 2 bereits einige Begriffe besprochen. In vielen Fällen weisen Funktionen „Besonderheiten" auf, wie zum Beispiel die Funktion $y = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Um den Verlauf solcher Funktion mathematisch präzise zu erfassen, benötigen wir weitere Begriffe.

2.2.1 Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0

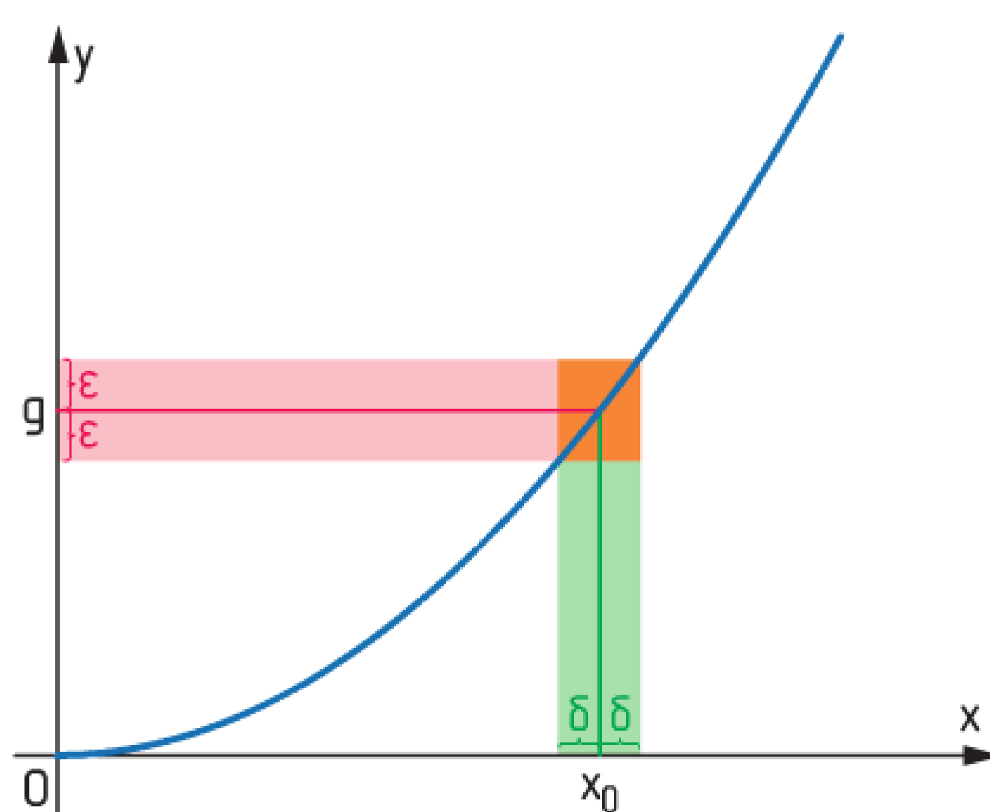
Um den Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0 bestimmen zu können, betrachtet man die Funktionswerte „links" und „rechts" nahe bei x_0. Dabei ist es nicht wichtig, welchen Funktionswert die Funktion an der Stelle x_0 einnimmt bzw. ob die Funktion an dieser Stelle überhaupt definiert ist.

Betrachtet man in der Abbildung den „linken Ast" des Funktionsgraphen, so nähern sich die Funktionswerte dem Wert 0, wenn sich die x-Werte von links der Stelle $x_0 = 0$ nähern. Beim „rechten Ast" nähern sich die Funktionswerte dem Wert 2, wenn sich die x-Werte von rechts der Stelle $x_0 = 0$ nähern (siehe Aufgabe 2.20).

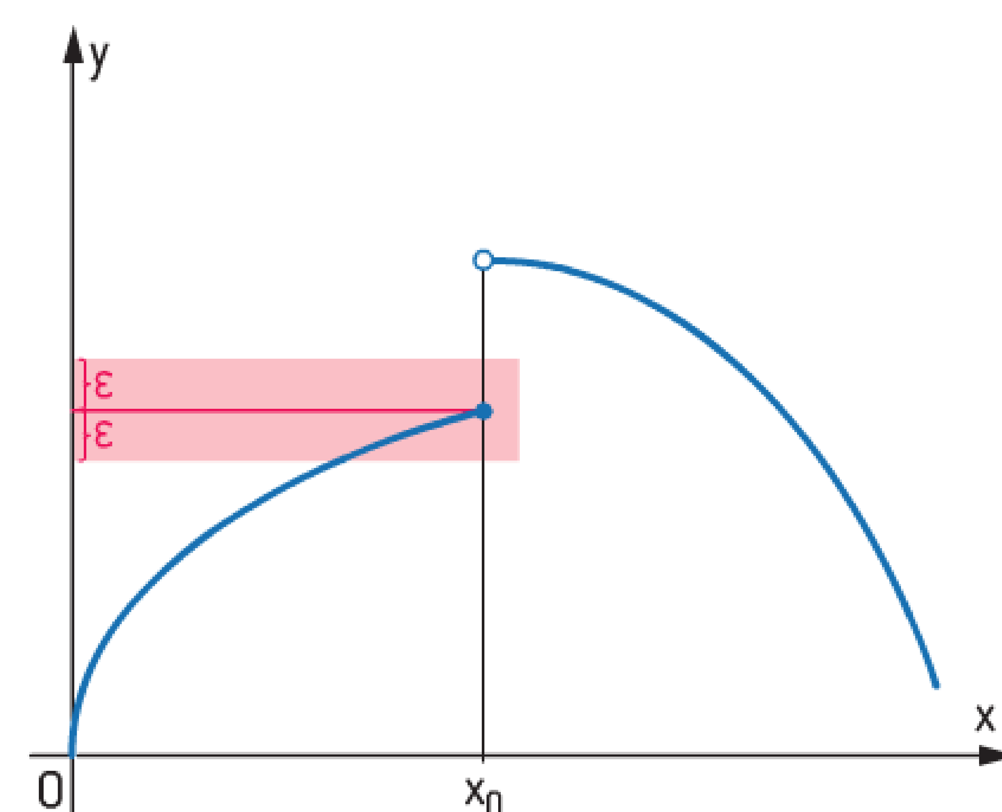


Der Grenzwert an dieser Stelle existiert somit nicht. Um diese Aussage mathematisch korrekt zu formulieren, benötigt man noch einige Überlegungen.

- Ist **g** der **Grenzwert** einer Funktion an der Stelle x_0, so kann man zu jedem **ε-Streifen** ($\varepsilon > 0$, ε beliebig klein) einen **Bereich ($x_0 \pm \delta$)** auf der x-Achse finden, sodass für jedes $x \neq x_0$ aus dem **δ-Streifen** der zugehörige **Funktionswert** im ε-Streifen liegt.



- Bei der abgebildeten Funktion kann zum eingezeichneten **ε-Streifen kein geeigneter Bereich** auf der x-Achse angegeben werden. Für jeden noch so kleinen positiven Wert δ liegt $f(x_0 + \delta)$ **außerhalb des ε-Streifens**. Es existiert **kein Grenzwert** an der Stelle x_0.



Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Diese Überlegungen führen zu einer Definition des Grenzwerts einer Funktion an der Stelle x_0.

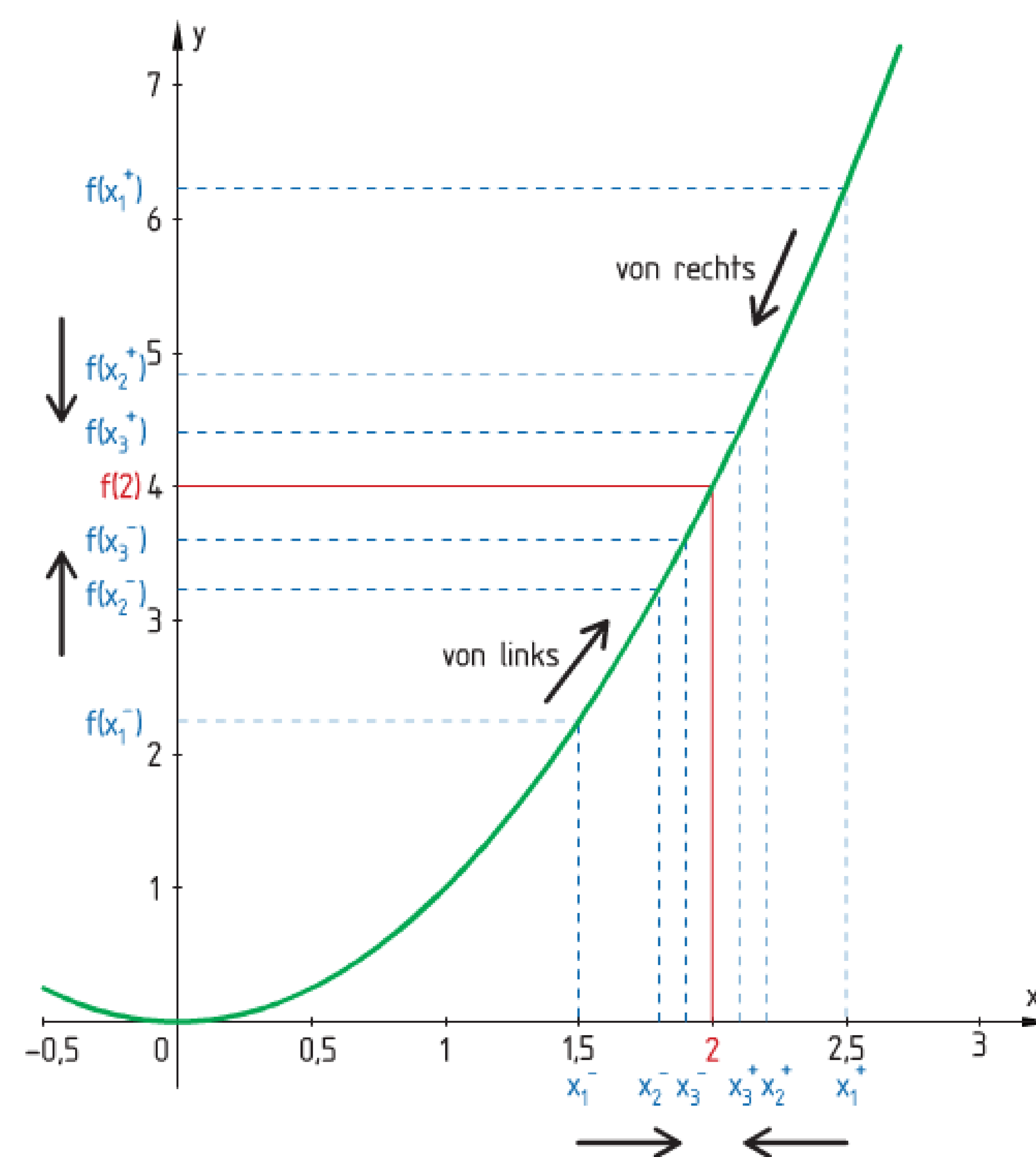
> Die Funktion f(x) hat für $x \to x_0$ den **Grenzwert** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - g| < \varepsilon$

Man kann den Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0 auch mithilfe von Folgen definieren. Es soll zum Beispiel der Grenzwert der Funktion $y = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$ untersucht werden. Man bildet sowohl eine Folge von x-Werten, die sich dem Wert x_0 „von links" nähert, als auch eine Folge, die sich „von rechts" nähert. Dafür eignen sich zum Beispiel die Folgen

$\langle x_n^- \rangle = \langle 2 - 0{,}1^n \rangle$ („von links") und $\langle x_n^+ \rangle = \langle 2 + 0{,}1^n \rangle$ („von rechts").
Beide Folgen konvergieren gegen 2.

Berechnet man die Funktionswerte der Folgenglieder, so erkennt man, dass sich die Folge der Funktionswerte in beiden Fällen dem Wert 4 nähert.

Um den Unterschied zwischen der Näherung von links und der von rechts auszudrücken, wird beim **linksseitigen Grenzwert g_L** ein hochgestelltes „–", und beim **rechtsseitigen Grenzwert g_R** ein hochgestelltes „+" verwendet.



Für den **linksseitigen Grenzwert** gilt daher
$g_L = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n^-) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n^-)^2 = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2) = 4$

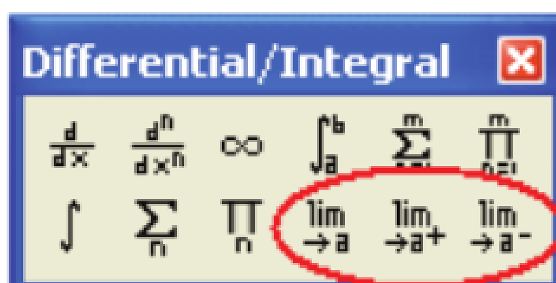
und für den **rechtsseitigen Grenzwert**
$g_R = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n^+) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n^+)^2 = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2) = 4.$

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert stimmen überein. Man sagt:
„4 ist der **Grenzwert der Funktion** f(x) an der Stelle 2."

> $g = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nennt man den **Grenzwert der Funktion f(x) an der Stelle x_0**, wenn für **jede** beliebige Folge von x-Werten, die gegen x_0 konvergiert, die zugehörige Folge der Funktionswerte gegen **denselben Wert $g \in \mathbb{R}$** konvergiert.
> Für $x \to x_0^-$ erhält man den linksseitigen Grenzwert $g_L = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$
> Für $x \to x_0^+$ erhält man den rechtsseitigen Grenzwert $g_R = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
> Gibt es einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle x_0 und gilt $\mathbf{g_L = g_R}$, so ist $g_L = g_R$ der Grenzwert g der Funktion an der Stelle x_0.

Technologieeinsatz: Grenzwert für $x \to x_0$ berechnen
MathCad



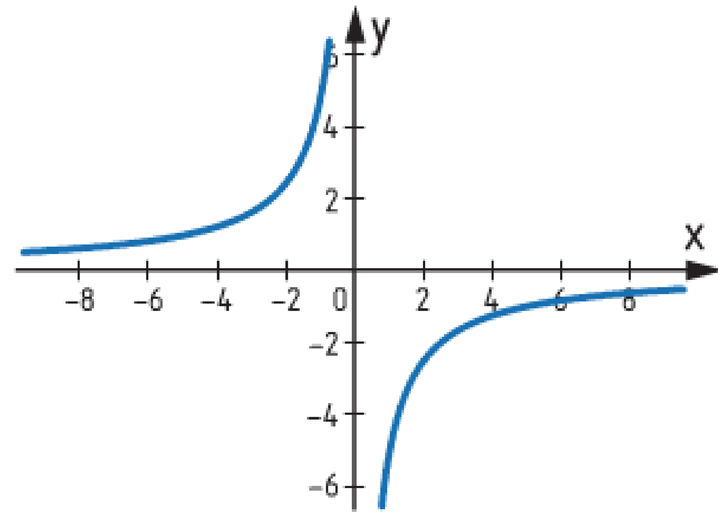


Durch Anklicken des Symbols wird die Menüleiste „Differential/Integral" angezeigt, auf der sich auch der Befehl zur Grenzwertberechnung befindet.

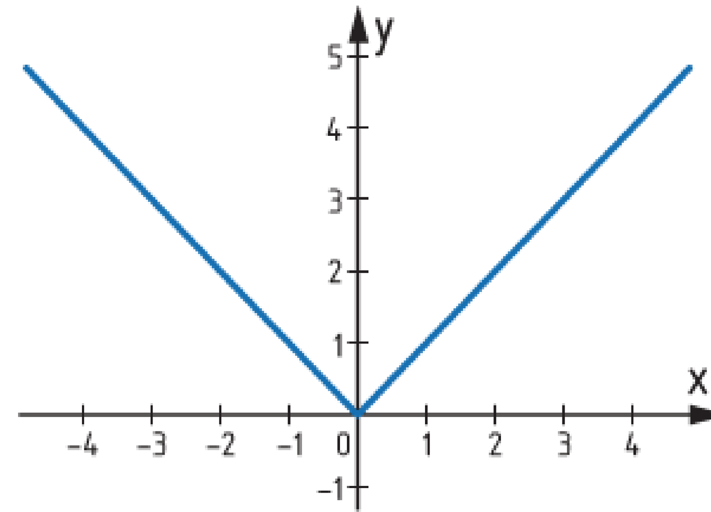
Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

CD **2.14** Begründe jeweils anhand der Zeichnung, ob der Grenzwert g an der Stelle $x_0 = 0$ existiert. Welchen Grenzwert vermutest du gegebenenfalls? Formuliere deine Überlegungen mit eigenen Worten.

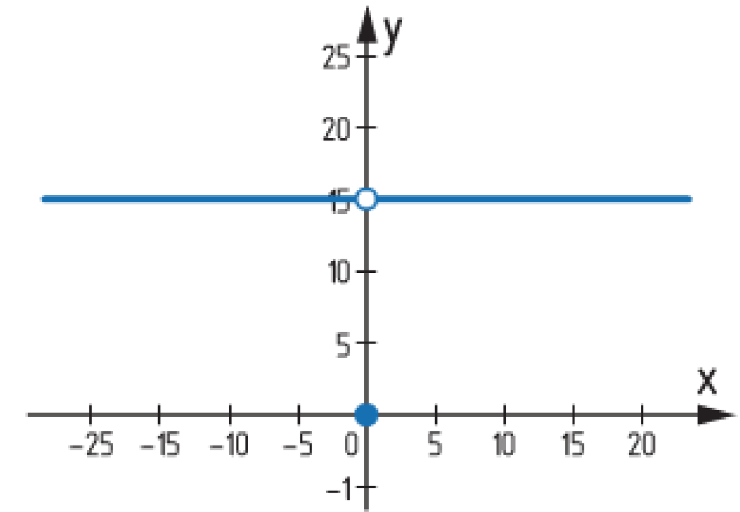
1)



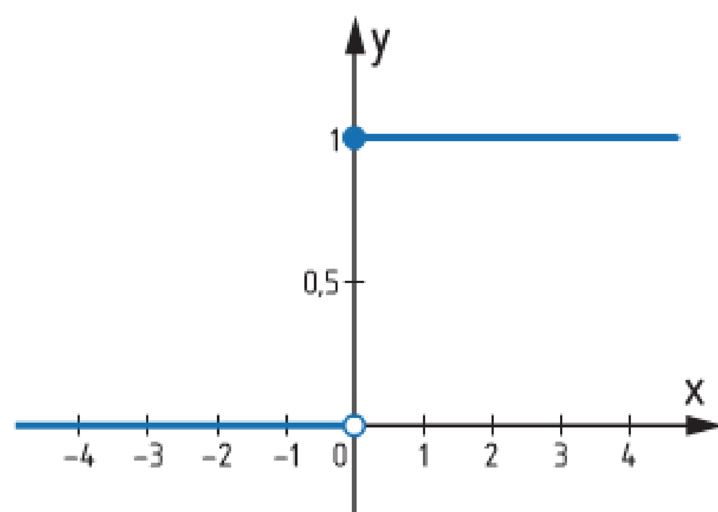
3)



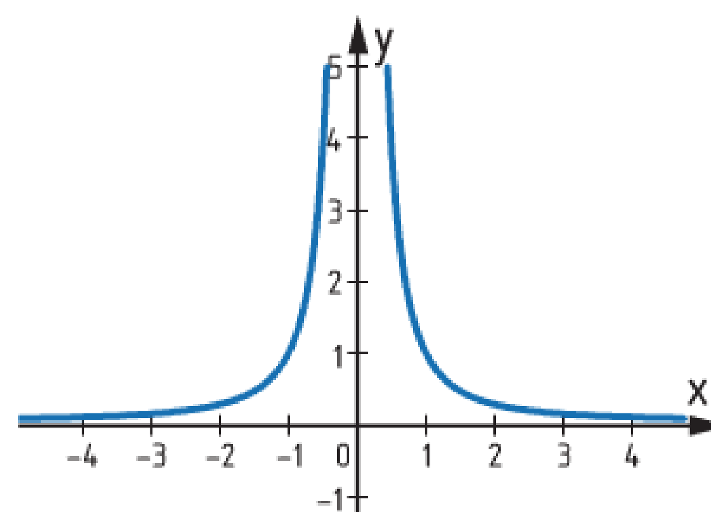
5)



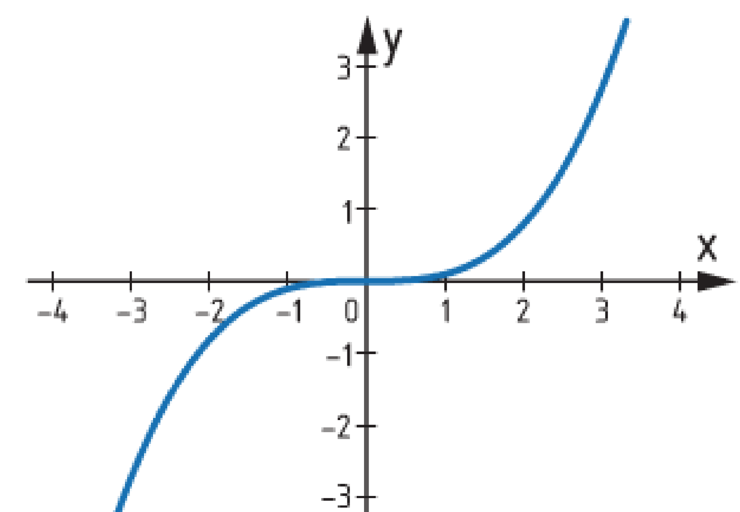
2)



4)



6)

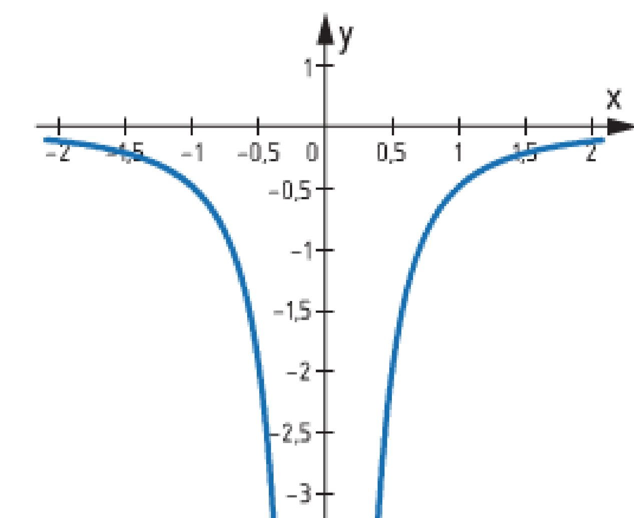


BC **2.15** Überlege, ob es sich bei der gegebenen Folge $\langle x_n \rangle$ um eine links- oder rechtsseitige Näherung handelt und bestimme den Grenzwert der Funktion.

a) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x, \quad \langle x_n \rangle = \langle -1 - 0{,}1^n \rangle$ **c)** $f(x) = (2 - x)^3, \quad \langle x_n \rangle = \langle 2 + 0{,}5^n \rangle$

b) $f(x) = \sin(2x), \quad \langle x_n \rangle = \langle \frac{\pi}{n} \rangle$ **d)** $f(x) = \sqrt{3x - 2}, \quad \langle x_n \rangle = \langle 9 - 0{,}1^n \rangle$

CD **2.16** „Hat die Funktion $f(x) = -\frac{0{,}5}{x^2}$ einen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$?" Nico stellt die Funktion grafisch dar und beantwortet diese Frage mit: „Ja, denn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert sind gleich."
Beurteile diese Argumentation.



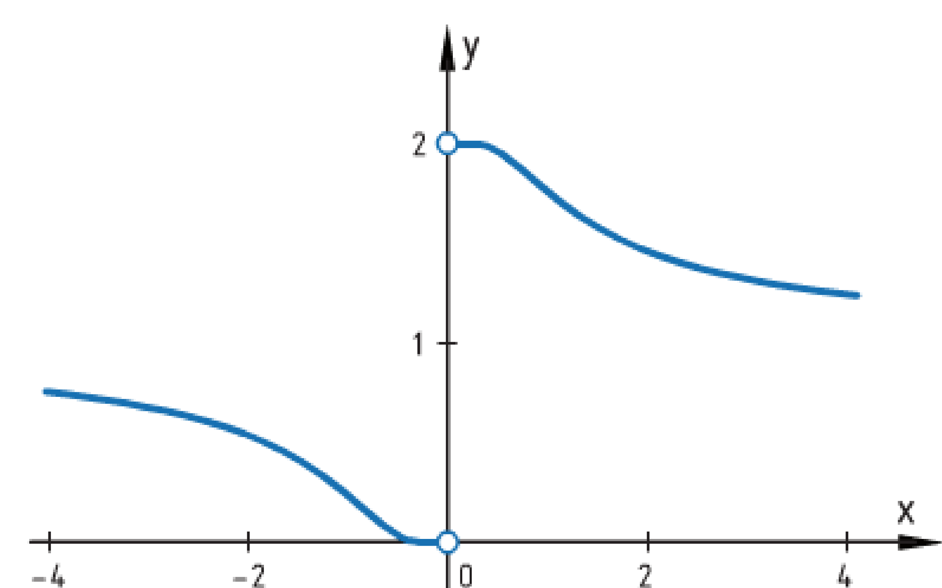
BCD **2.17** Vergleiche den Verlauf der Funktion $y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$ mit dem Verlauf der Funktion $y_2 = \frac{\cos(x)}{x^2}$. Wie unterscheiden sich die Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ voneinander?

Aufgaben 2.18 – 2.19: Stelle die Funktion grafisch dar. Beschreibe jeweils den Verlauf des Funktionsgraphen für $x \to x_0$ mithilfe von Grenzwerten.

BC **2.18** **a)** $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, x_0 = 1$ **b)** $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}, x_0 = 2$ **c)** $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}, x_0 = 0$

BC **2.19** **a)** $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}, x_0 = 0$ **b)** $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}, x_0 = 0$ **c)** $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}, x_0 = 0$

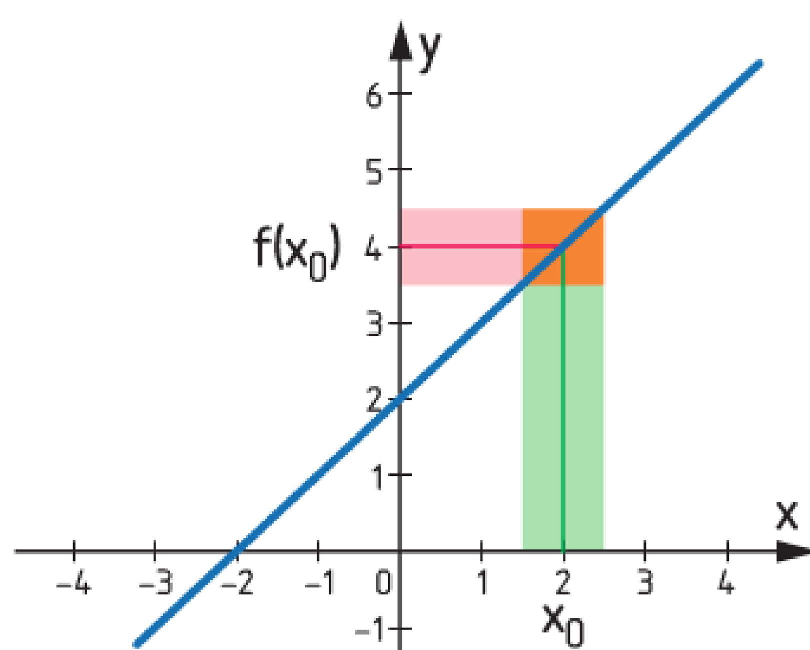
BD **2.20** Zeige, dass für die Funktion $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}$ an der Stelle $x_0 = 0$ gilt: $g_L = 0$ und $g_R = 2$



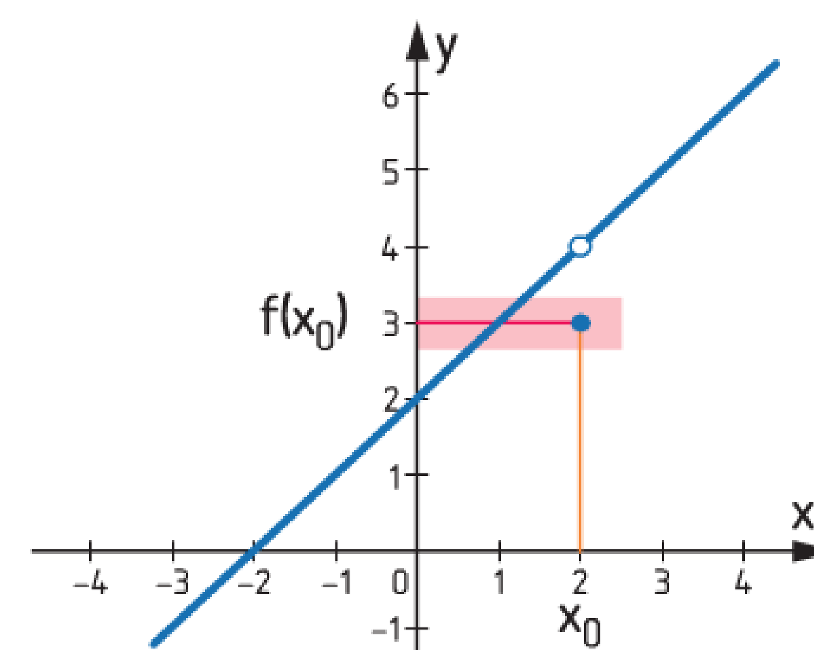
2.2.2 Stetigkeit

Die **Stetigkeit** ist eine der wichtigsten Eigenschaften von Funktionen. Viele mathematische Sätze und Aussagen über Funktionen gelten nur für stetige Funktionen. Die meisten Funktionen, mit denen wir bisher gearbeitet haben, sind **stetig**. Das bedeutet, dass sich bei einer **kleinen Änderung der unabhängigen Variablen** auch der **zugehörige Funktionswert** höchstens **geringfügig ändert**.

- Ist eine Funktion **stetig an der Stelle x_0**, so kann man zu jedem ε-Streifen um $f(x_0)$ einen Bereich $(x_0 \pm \delta)$ auf der x-Achse angeben, sodass für alle x-Werte aus dem δ-Streifen, also auch für x_0, der zugehörige Funktionswert im ε-Streifen liegt.



- Ist eine Funktion **unstetig** an der Stelle x_0, kann zum eingezeichneten ε-Streifen kein geeigneter Bereich auf der x-Achse angegeben werden. Für jeden noch so kleinen positiven Wert δ liegen nicht alle zugehörigen Funktionswerte im ε-Streifen.



Die Stetigkeit kann auch mithilfe von Grenzwerten erklärt werden.

$f(x) = x + 2$ für $x_0 = 2$

Der linksseitige Grenzwert lautet:

$g_L = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$

Der rechtsseitige Grenzwert lautet:

$g_R = \lim\limits_{x \to 2^+} (x + 2) = 4$

$g_L = g_R \Rightarrow g = 4$

Da der **Grenzwert** existiert und mit dem **Funktionswert** $f(2) = 4$ **übereinstimmt**, ist die Funktion an dieser Stelle **stetig**.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{für } x \neq 2 \\ 3 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

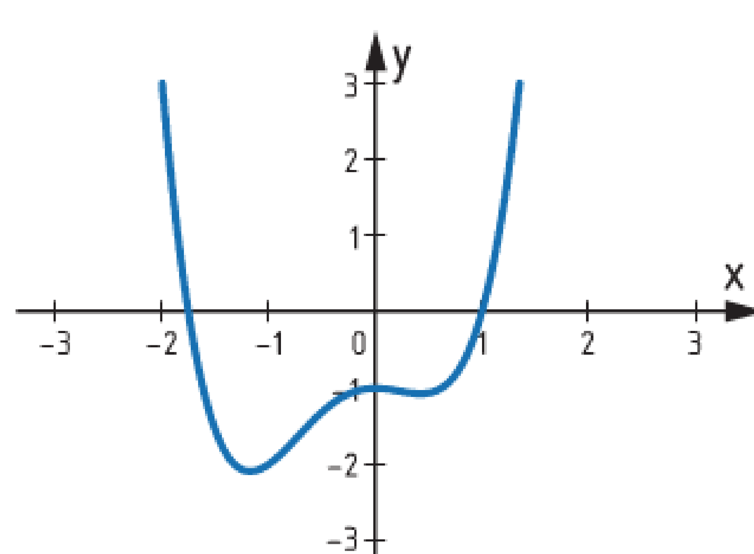
Auch in diesem Fall gilt für $x_0 = 2$:

$g_L = g_R = g = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

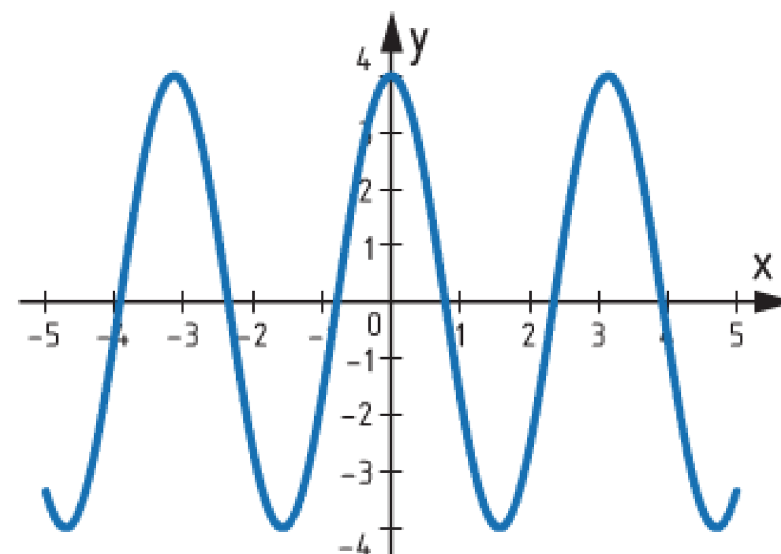
Aber: $f(2) = 3 \neq 4$

Der **Grenzwert** und der **Funktionswert** stimmen **nicht überein**. Die Funktion f ist **unstetig** an dieser Stelle.

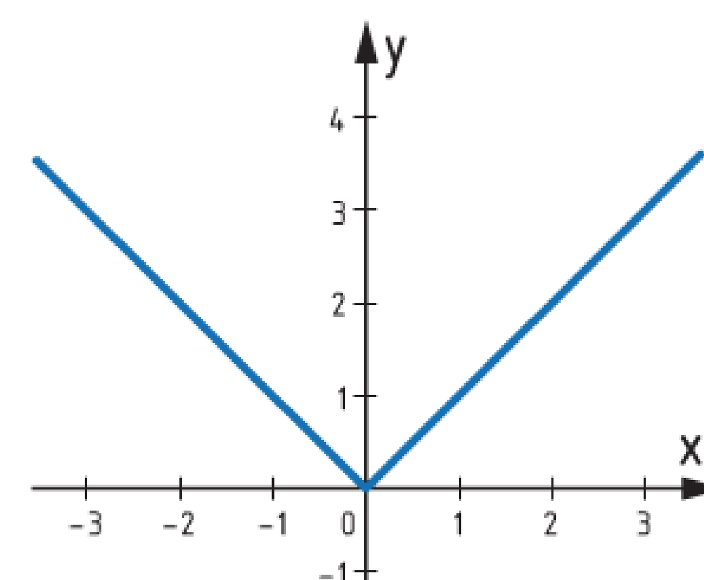
Wenn eine **Funktion** einen **Grenzwert** an der Stelle x_0 **hat und** dieser **Grenzwert gleich dem Funktionswert** an dieser Stelle ist, so ist die Funktion **stetig an der Stelle x_0**. Wenn diese Aussage für jede Stelle der Funktion gilt, der Funktionsgraph also „in einem", ohne den Stift abzusetzen, gezeichnet werden kann, so spricht man von einer **stetigen Funktion**.
Zum Beispiel sind die folgenden Funktionen stetig:



$y = x^4 + x^3 - x^2 - 1$



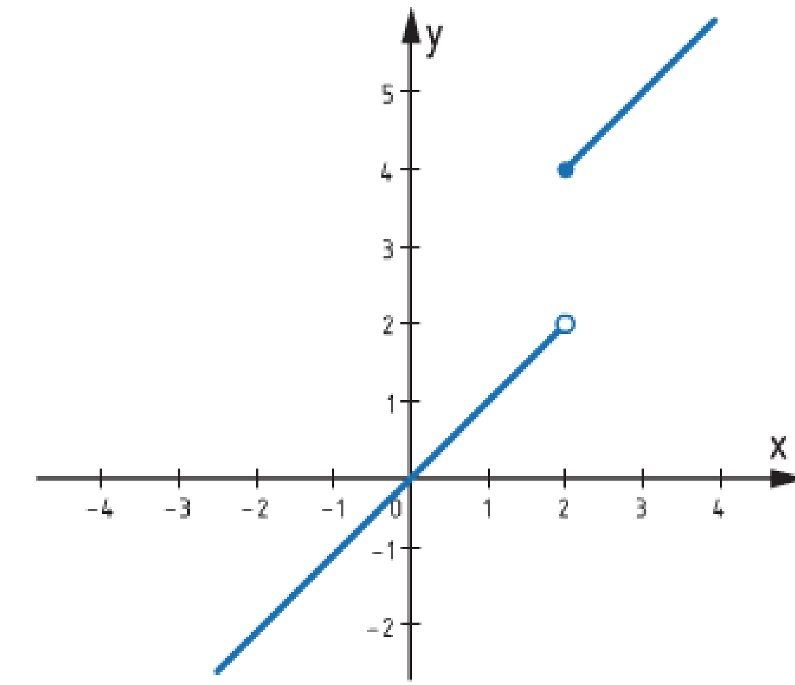
$y = 4 \cdot \cos(2x)$



$y = |x|$

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Manchmal ist es auch möglich, dass der linksseitige und der rechtseitige Grenzwert nicht übereinstimmen, zB:



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 2 \\ x + 2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist an der Stelle 2 definiert, die beiden Grenzwerte existieren, sie sind aber nicht gleich.

$g_L = \lim_{x \to 2^-} (x) = 2$, aber $g_R = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4$

Die Funktion ist daher **unstetig** an der Stelle $x_0 = 2$.

Am Rand eines abgschlossenen Intervalls ist eine Funktion dann stetig, wenn der entsprechende einseitige Grenzwert existiert und mit dem Funktionswert übereinstimmt.

Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x_0

Eine Funktion f(x) ist **stetig** an einer Stelle x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

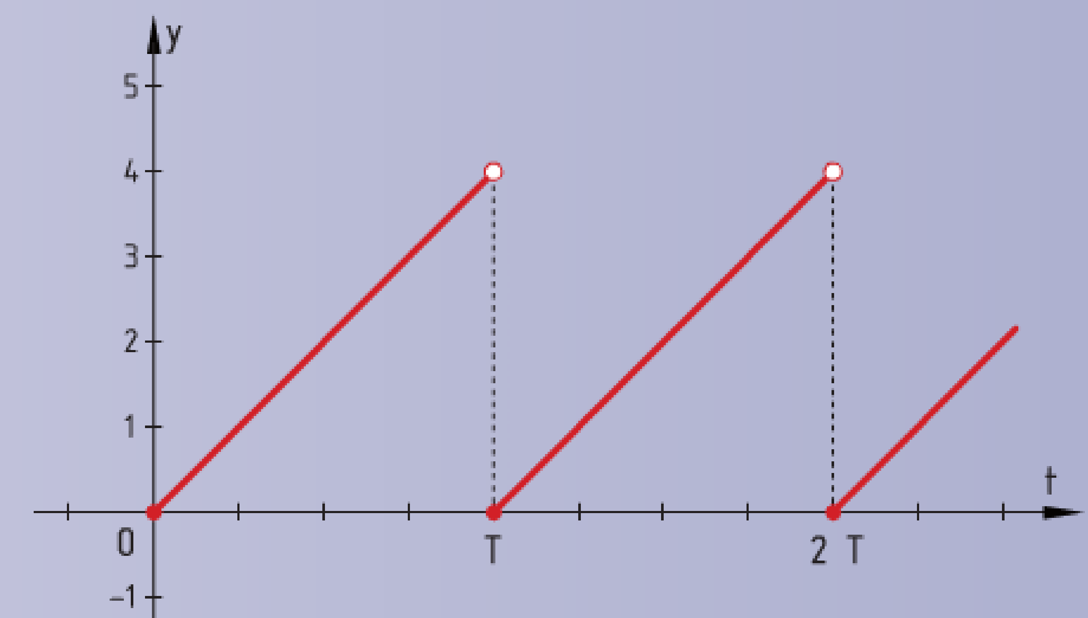
Eine andere Definition lautet:

Eine Funktion f(x) ist **stetig** an einer Stelle x_0, wenn der Grenzwert in x_0 existiert und mit dem Funktionswert an dieser Stelle übereinstimmt: $g = \lim_{x \to x_0} (f(x) = f(x_0))$

Andernfalls nennt man die Funktion **unstetig** an der Stelle x_0.

Ist eine Funktion an jeder Stelle eines beliebig gewählten Intervalls stetig, so spricht man von einer in diesem Intervall stetigen Funktion.

C **2.21** Die Grafik zeigt eine so genannte Kippschwingung oder Sägezahnfunktion. Mithilfe solcher Funktionen werden in der Signaltechnik spezielle periodische Vorgänge angegeben. Überlege, wo die Funktion im Intervall [0; 2T[stetig ist und lies eventuelle Unstetigkeitsstellen aus dem Graphen ab. Formuliere deine Überlegungen schriftlich.

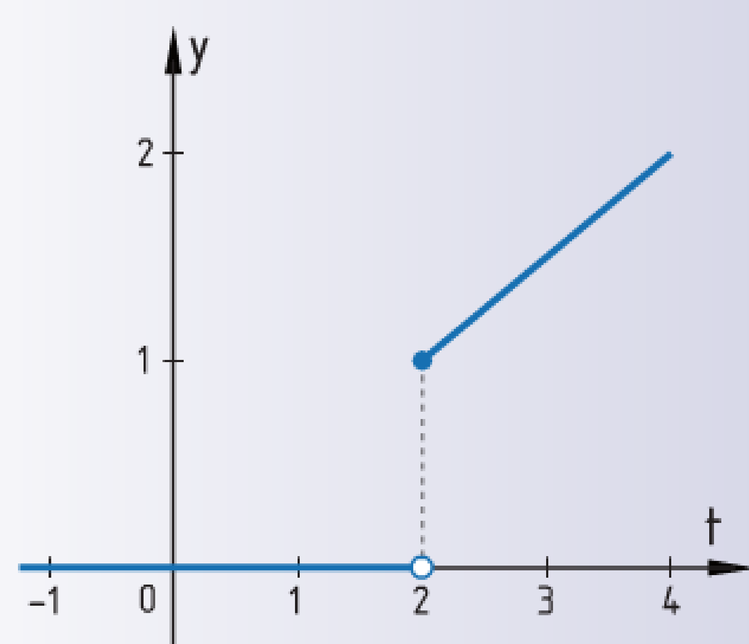


Lösung:

Die Funktion ist stetig in jenen Bereichen, in denen der Graph nicht „unterbrochen" ist, also in den Intervallen[0; T[und]T; 2T[. An der Stelle t = T ist die Funktion unstetig.

BC **2.22** Zeichne die stückweise definierte Funktion $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 0{,}5 \cdot t & t \geq 2 \end{cases}$ im Intervall]–1; 4[und untersuche sie mit Hilfe von Grenzwerten auf Stetigkeit.

Lösung:



$f(2) = 2$ — • Berechnung des Funktionswerts

$g_L = \lim_{t \to 2^-} (0) = 0$

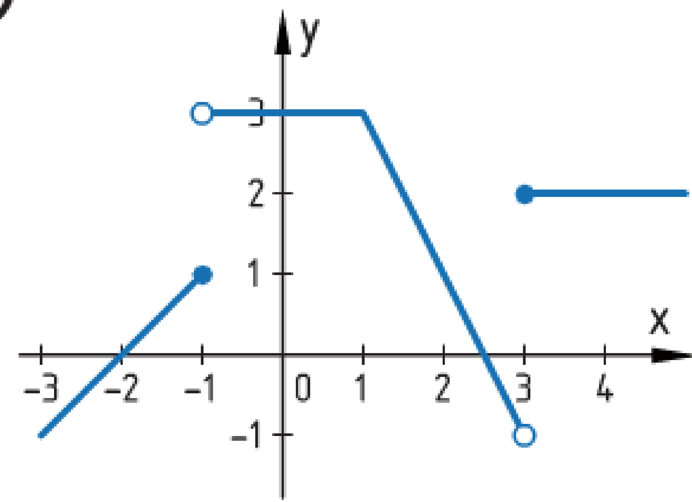
$g_R = \lim_{t \to 2^+} (0{,}5 \cdot t) = 1$ — • Berechnung von g_R und g_L an der Stelle $t_0 = 2$

$g_L \neq g_R$ — • Es existiert kein Grenzwert.

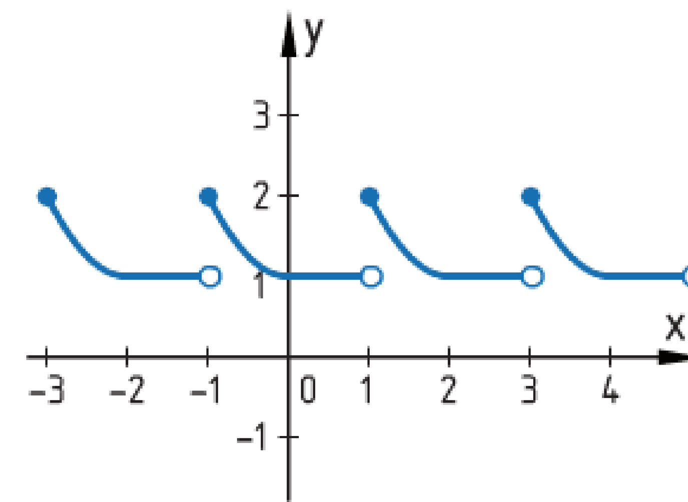
Die Funktion ist im angegebenen Intervall unstetig, weil sie an der Stelle t = 2 unstetig ist.

2.23 Gib an, in welchen Bereichen die dargestellten Funktionen im Intervall]–3; 4[stetig sind. **C**

1)

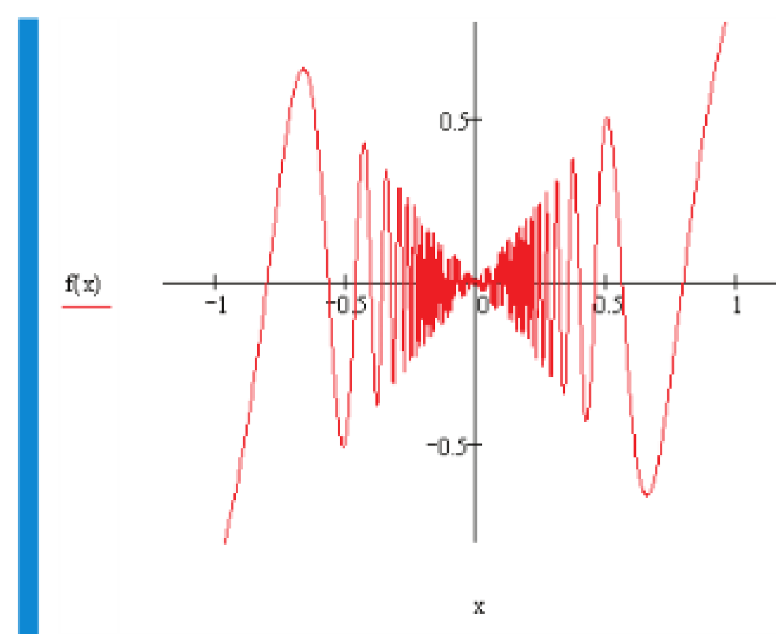


2)



2.24 Katharina untersucht die Funktion $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{2}{x^2}\right)$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit Mathcad. **CD**

Beurteile ihre Vorgehensweise und ihre Folgerung.



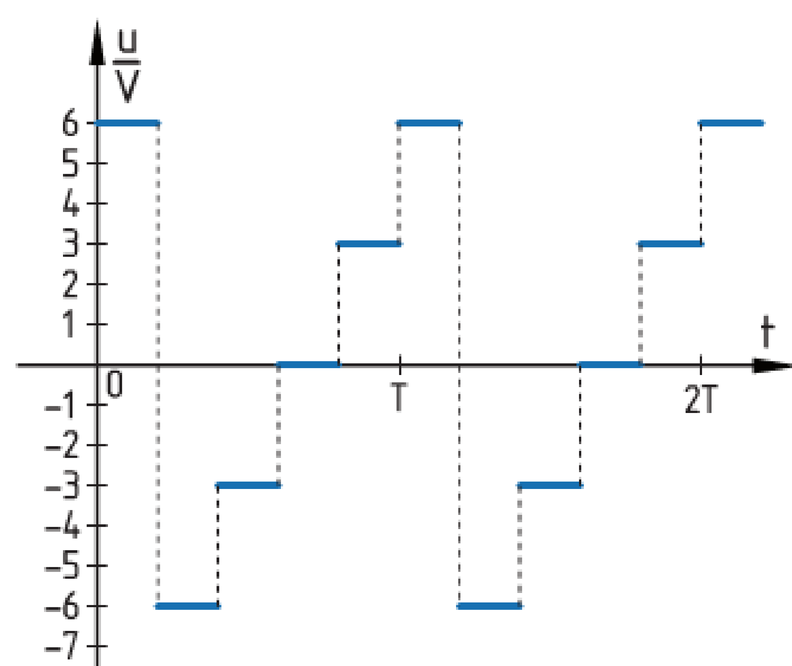
$f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{2}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \to 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \to 0$

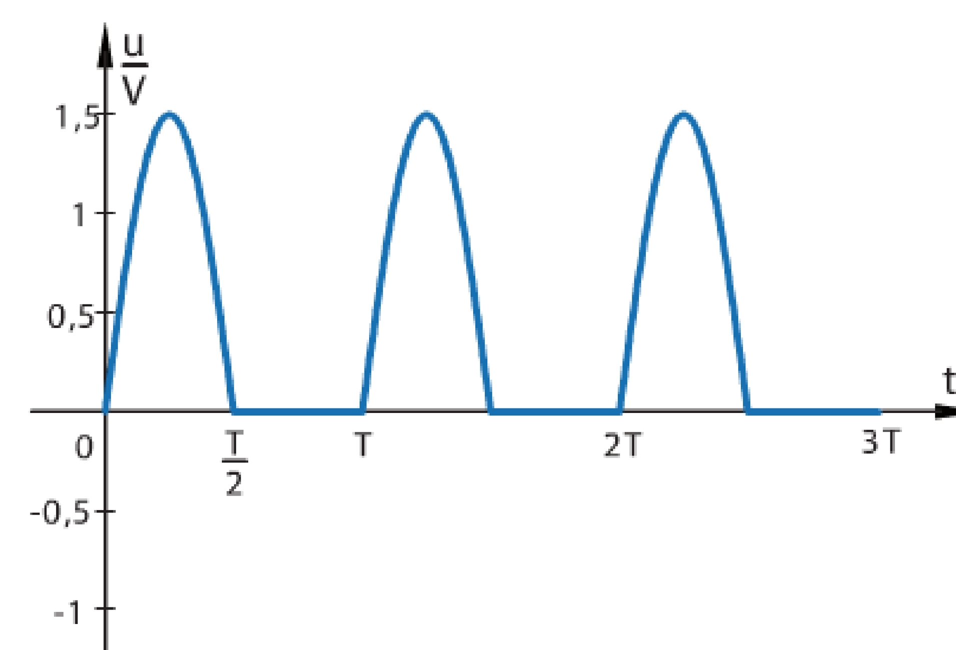
Die Funktion ist stetig an der Stelle x_0.

2.25 Die dargestellten Funktionen werden in der Elektronik zur Beschreibung von Wechselgrößen verwendet. Lies gegebenenfalls die Unstetigkeitsstellen aus den Graphen ab und stelle jeweils die Funktionsgleichung für eine Periode T auf. **BC**

1) Treppenspannung



2) Einweggleichrichtung (Sinus-Funktion)



Hinweis: Gehe bei ***1)*** davon aus, dass die Spannung jeweils auf einem links abgeschlossenen und rechts offenen Intervall konstant ist.

2.26 Ein Getreidesilo wird über zwei Förderbänder befüllt. Dabei wächst die Getreidemenge mit einer Füllgeschwindigkeit von 25 m^3 pro Stunde. Nach 20 Minuten wird die Füllgeschwindigkeit innerhalb von 30 Sekunden linear bis auf 30 m^3 pro Stunde erhöht. Weitere 15 Minuten später wird ein Förderband abgestellt, wodurch die Befüllung abrupt auf 10 m^3 pro Stunde gesenkt wird. **ABC**



1) Stelle die Funktion der Füllgeschwindigkeit v (in $\frac{m^3}{h}$) grafisch dar.
2) Gib die Unstetigkeitsstelle(n) an.
3) Wie lang dauert das Befüllen, wenn der Silo ein Volumen von 200 Hektoliter fasst?
4) Mathematische Modelle bilden die Realität nur innerhalb gewisser Grenzen ab. Worin unterscheidet sich der tatsächliche Verlauf der Befüllung von dem angegebenen mathematischen Modell?

2.3 Unstetigkeitsstellen

ABD **2.27** Der Tarif für einen bewachten Parkplatz beträgt für jede angefangene Stunde 2,20 €. Maximal müssen lediglich 12,00 € pro Kalendertag bezahlt werden.



1) Stelle diese Kostenfunktion für eine Parkdauer von 0 bis 12 Stunden grafisch dar.

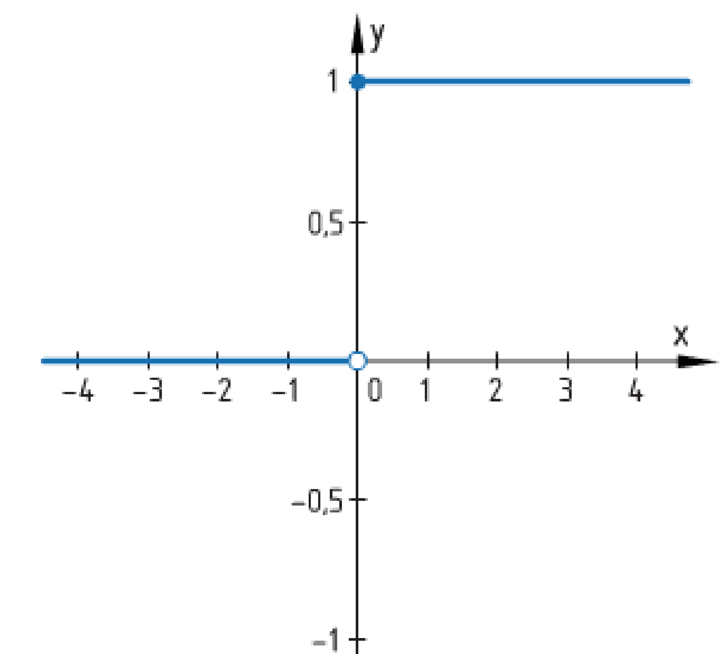
2) Beschreibe den Verlauf des Graphen mit eigenen Worten.

Aufgrund der Definition der Stetigkeit einer Funktion ergeben sich verschiedene Arten von Unstetigkeitsstellen.

Sprungstellen

Funktionen wie zum Beispiel die Heaviside'sche Sprungfunktion haben eine so genannte **Sprungstelle**. Betrachtet man den Graph einer solchen Funktion, dann „springt" dieser an einer bestimmten Stelle.

- **Heaviside'sche Sprungfunktion** $\Theta(x)$ bzw. $\sigma(x)$, nach Oliver Heaviside (britischer Physiker, 1850 – 1925)



$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$ (Θ … „Theta", griechischer Großbuchstabe)

oder allgemein: $$\Theta(x - c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geqslant c \end{cases}$$

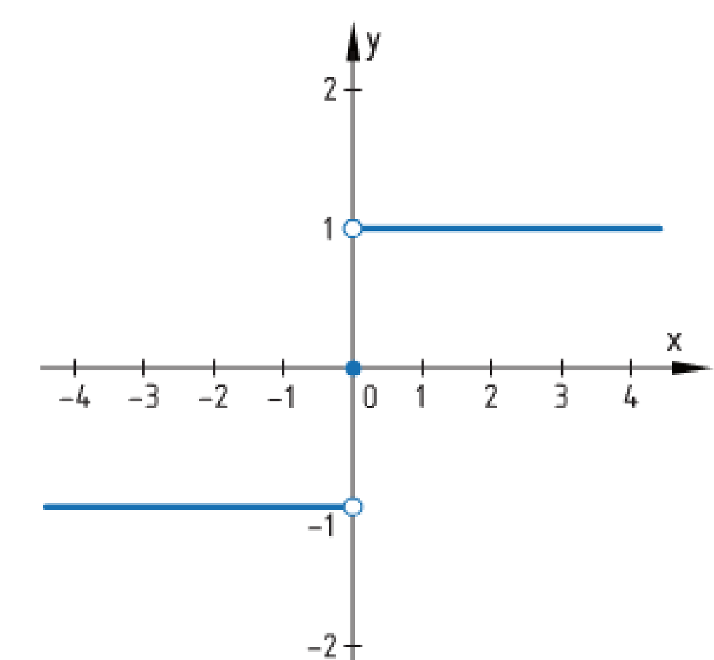
Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert werden berechnet.
g_L: $\lim\limits_{x \to 0^-} \Theta(x) = 0$ und g_R: $\lim\limits_{x \to 0^+} \Theta(x) = 1$
Die beiden einseitigen Grenzwerte stimmen nicht überein. Die Funktion ist daher unstetig an der Stelle $x_0 = 0$.

Existieren an einer Stelle x_0 einer Funktion f die Grenzwerte g_L und g_R, sind aber voneinander verschieden, befindet sich an dieser Stelle eine **Sprungstelle**.

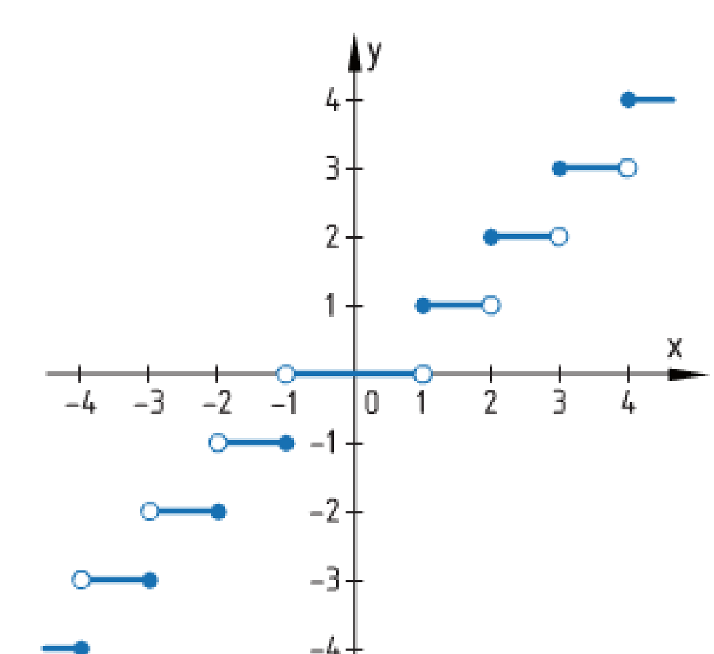
Weitere in der Technik wichtige Funktionen mit Sprungstellen sind exemplarisch angeführt:

- **Signumfunktion** („Vorzeichenfunktion") sgn(x)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



- **Integerfunktion** („Treppenfunktion") int(x)
Der Funktionswert wird durch „Abschneiden" der Nachkommastellen des Arguments gebildet.
ZB: int(4,81) = 4
int(−4,81) = −4

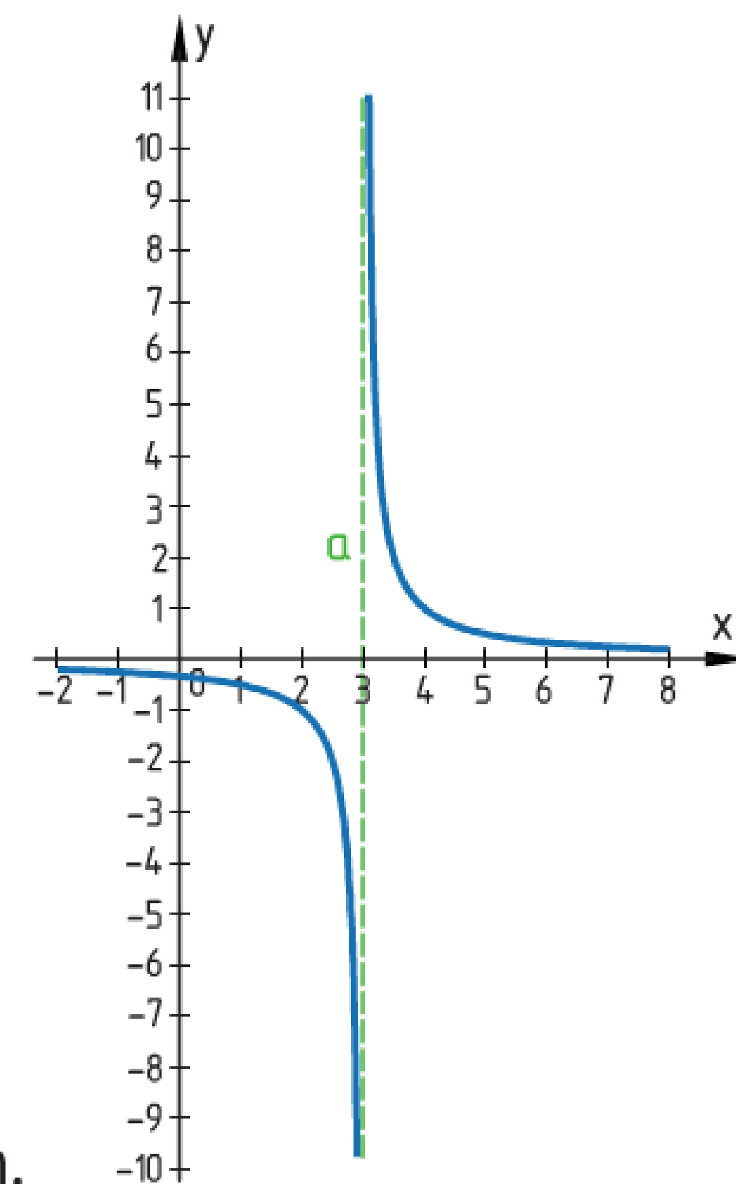


Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Ist eine Funktion an einer „einzelnen" Stelle nicht definiert, wie zum Beispiel $y = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$, so hat die Funktion dort eine **Definitionslücke**. Funktionen, bei denen der Nenner den Wert null annehmen kann, haben solche Definitionslücken, zum Beispiel gebrochen rationale Funktionen in den Nullstellen des Nennerpolynoms. In der mathematischen Literatur wird eine Funktion oft nur innerhalb ihres Definitionsbereichs auf Stetigkeit hin untersucht. Definitionslücken sind zum Beispiel Polstellen und hebbare Unstetigkeitsstellen.

Polstellen

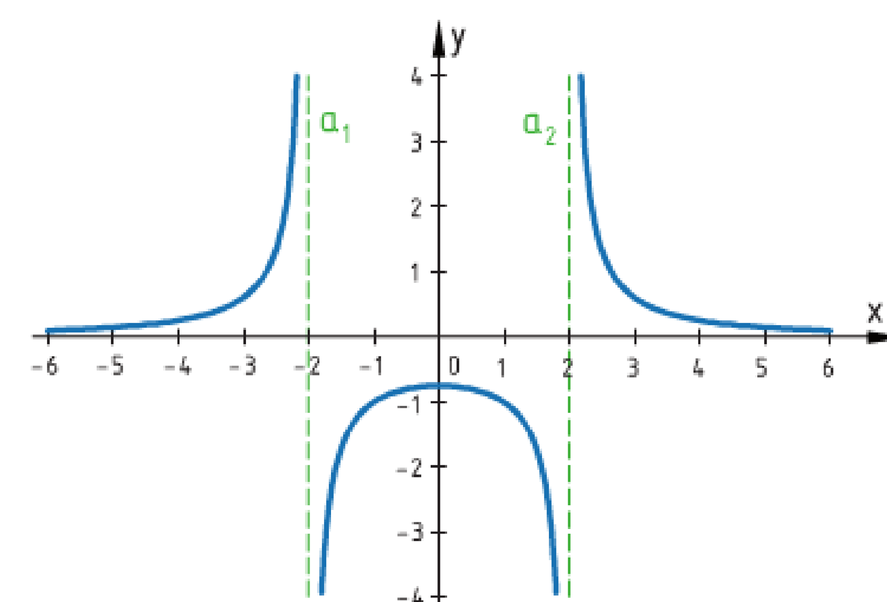
ZB: Die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{x-3}$ soll auf Stetigkeit untersucht werden.
Das Nennerpolynom hat eine Nullstelle bei $x_0 = 3$. Daraus ergibt sich für f(x) die Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$. Die Funktion ist an der Stelle x_0 nicht definiert, sie hat daher eine **Definitionslücke** bei $x_0 = 3$.



Es gilt: $\lim\limits_{x \to 3^-}\left(\frac{1}{x-3}\right) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 3^+}\left(\frac{1}{x-3}\right) = +\infty$
Diese Stelle wird als **Polstelle** bezeichnet. Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 3$ eine **senkrechte Asymptote** a: x = 3.
Im Funktionsgraphen ist zu sehen, dass sich die beiden Äste der Funktion an der Stelle $x_0 = 3$ immer mehr der Senkrechten bei 3 nähern.

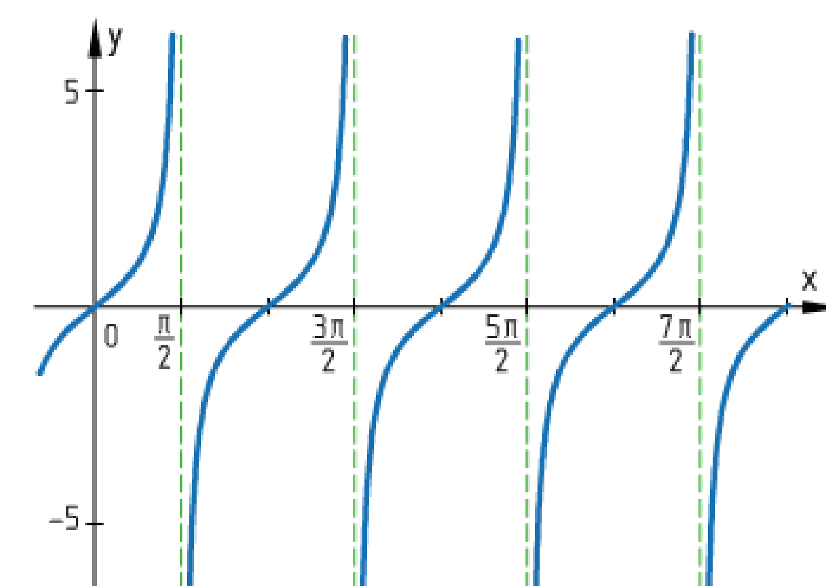
ZB: $f(x) = \frac{3}{x^2-4}$ hat an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ je eine Definitionslücke.

Bei $x_1 = -2$ nähern sich die Funktionswerte von links kommend „$+\infty$", von rechts kommend aber „$-\infty$".
Für den Graphen bedeutet das, dass er bis zu dieser Stelle zum positiven Unendlichen hin verläuft, aber ab dieser Stelle aus dem negativen Unendlichen kommt.
An der Stelle $x_2 = 2$ verhält es sich genau umgekehrt.
Da es sich um Polstellen handelt, gibt es die senkrechten Asymptoten a_1: $x = -2$ und a_2: $x = 2$.



ZB: Die Tangensfunktion y = tan(x) weist an den ungeradzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ Definitionslücken auf und hat dort senkrechte Asymptoten.
Für den linksseitigen Grenzwert gilt:

$$g_L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-}(\tan(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\ „\frac{1}{0}" = +\infty$$



Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt:

$$g_R = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+}(\tan(x)) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = „-\frac{1}{0}" = -\infty$$

Dies gilt, da die Cosinusfunktion im Intervall $]\frac{\pi}{2}; \pi[$ nur negative Werte annimmt.

Führen die Berechnungen von links- und/oder rechtsseitigem Grenzwert bei einer Funktion f an einer Stelle x_0 zu **uneigentlichen Grenzwerten**, so nennt man x_0 **Polstelle (Pol)** oder **Unendlichkeitsstelle** der Funktion. Dort befindet sich eine **senkrechte Asymptote**.

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Hebbare Unstetigkeitsstellen

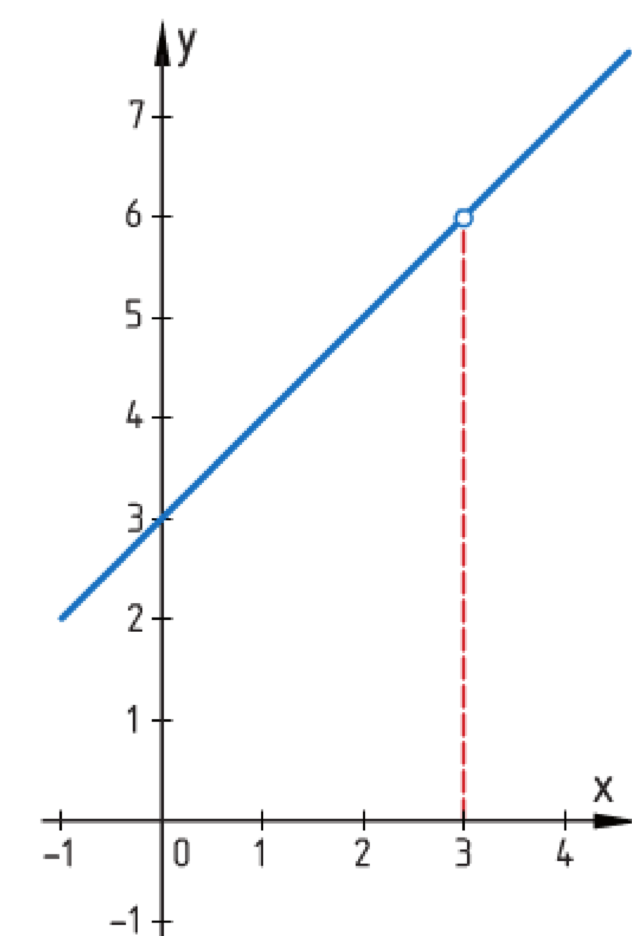
BC **2.28** Ermittle die Definitionsmenge der Funktion $y = \frac{x^2 - 4x}{x - 4}$. Stelle die Funktion anschließend mithilfe von Technologieeinsatz grafisch dar. Was fällt dir an der Stelle $x = 4$ auf?



Wenn an einer Definitionslücke der Grenzwert g existiert, so kann man diese „Lücke“ mithilfe von Ersatzfunktionen „schließen“. Man spricht in diesem Fall von einer **hebbaren Unstetigkeitsstelle** und sagt, die Funktion ist **stetig fortsetzbar**. Dies ist zum Beispiel bei einer gebrochen rationalen Funktion der Fall, wenn das Zähler- und das Nennerpolynom die gleichen Nullstellen haben, also der Bruchterm gekürzt werden könnte.

ZB: Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ sieht auf den ersten Blick wie eine Gerade aus.
Betrachtet man aber die Funktionsgleichung, so erkennt man,

dass die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{(x - 3)}$ an der Stelle $x_0 = 3$ nicht definiert ist.



Das Zählerpolynom $x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$ und das Nennerpolynom $(x - 3)$ haben die gleiche Nullstelle $x_0 = 3$.

Durch Kürzen erhält man für $x \neq 3$ die Funktion $y = x + 3$. Der Funktionsgraph entspricht daher für $x \neq 3$ der Geraden $y = x + 3$, an der Stelle $x = 3$ ist eine Definitionslücke.
Um diese Lücke zu schließen, kann man daher eine neue Funktion $\bar{f}$ definieren:
$\bar{f}(x) = x + 3$

Eine formal andere Möglichkeit, diese Lücke zu schließen, besteht darin, der Definitionsmenge von f(x) einen zusätzlichen Wert zuzuweisen. Der Funktionswert an der Stelle $x = 3$ entspricht

demGrenzwert der Funktion: $\lim\limits_{x \to 3}\left(\frac{x^2 - 9}{x - 3}\right) = 6$

Man erhält dann eine stückweise definierte Funktion:

$$\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{für } x \neq 3 \\ 6 & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

$\bar{f}(x)$ und $\bar{\bar{f}}(x)$ sind unterschiedliche Schreibweisen für die gleiche Ersatzfunktion, sie unterscheiden sich von f(x) nur an der Stelle $x_0 = 3$.

Hat eine Funktion f an der Stelle x_0 eine Definitionslücke und existiert der Grenzwert, so spricht man von einer **hebbaren Unstetigkeitsstelle**.

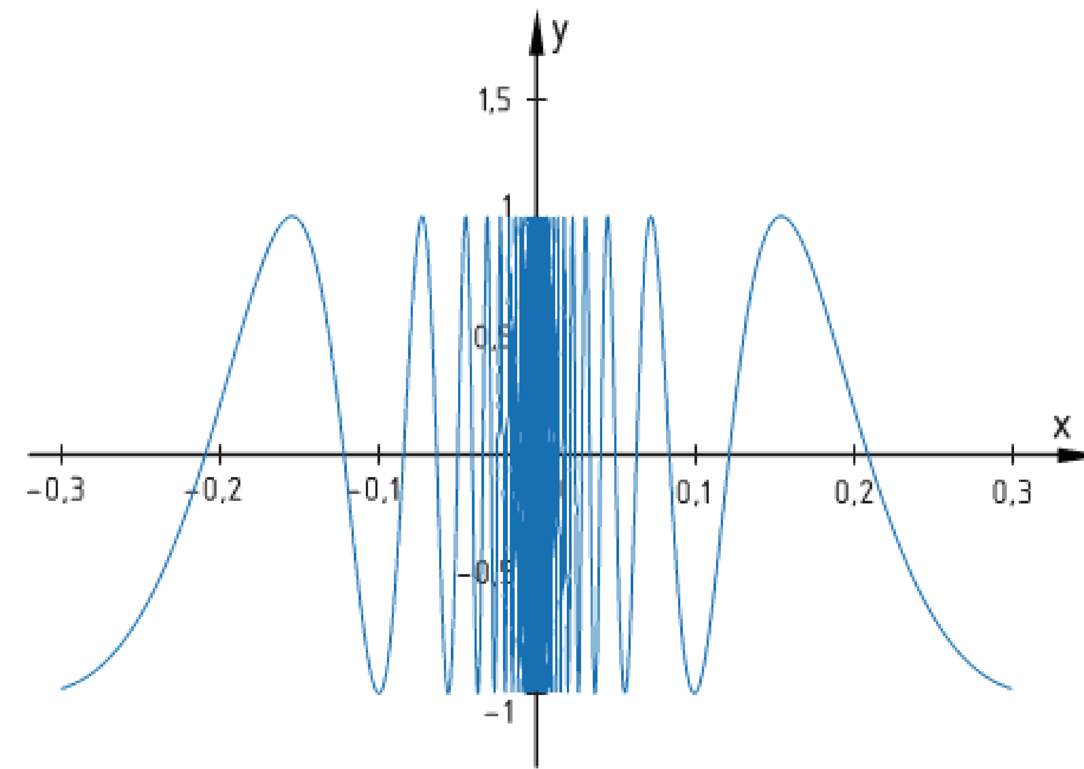
Man kann diese Unstetigkeitsstelle zum Beispiel durch die Ersatzfunktion $\bar{\bar{f}}(x)$ schließen.

$$\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

Die Ersatzfunktion $\bar{\bar{f}}(x)$ heißt **stetige Fortsetzung** der Funktion f.

Oszillationsstellen

Winkelfunktionen haben aufgrund ihrer Periodizität besondere Eigenschaften (vgl. Band 2, Abschnitt 5.2).



Bewegt sich ein Punkt entlang eines Kreises, so kann seine Position, abhängig vom Drehwinkel, mithilfe von Sinus- bzw. Cosinusfunktionen beschrieben werden. Bei jeder Erhöhung des Drehwinkels um 2π erhält man den gleichen Sinus bzw. Cosinuswert.
In der abgebildeten Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ gibt das Argument $\frac{1}{x}$ den Drehwinkel an. Für $x \to 0$ wächst der Drehwinkel $\frac{1}{x}$ unendlich schnell an.
Man kann vermuten, dass die Werte der Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ an der Stelle $x_0 = 0$ „unendlich oft" zwischen den Werten 1 und -1 schwingen bzw. oszillieren (latein: „oscillare" = schaukeln).

Um festzustellen, ob es sich bei der Definitionslücke in $x_0 = 0$ um eine hebbare Unstetigkeitsstelle handelt, muss der Grenzwert der Funktion für $x \to 0$ untersucht werden.

Falls dieser existent, dann muss für **jede** beliebige Folge von x-Werten, die gegen $x_0 = 0$ konvergieren, die Folge der Funktionswerte den gleichen Grenzwert haben.

In diesem Fall eignet sich zB die gegen 0 konvergierende Folge $\langle x_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n \cdot \pi} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots \right\rangle$

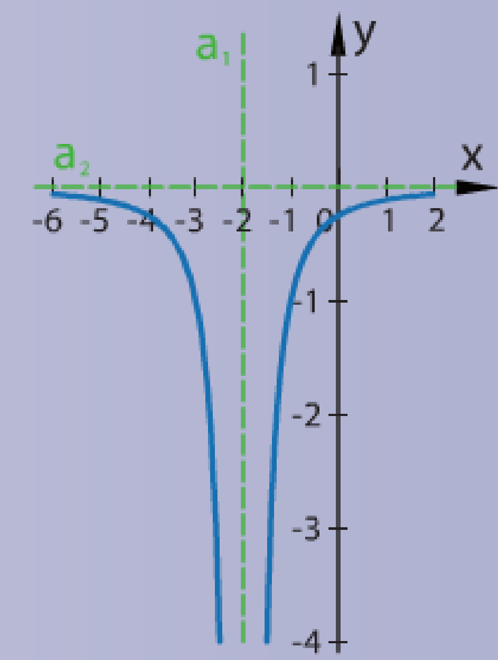
Man setzt die Glieder von $\langle x_n \rangle$ in die Funktion f(x) ein und erhält damit die Folge der Funktionswerte $\langle f(x_n) \rangle$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = \cos(\pi) = -1 \\ f(x_2) = \cos(2\pi) = +1 \ldots \\ f(x_3) = \cos(3\pi) = -1 \\ f(x_4) = \cos(4\pi) = +1 \\ \quad\quad \text{usw.} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle f(x_n) \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle$$

Die Glieder der Folge der Funktionswerte „springen" zwischen den Werten 1 und -1 hin und her. Es **existiert** an der Stelle $x_0 = 0$ daher **kein Grenzwert**, es handelt sich daher nicht um eine hebbare Umstetigkeitsstelle.

Nähert sich das Argument einer **Sinusfunktion** bzw. einer **Cosinusfunktion** an der Definitionslücke dem Ausdruck „∞", so existiert kein Grenzwert, man spricht von einer **Oszillationsstelle**.

BC **2.29** Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$.



1) Bestimme die Definitionslücke der Funktion.
2) Untersuche das Verhalten der Funktion an der Definitionslücke.
3) Gib die Gleichungen der Asymptoten an.

Lösung:

1) $(x+2)^2 = 0$
$x = -2$

- Die Berechnung der Nullstelle des Nenners führt zur Definitionslücke.

2) $\lim\limits_{x \to -2}\left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right) = -\infty$

- Der Nenner $(x+2)^2$ ist immer positiv. Daher führt die Ermittlung von g_L und g_R zum gleichen Ergebnis.

Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = -2$ einen uneigentlichen Grenzwert. Sie hat an dieser Stelle eine Polstelle.

3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right) = 0.$

Senkrechte Asymptote a_1: $x = -2$; Waagrechte Asymptote a_2: $y = 0$

BC **2.30** Ermittle die Gleichungen der Asymptoten der Funktion $f(x) = \frac{5x}{(x-1)^2}$.

Lösung:

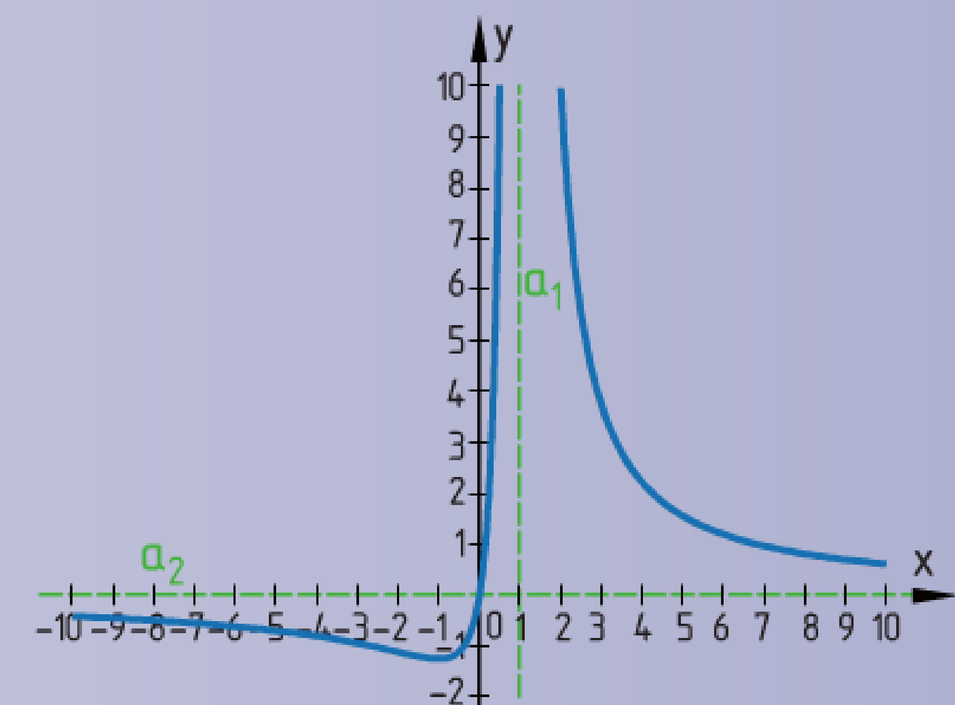
$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

- Definitionslücke

$x = 1$ ist eine Polstelle.
Senkrechte Asymptote a_1: $x = 1$

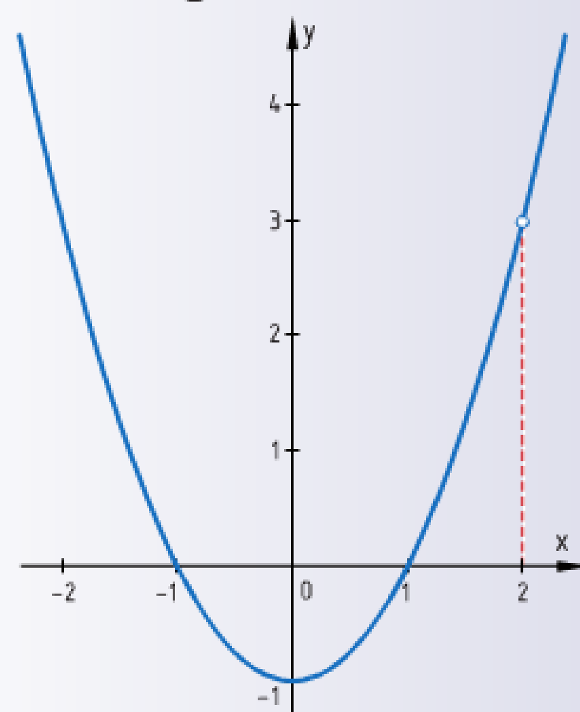
$\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\frac{5x}{x^2 - 2x + 1}\right) = 0$

Waagrechte Asymptote a_2: $y = 0$



BC **2.31** Stelle die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$ grafisch dar. Zeige rechnerisch, dass sie eine hebbare Unstetigkeitsstelle hat. Bestimme die stetige Fortsetzung der Funktion als einzelnen Term und als stückweise definierte Funktion. Beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:



Nullstelle des Nennerpolynoms berechnen und Einsetzen der Nullstelle in das Zählerpolynom:
$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ … Nullstelle des Nennerpolynoms
$2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$
Zähler- und Nennerpolynom haben die gleiche Nullstelle, somit ist die Stelle $x = 2$ eine hebbare Unstetigkeitsstelle.
Division führt zur stetigen Fortsetzung als einzelner Term.

$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = x^2 - 1 \Rightarrow \bar{f}(x) = x^2 - 1$

$g = \lim\limits_{x \to 2}\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 1) = 3$

Der Grenzwert für $x \to 2$ liefert den Funktionswert für $\bar{\bar{f}}(2)$. Damit kann eine stückweise definierte Funktion angegeben werden.

$$\bar{\bar{f}}(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

2.32 Zeichne die Funktion f. An welcher Stelle ist die Funktion unstetig? Welche Art von Unstetigkeitsstelle vermutest du? Überprüfe deine Vermutung rechnerisch.

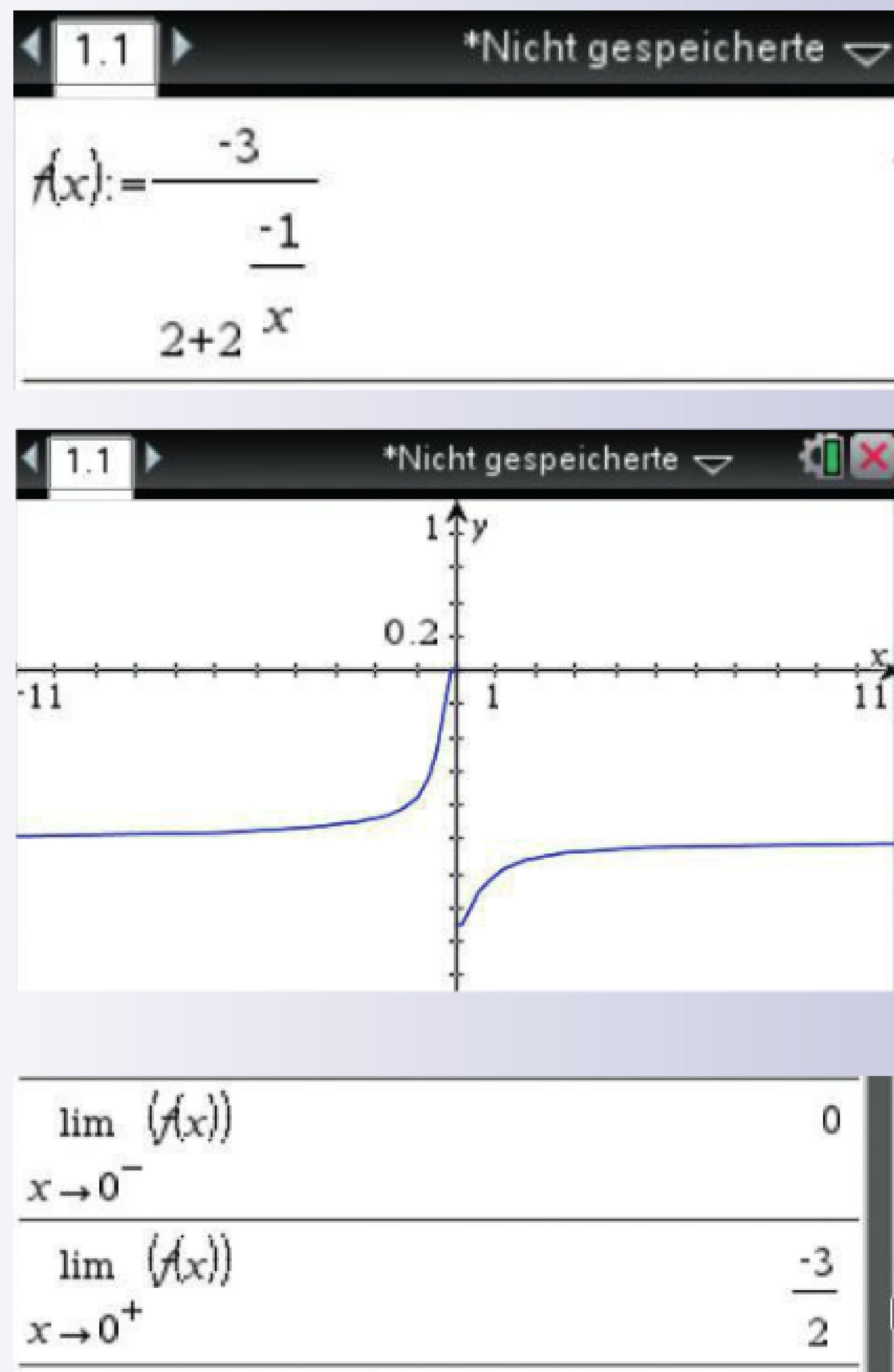
BC



a) $f(x) = \frac{-3}{2 + 2^{-\frac{1}{x}}}$ ***b)*** $f(x) = \frac{1}{x}$

Lösung mit TI-Nspire:

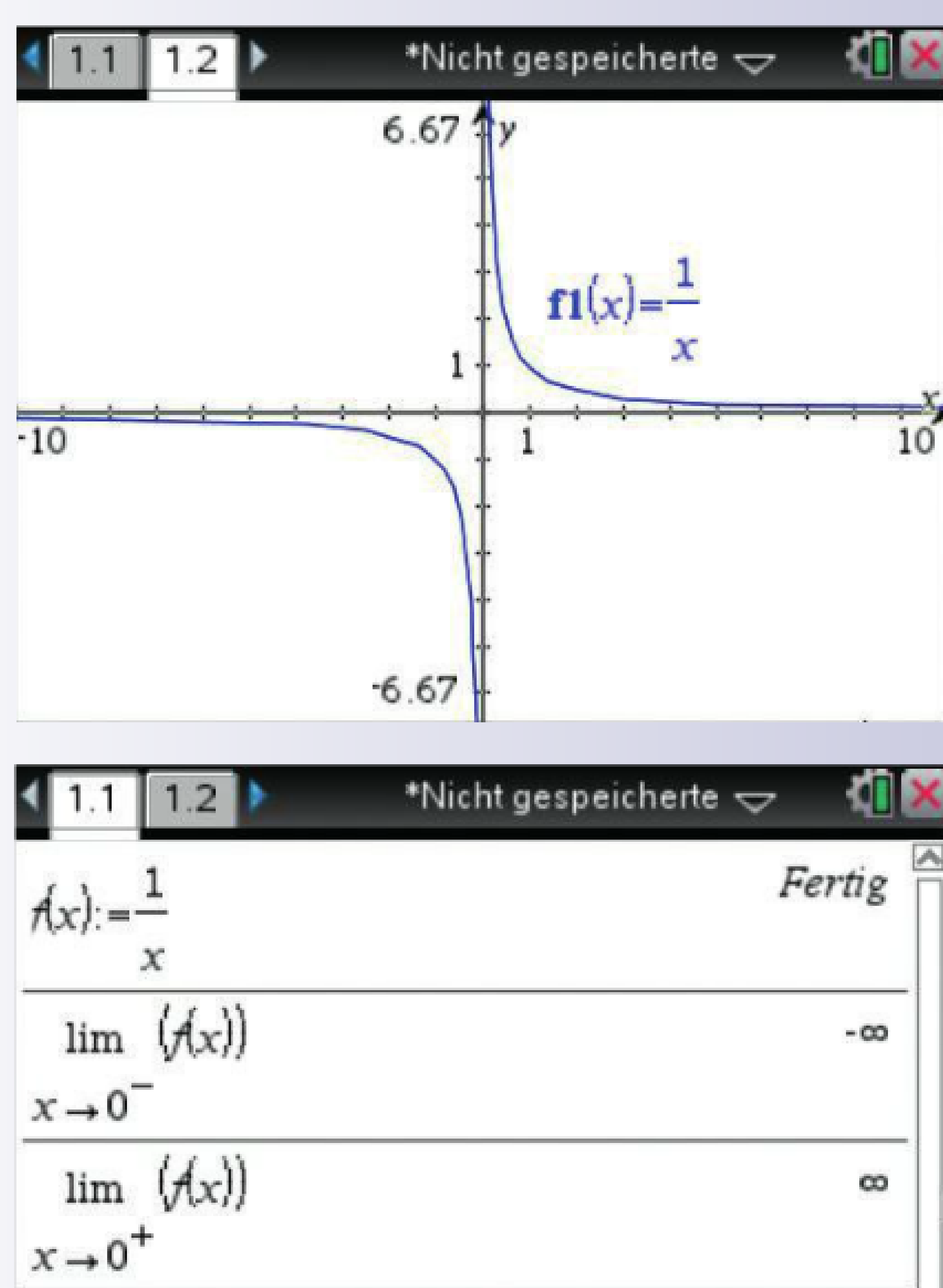
a)



- Die Funktion wird im **Calculator** definiert.
- Die grafische Darstellung erfolgt in der Applikation **Graphs**. Es werden passende Fenstereinstellungen gewählt.
- Vermutung: Definitionslücke und Sprungstelle bei $x_0 = 0$
- Berechnung von links- und rechtsseitigem Grenzwert im **Calculator**.

Die Grenzwerte $g_L = 0$ und $g_R = -1{,}5$ stimmen nicht überein. Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 0$ eine Definitionslücke und eine Sprungstelle.

b)



- Die Funktion wird in der **Graphs**-Applikation dargestellt.
- Vermutung: Polstelle bei $x_0 = 0$
- Berechnung von links- und rechtsseitigem Grenzwert im **Calculator**.

Bei links- und rechtsseitigem Grenzwert handelt es sich um uneigentliche Grenzwerte. Die Funktion hat eine Polstelle bei $x_0 = 0$.

2.33 Stelle die Funktion grafisch dar. Überlege mithilfe der Zeichnung und der Funktionsgleichung, ob und an welchen Stellen welche Arten von Unstetigkeitsstellen vorliegen.

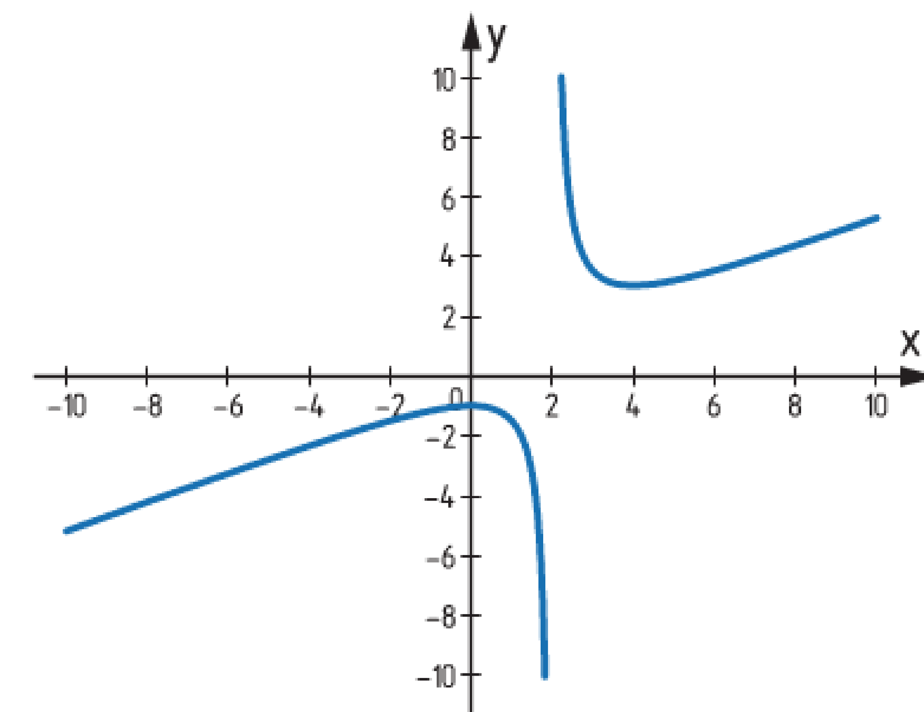
BC

a) $y = \frac{1}{1 - x^2}$ ***b)*** $y = e^{-3x^2 + 1}$ ***c)*** $y = 2^x$ ***d)*** $y = \frac{1}{\sin(x)}$ ***e)*** $y = \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

BC **2.34** Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-2}$ auf Stetigkeit. Gib die Art der Unstetigkeitsstelle an. Stelle den Funktionsgraphen der Funktion f dar und zeichne auch die Asymptote ein.

BCD **2.35** Heidi zeichnet den Graph der Funktion $y = \frac{0{,}5x^3 + 4}{x^2 - 4}$ mithilfe von Technologieeinsatz und erhält die nebenstehende Abbildung.



1) Wie viele Unstetigkeitstellen vermutest du anhand der Zeichnung?
2) Erkläre, warum nur eine senkrechte Asymptote existiert, obwohl das Nennerpolynom zwei Nullstellen hat.

Aufgaben 2.36 – 2.38: Stelle jeweils die Funktion im Intervall]−5; 5[grafisch dar und gib die Unstetigkeitsstellen an.

BC **2.36** ***a)*** $f(x) = \text{sgn}(x) - 3$ ***b)*** $f(x) = \text{sgn}(x - 2)$ ***c)*** $f(x) = 0{,}5 \cdot \text{sgn}(x + 2)$

BC **2.37** ***a)*** $f(x) = \text{int}(x) + 2$ ***b)*** $f(x) = 0{,}5 \cdot \text{int}(x)$ ***c)*** $f(x) = \text{int}(1{,}5x)$

BC **2.38** ***a)*** $f(x) = 2 \cdot \Theta(x)$ ***b)*** $f(x) = \Theta(x - 2)$ ***c)*** $f(x) = \Theta(x + 2) - \Theta(x - 4)$

BD **2.39** Ist die Funktion $f(x) = |x|$ unstetig an der Stelle $x_0 = 0$? Begründe deine Antwort.

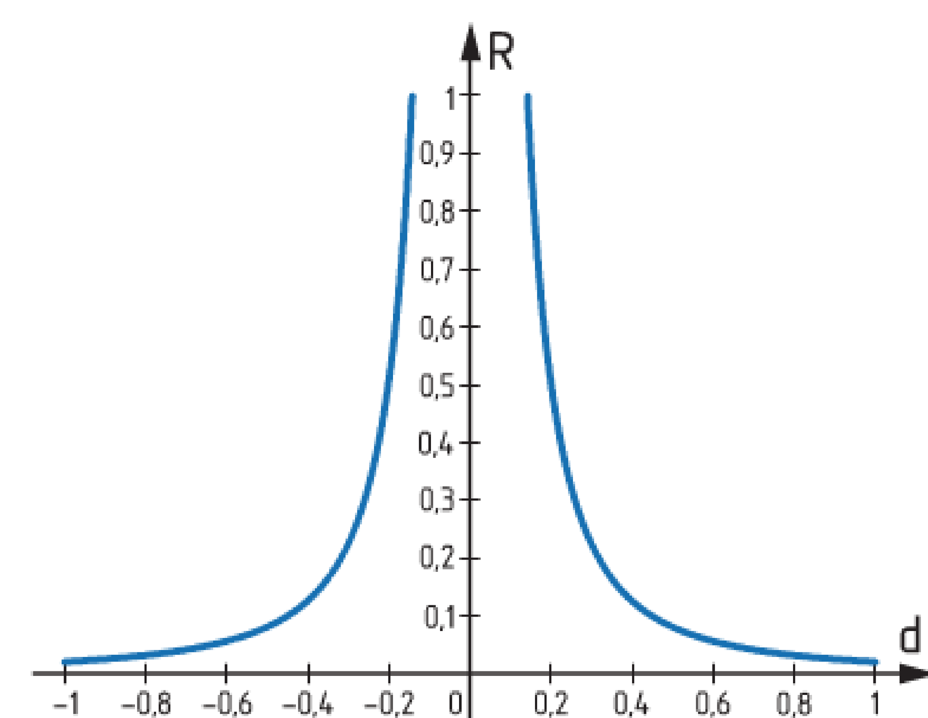
BC **2.40** Stelle die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{|x|}$ grafisch dar. Beschreibe den Verlauf der beiden Funktionsgraphen mithilfe von Grenzwerten.

BC **2.41** Stelle die Funktion f grafisch dar und zeige mithilfe des links- und des rechtsseitigen Grenzwerts, dass sie eine Sprungstelle hat.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 2 \\ x + 2 & x \geq 2 \end{cases}$ ***c)*** $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 1 \\ 2x - 3 & x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & x < 3 \\ (x-1)^2 & x \geq 3 \end{cases}$ ***d)*** $f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 2x + 1 & x \leq -1 \\ 1{,}5x - 2 & x > -1 \end{cases}$

AC **2.42** Peter stellt die Funktion $R(d) = \frac{0{,}06348}{d^2 \cdot \pi}$ dar, die die Abhängigkeit des elektrischen Widerstands R (in Ohm) vom Durchmesser d (in mm) eines 1 m langen Silberdrahts bei 20 °C angibt.



1) Beschreibe das Verhalten der Funktion, wenn d gegen 0 strebt.
2) Gib einen sinnvollen Definitionsbereich an.

BCD **2.43** Untersuche die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$. Welche Art von Unstetigkeitsstelle liegt vor? Begründe deine Antwort.

a) $f(x) = 2x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ***b)*** $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ***c)*** $f(x) = 0{,}1 \cdot \sin\left(\frac{4}{x}\right)$

BD **2.44** Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x + 1) \cdot e^{\frac{1}{20x}}$.
1) Gib die Unstetigkeitsstelle an. Berechne g_L und g_R an dieser Stelle.
2) Marko behauptet, es handelt sich bei dieser Stelle um eine Polstelle. Peter glaubt, dass es sich um eine Sprungstelle handelt. Wer hat recht? Begründe deine Antwort.

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Zusammenfassung

Grenzwert einer Funktion f für $x \to \infty$
Der Grenzwert g einer Funktion f(x) für $x \to \infty$ existiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle x_0 gibt, sodass für alle $x > x_0$ stets $|f(x) - g| < \varepsilon$ ist. Man schreibt: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$
Ist $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, so spricht man von einem **uneigentlichen Grenzwert**.

Eine Gerade a = a(x) ist eine Asymptote der Funktion y = f(x), wenn gilt:
$\lim\limits_{x \to -\infty} |f(x) - a(x)| = 0$ bzw. $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - a(x)| = 0$

Grenzwert einer Funktion f für $x \to x_0$
Die Funktion f(x) hat für $x \to x_0$ den Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, wenn es zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle x-Werte, für die $|x - x_0| < \delta$ gilt, auch $|f(x) - g| < \varepsilon$ gilt.

Linksseitiger Grenzwert: $g_L = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ **Rechtsseitiger Grenzwert:** $g_R = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Gibt es einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle x_0 und gilt $\mathbf{g_L = g_R}$, so gibt es auch den Grenzwert g der Funktion an der Stelle x_0.

Stetigkeit
Eine Funktion f ist **stetig an einer Stelle x_0**, wenn es dort einen Grenzwert gibt und dieser Grenzwert mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmt: $g = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Andernfalls nennt man die Funktion **unstetig** an der Stelle x_0.
Ist die Funktion an jeder Stelle eines beliebig gewählten Intervalls stetig, spricht man von einer in diesem Intervall **stetigen Funktion**.

Unstetigkeitsstellen
Sprungstelle, Definitionslücke (Polstelle (Pol), hebbare Unstetigkeitsstelle), Oszillationsstelle

Weitere Aufgaben

2.45 Bestimme die Definitionsmenge der gegebenen Funktion und beschreibe das Verhalten der Funktion an den Definitionslücken. Gib die Gleichungen der senkrechten Asymptoten an. BC

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ **b)** $f(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{25 - 4x^2}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$

2.46 Bestimme die stetige Fortsetzung der gegebenen Funktion. Gib sie als einzelnen Term und als stückweise definierte Funktion an. B

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 8x}{x - 4}$ **b)** $f(x) = \frac{8x^3 - 4x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$ **c)** $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$ **d)** $f(x) = \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{x^2 - 6x + 9}$

2.47 Begründe, warum die Funktion $y = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ nur eine senkrechte Asymptote hat. D

2.48 Stelle die gegebene Funktion grafisch dar. Kannst du eine oder mehrere Asymptoten vermuten? Wenn ja, gib jeweils deren Gleichung an und überprüfe mithilfe von Grenzwertberechnungen, ob es sich tatsächlich um eine Asymptote handelt. BC

a) $f(x) = \frac{1}{x - 1} - 5$ **b)** $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 3}$ **c)** $f(x) = \frac{x^4}{x^4 - 2}$ **d)** $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x - 2}$

BD **2.49** Bestimme die Definitionslücken der angegebenen Funktion und gib dort ihren Grenzwert an.

a) $b(f) = \frac{10 \cdot f}{10 - f}$ **b)** $f_E(V) = f_Q \cdot \frac{330}{v + 330}$ **c)** $R(W) = \frac{120 \cdot W}{120 + W}$ **d)** $T(\beta) = \frac{t_0}{1 - \beta^2}$

AB **2.50** Gib ein Beispiel für die Gleichung einer Funktion mit den folgenden Eigenschaften an. Begründe deine Wahl mithilfe einer Rechnung. Stelle die Funktion grafisch dar.

a) Asymptoten bei $x = -2$, $x = 1$, $y = -1$

b) Asymptoten bei $x = 1$ und $y = -3$, Definitionslücke bei $x = -2$

AB **2.51** An einer Schraubenfeder ist eine Kugel befestigt. Wird die Kugel um eine Länge von $y_0 = 5$ cm ausgelenkt, so kann die Bewegung durch das folgende Weg-Zeit-Gesetz beschrieben werden:



$y(t) = y_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$

y … Auslenkung in cm, t … Zeit in s,

(Dämpfungskonstante $\delta = 0{,}5\ s^{-1}$, Kreisfrequenz $\omega = 20\ s^{-1}$)

1) Stelle die Weg-Zeit-Funktion im Intervall [0 s; 5 s] grafisch dar.

2) Bestimme die Amplitude der Schwingung, wenn genügend viel Zeit vergangen ist. Benutze dabei die Regeln zur Grenzwertberechnung.

Aufgaben in englischer Sprache

asymptote	Asymptote	jump discontinuity/ step discontinuity	Sprungstelle
continuity of a function	Stetigkeit einer Funktion	left-sided limit/ left-hand limit	linksseitiger Grenzwert
continuous function	stetige Funktion	limit of a function	Grenzwert einer Funktion
discontinuous function	unstetige Funktion	removable discontinuity	hebbare Unstetigkeitsstelle
essential discontinuity/ infinite discontinuity	Polstelle / Pol	right-sided limit/ right-hand limit	rechtsseitiger Grenzwert
improper limit	uneigentlicher Grenzwert	singularity	Definitionslücke

B **2.52** Determine if the following function is continuous at x = 1.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{if } x \neq 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

B **2.53** Does the function $y = \frac{x^3 - 27}{9 - x^2}$ have a limit as x approaches 3? If it exists, find this limit.

B **2.54** Find the equations of the asymptotes of the curve $y = \frac{10 - x}{x + 8}$.

BC **2.55** Explain why the graph of the function $y = \frac{x^2 - 5}{2x - 3}$ cannot cross its vertical asymptote.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann die Begriffe „linksseitiger Grenzwert" und „rechtsseitiger Grenzwert" erklären.	
2	Kreuze die richtige Fortsetzung des Satzes an. Der Grenzwert g der Funktion $y = e^{-2x}$ ist… ◯ … 0 für $x \to -\infty$. ◯ … $-\infty$ für $x \to -\infty$. ◯ … -2 für $x \to +\infty$. ◯ … 0 für $x \to +\infty$.	
3	Welche der folgenden Funktionen sind stetig? A) B) C)	
4	Beschreibe jeweils den Unterschied zwischen den beiden Unstetigkeitsstellen. A) Polstelle und hebbare Unstetigkeitsstelle B) Hebbare Unstetigkeitsstelle und Sprungstelle C) Oszillationsstelle und Polstelle	
5	„Eine Funktion nähert sich einer Asymptote beliebig nahe an, aber sie berührt oder schneidet diese Asymptote nie." Ist diese Aussage richtig? Begründe deine Antwort.	
6	Ich kann ein Beispiel angeben für eine Funktion, die A) nur eine waagrechte Asymptote, B) nur eine senkrechte Asymptote, C) eine waagrechte und eine senkrechte Asymptote hat.	
7	Zeichne jeweils die Asymptoten ein. A) B)	
8	Ich kann die Gleichung der Asymptote und der Grenzkurve der Funktion $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 6}{x - 3}$ angeben.	

Lösung:
1) siehe Seite 45 2) Der Grenzwert g der Funktion $y = e^{-2x}$ ist 0 für $x \to +\infty$. 3) A) und C) 4) siehe Seiten 51ff
5) Nein, nur senkrechte Asymptoten können den Funktionsgraph nicht schneiden, siehe Aufgabe 2.4 b).
6) A) $y = e^{-x}$, B) $y = \ln(x)$, C) $y = \frac{1}{x} + 3$ 7) A) a_1: $x = -2$, a_2: $y = 1$; B) a_1: $x = -5$, a_2: $x = 5$, a_3: $y = 0{,}5x$ 8) a: $x = 3$ und k: $y = x^2 + x + 3$

3 Differentialrechnung

Viele Bereiche der Mathematik erlernen wir, indem wir im Wesentlichen den Ablauf der historischen Entwicklung nachvollziehen. In der **Analysis** (griechisch: „analysis“ = Auflösung) verhält es sich genau umgekehrt. Die Fragen nach dem Inhalt von Flächen, die nicht geradlinig begrenzt sind, und nach Möglichkeiten zur Volumenberechnung standen am Anfang eines wichtigen Kapitels der Mathematikgeschichte und wurden bereits in der Antike gestellt. Sehr viel später wurde der Zusammenhang zur Frage nach der Steigung einer Tangente bzw. – allgemein formuliert – der Änderungsrate einer Funktion, hergestellt. Diese beiden Probleme werden heute mithilfe der so genannten **Infinitesimalrechnung**, die sich aus der Differential- und der Integralrechnung zusammensetzt, gelöst. Die mathematischen Grundlagen dafür wurden erst im 19. Jahrhundert mit dem Grenzwertbegriff geschaffen.

3.1 Historischer Rückblick

Vorläufer in der Antike

Bereits die Ägypter fanden für den Flächeninhalt eines Kreises – vermutlich anhand nebenstehender Figur – die folgende Näherung:

$$A \approx \frac{7d^2}{9} \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$ (Abb. 3.1; siehe Aufgabe 3.1)

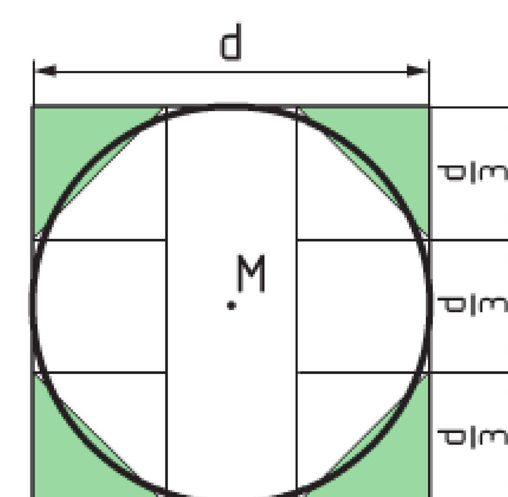


Abb. 3.1

Auf der Suche nach einer genauen Formel, also der „Quadratur des Kreises“, gelang es dem griechischen Mathematiker **Hippokrates von Chios** (um 470 v. Chr.) erstmals, eine Formel für den Inhalt einer krummlinig begrenzten Fläche zu finden. Er konnte zeigen, dass der Flächeninhalt der beiden „Möndchen“ gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist. (Abb. 3.2; siehe Aufgabe 3.2)

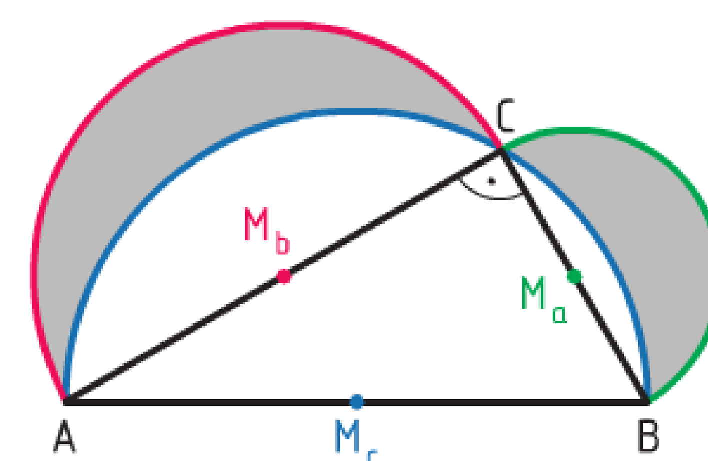


Abb. 3.2

Die Idee, Flächen durch „Ausschöpfen“ mittels Vielecken zu approximieren, wurde von **Eudoxos von Knidos** (um 408 v. Chr.) formuliert. Sie wurde später Exhaustionsprinzip genannt und kommt einer Grenzwertdefinition bereits nahe. **Archimedes** (ca. 287 v. Chr. – 212 v. Chr.) verwendete diese Methode zur Berechnung des Flächeninhalts krummliniger Figuren wie zum Beispiel Kreis oder Parabelsegment (Abb. 3.3; siehe Aufgabe 3.3) und des Volumens von Körpern, die durch gekrümmte Flächen begrenzt sind wie zum Beispiel die Kugel. Die Überlegungen, die Archimedes dabei anstellte, entsprachen in vielerlei Hinsicht den Ideen der Differential- und Integralrechnung, welche aber erst fast 2 000 Jahre später mathematisch korrekt formuliert wurden.

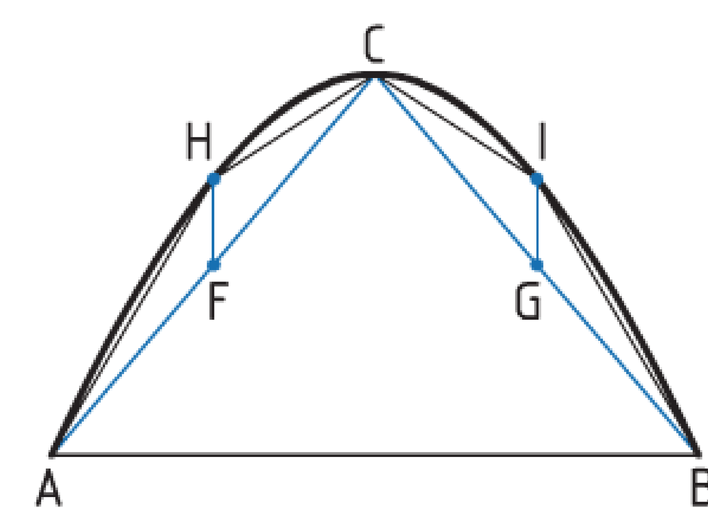
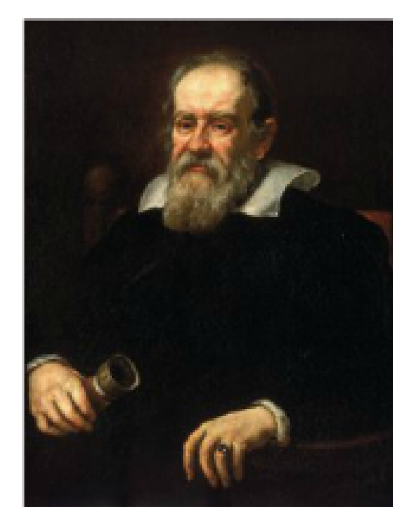


Abb. 3.3

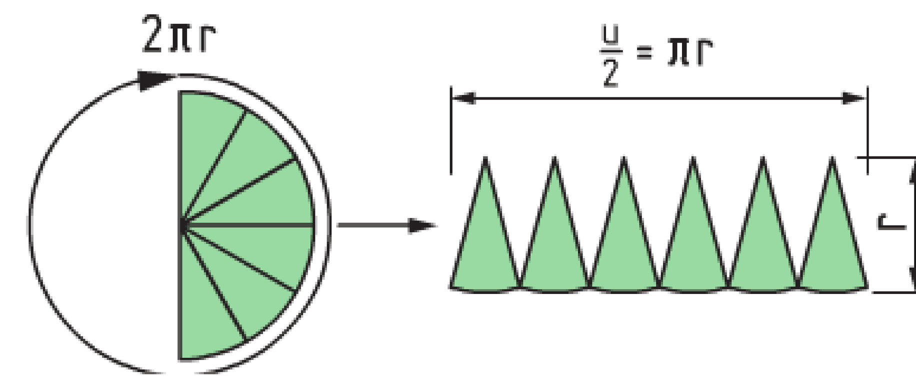
Entwicklung ab der Renaissance


Johannes Kepler (1571 – 1630)

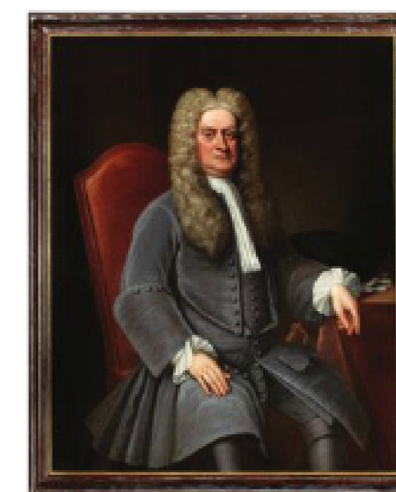
In der Renaissance wurde die griechische Wissenschaft und Philosophie zu neuem Leben erweckt. Von Bedeutung waren die Mathematiker und Astronomen **Johannes Kepler** und **Galileo Galilei**, die bahnbrechende Entdeckungen in vielen Gebieten der Naturwissenschaften machten. Sie haben die für uns so selbstverständliche Mathematisierung der Physik ermöglicht und Bewegung zu einem Hauptobjekt der neuen Naturforschung gemacht. *„Das Buch der Natur ist in mathematischer Sprache geschrieben...“*
(Galileo Galilei: Il Saggiatore,1623)


Galileo Galilei (1564 – 1642)

Kepler bewies bei der Untersuchung der Flächengeschwindigkeit eines Planeten (das ist die vom Radiusvektor überstrichene Fläche pro Zeiteinheit) die von Archimedes angegebene Formel für die Kreisfläche: $A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot r$



Dabei argumentierte er – anders als Archimedes – bereits mit unendlich vielen, unendlich kleinen Dreiecken mit der Grundlinie Δu.
Beeinflusst durch Keplers Methode gewann Galilei aus dem Geschwindigkeitsgesetz $v = a \cdot t$ den Zusammenhang $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ (siehe Abschnitt 5, Seite 171f). Er arbeitete in seiner Herleitung mit unendlich kleinen Zeitintervallen, den so genannten **Indivisibilien**, das sind nicht weiter teilbare geometrische Objekte. Auf dieser Methode basierend entwickelte **Bonaventura Cavalieri** den nach ihm benannten Satz von Cavalieri (siehe Band 1, Abschnitt 8.1).
Auch das Problem der **Tangentenermittlung** kann bis zu den griechischen Mathematikern zurückverfolgt werden. Mit der Entdeckung des Brechungsgesetzes von **Snellius** 1618, benannt nach **Willebrord van Roijen Snell** (niederländischer Astronom, 1580 – 1626), wurde die Berechnung der Normalen (und damit der Tangente) für die Konstruktion von Mikroskopen wichtig. Alle großen Mathematiker des 17. Jh. haben sich damit beschäftigt. Der Zusammenhang zwischen dem Tangentenproblem und dem der Berechnung von Flächen war in bestimmten Fällen schon bekannt. Der Experte auf diesem Gebiet war **Isaac Barrow** (englischer Mathematik, 1630 – 1677). In seinen Werken sind bereits viele der Zusammenhänge, die wir im Lauf der nächsten Kapitel behandeln, vorformuliert.


Isaac Newton
(1643 – 1727)

Als einer der beiden „Erfinder“ der Differential- und Integralrechnung gilt Barrows Schüler **Isaac Newton**, einer der größten Mathematiker der Geschichte. Newton, der kurz nach Galileis Tod zur Welt kam, ging wie dieser von Phänomenen der Bewegung aus. Er bezeichnete veränderliche Größen als **Fluenten**, die „Geschwindigkeiten“ der Veränderung als **Fluxionen** und argumentierte mit unendlich kleinen Zeitspannen. Newton veröffentlichte seine Erkenntnisse wegen seiner Zweifel – vor allem an der Notation, die sich tatsächlich langfristig nicht durchsetzte – jahrelang nicht.


Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

Zeitgleich entwickelte **Gottfried Wilhelm Leibniz** unabhängig von Newton die Grundlagen der Infinitesimalrechnung. Er „teilte“ eine Kurve in unendlich viele, unendlich kleine Strecken, sodass er eine an diese Kurve gelegte Tangente berechnen konnte. Der mathematische Formalismus, den er für diese Berechnungen entwickelte, war dem Newtons überlegen und wurde zum mathematischen Standard. Der Streit zwischen Newton und Leibniz, wer als erster die Infinitesimalrechnung entwickelt habe, ging in die Mathematikgeschichte ein, konnte aber die Weiterentwicklung der Differentialrechnung nicht bremsen. Kritiker argumentierten, dass das Arbeiten mit unendlich (infinitesimal) kleinen Größen nichts anderes als ein „mathematischer Taschenspielertrick“ sei.
Die formalen Ungereimtheiten wurden erst 1821 mit der Definition des Grenzwertbegriffs durch **Augustin-Louis Cauchy** (französischer Mathematiker, 1789 – 1857) ausgeräumt.

3.1 Leite mithilfe von Abbildung 3.1 die ägyptische Formel für die Kreisfläche her. Welcher Näherungswert für π ergibt sich daraus? ABD

3.2 Zeige, dass die Fläche der Möndchen des Hippokrates gleich der des rechtwinkligen Dreiecks ist (Abbildung 3.2). ABD

3.3 Berechne die Fläche eines Parabelsegments näherungsweise wie in Abbildung 3.3 gezeigt. Für die eingezeichneten Punkte gilt: $A(0|0)$, $B(8|0)$, $C(4|3{,}2)$ AB

3.2 Mittlere und momentane Änderungsraten

Änderungsraten begegnen uns im Alltag auf vielfältige Weise, wie zum Beispiel die Konzentrationsänderung von Milch in Kaffee, die Geschwindigkeitsänderung während einer Zugfahrt oder die Änderung der Verkaufszahlen eines Produkts im Laufe eines Jahrs. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit so genannten mittleren und momentanen Änderungsraten.



3.2.1 Mittlere Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit

ABD **3.4** Der Österreicher Hannes Reichelt gewann 2014 die Abfahrt auf der Kitzbühler Streif.

1) Fertige mithilfe der in der Tabelle angeführten Werte ein Weg-Zeit-Diagramm der Fahrt von Hannes Reichelt an.

2) Berechne jeweils die mittlere Geschwindigkeit (in $\frac{km}{h}$) zwischen den Messpunkten 1 und 3 sowie zwischen 4 und 5.

3) In der letzten Spalte der Tabelle sind die gemessenen Geschwindigkeiten angegeben. Begründe, wie es zu den Unterschieden zu den in **2)** berechneten Geschwindigkeiten kommt.

Messpunkt	Weg (m)	Zeit (min)	Geschw. $\left(\frac{km}{h}\right)$
0 Start	0	00:00.00	0
1 Mausefalle	450	00:17.97	
2 Gschöss	890	00:32.93	109,8
3 Alte Schneise	1 440	01:01.95	
4 Ganslern	2 600	01:33.33	
Zielschuss		01:55.74	119,5
5 Ziel	3 494	02:03.38	

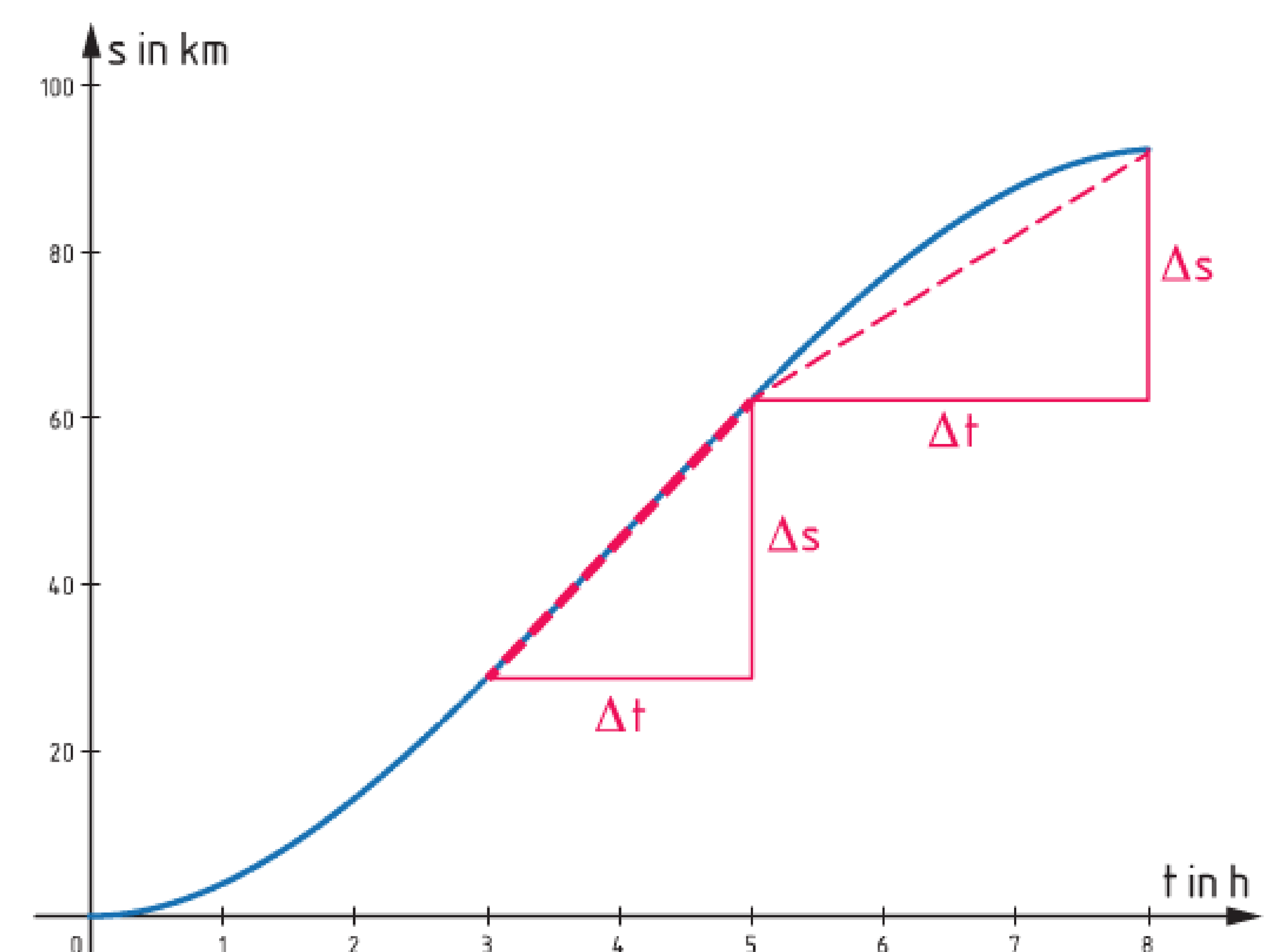
Bewegungen können mathematisch mithilfe von Funktionen erfasst werden. Dabei wird der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der dafür benötigten Zeit t angegeben.
ZB: In der Abbildung ist die Fahrt eines Radfahrers dargestellt. Dabei ist auf der waagrechten Achse die Zeit t in Stunden ab Beginn der Fahrt und auf der senkrechten Achse der zurückgelegte Weg s in Kilometer eingetragen.

Die **mittlere Geschwindigkeit** $\bar{v}$ in einem Zeitintervall $[t_0; t_1]$ entspricht dem Quotienten aus dem zurückgelegten Weg durch die dafür benötigte Zeit.

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Im Intervall [3 h; 5 h] ist die Geschwindigkeit v konstant und gleich der mittleren Geschwindigkeit. Für die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ gilt:

$$\bar{v} = \frac{62{,}5\text{ km} - 30\text{ km}}{5\text{ h} - 3\text{ h}} = 16{,}25\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$



Wird mithilfe obiger Formel die mittlere Geschwindigkeit im Intervall [5h; 8h] berechnet, so ergibt sich: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{92{,}5\text{ km} - 62{,}5\text{ km}}{8\text{ h} - 5\text{ h}} = 10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

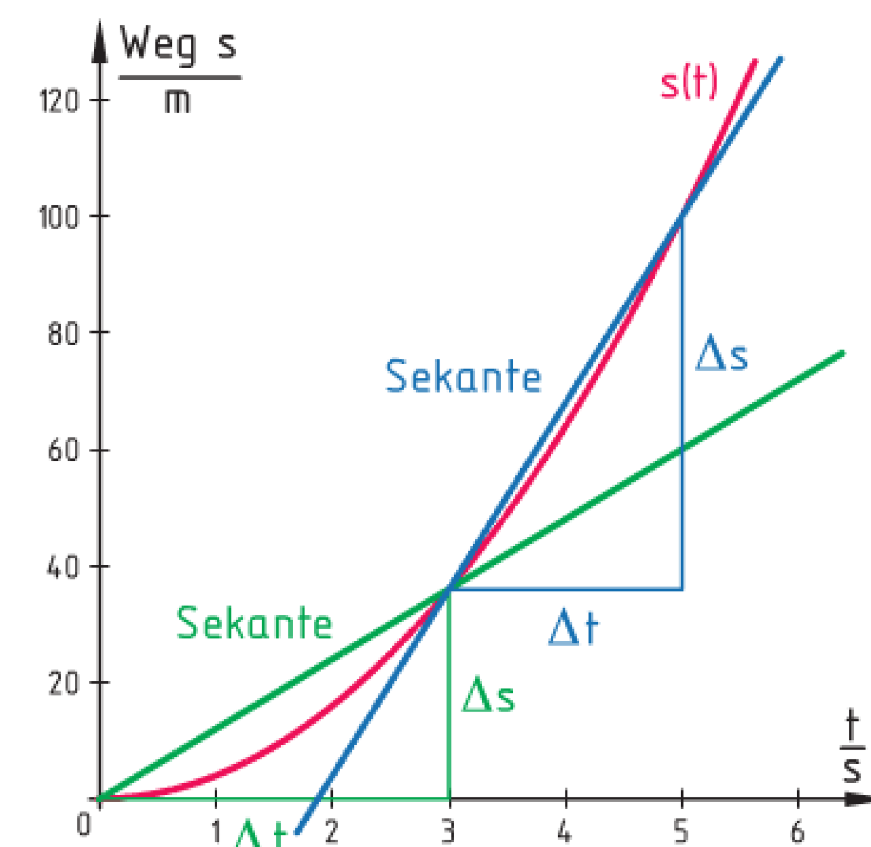
In diesem Intervall entspricht die mittlere Geschwindigkeit nicht der tatsächlichen Geschwindigkeit des Radfahrers. Er fährt zu Beginn schneller und wird immer langsamer.

Bemerkung: Umgangssprachlich wird die mittlere Geschwindigkeit häufig als Durchschnittsgeschwindigkeit oder durchschnittliche Geschwindigkeit bezeichnet.

Im folgenden Beispiel wird die mittlere Geschwindigkeit genau untersucht und die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt ermittelt.

ZB: Ein Rennwagen, der zum Zeitpunkt t = 0 s aus dem Stand auf geradliniger Strecke mit einer Beschleunigung von $a = 8\,\frac{m}{s^2}$ losfährt, legt den Weg $s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 = 4\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$ zurück.

Wir berechnen jeweils die mittlere Geschwindigkeit des Wagens innerhalb der ersten drei Sekunden und innerhalb der darauf folgenden zwei Sekunden.



Im Zeitintervall [0 s; 3 s] gilt:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{36\,m - 0\,m}{3\,s - 0\,s} = 12\,\frac{m}{s} = 43{,}2\,\frac{km}{h}$$

Im Zeitintervall [3 s; 5 s] gilt:

$$\bar{v} = \frac{100\,m - 36\,m}{5\,s - 3\,s} = \frac{64\,m}{2\,s} = 32\,\frac{m}{s} = 115{,}2\,\frac{km}{h}$$

Zeichnet man die jeweiligen Differenzen Δs und Δt in das Weg-Zeit-Diagramm ein, kann man die **Steigungsdreiecke** zweier Sekanten des Funktionsgraphen von s(t) erkennen.
$\bar{v}$ ist ein Quotient, Δs und Δt sind Differenzen. Daher nennt man den Ausdruck

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$ **Differenzenquotient**.

> Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ in einem Intervall $[t_0; t_1]$ wird mithilfe des **Differenzenquotienten** $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ berechnet. Geometrisch entspricht dies der Steigung der zugehörigen **Sekante** des Funktionsgraphen von s(t).

Um das Fahrverhalten des Rennwagens zu analysieren, ist es wichtig, die **Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt**, die **Momentangeschwindigkeit**, zu kennen.

ZB: Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0 = 2$ s soll für $s(t) = 4\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$ ermittelt werden.

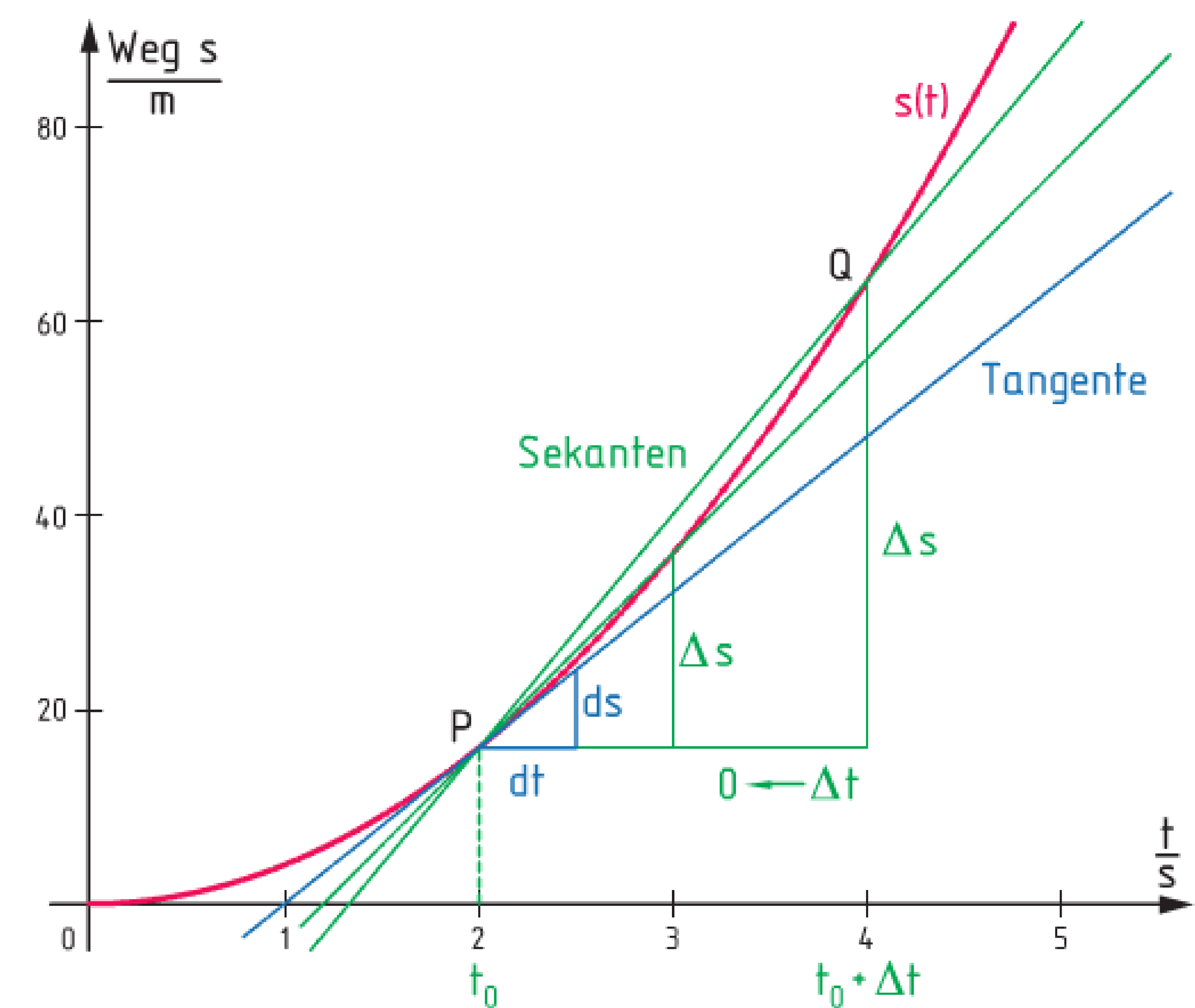
Um die gesuchte Momentangeschwindigkeit zu nähern, berechnet man zunächst die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ für immer kleiner werdende Zeitintervalle [2 s; 2 s + Δt] (siehe Tabelle).
Je kleiner der Zeitabschnitt Δt wird, desto kürzer wird auch der Weg Δs. Ist Δt „fast 0", so wird auch der zurückgelegte Weg Δs „fast 0".
Anhand der Werte aus der Tabelle kann man nun vermuten, dass sich $\bar{v}$ dem Wert $16\,\frac{m}{s}$ nähert, wenn sich Δt dem Wert 0 nähert, die Momentangeschwindigkeit also $16\,\frac{m}{s}$ beträgt.

Zeit-intervall	Zeitabschnitt Δt	Mittlere Geschw. $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
[2; 4]	$\Delta t_1 = 2$	$\bar{v} = \frac{64 - 16}{4 - 2} = \frac{48}{2} = 24\,\frac{m}{s}$
[2; 3]	$\Delta t_2 = 1$	$\bar{v} = \frac{20}{1} = 20\,\frac{m}{s}$
[2; 2,5]	$\Delta t_3 = 0{,}5$	$\bar{v} = \frac{9}{0{,}5} = 18\,\frac{m}{s}$
[2; 2,1]	$\Delta t_4 = 0{,}1$	$\bar{v} = \frac{1{,}64}{0{,}1} = 16{,}4\,\frac{m}{s}$
[2; 2,01]	$\Delta t_5 = 0{,}01$	$\bar{v} = \frac{0{,}1604}{0{,}01} = 16{,}04\,\frac{m}{s}$
[2; 2,001]	$\Delta t_6 = 0{,}001$	$\bar{v} = \frac{0{,}016004}{0{,}001} = 16{,}004\,\frac{m}{s}$

Tatsächlich berechnen kann man die Momentangeschwindigkeit jedoch nicht durch bloßes Einsetzen in den Differenzenquotienten, da man für $\Delta t \to 0$ den unbestimmten Ausdruck „$\frac{0}{0}$" erhält. Die Berechnung der Momentangeschwindigkeit erfordert also weitere Überlegungen.

Differentialrechnung

In der rechten Abbildung ist das Weg-Zeit-Diagramm des Rennwagens von Seite 63 grafisch dargestellt. Ausgehend von einem Punkt P wird eine Sekante durch den Punkt Q gelegt. Die Steigung der Sekante PQ entspricht der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ im Intervall $[t_0; t_0 + \Delta t]$: $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$



Werden nun die Zeitintervalle Δt verkürzt, so „wandert" der Punkt Q entlang des Graphen zum Punkt P. Dabei nähern sich die Steigungen der Sekanten der Steigung der Tangente. Wenn Q mit dem Punkt P zusammenfällt, wird aus der Sekante die Tangente. Die Steigung der Tangente ist der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta t \to 0$ und wird mit $\frac{ds}{dt}$ bezeichnet [sprich: „**d s nach d t**"].

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}\right)$$

Der Ausdruck $\frac{ds}{dt}$ wird als **Differentialquotient** bezeichnet und entspricht in diesem Zusammenhang der **Momentangeschwindigkeit** v.

Um den Wert der Momentangeschwindigkeit v des Rennwagens zum Zeitpunkt $t_0 = 2$ s, also v(2 s), zu erhalten, berechnet man den Grenzwert für $\Delta t \to 0$.
Man verwendet für den Differentialquotienten an einer bestimmten Stelle t_0 unter anderem die Schreibweise: $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t = t_0}$

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{s(2 + \Delta t) - s(2)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{4 \cdot (2 + \Delta t)^2 - 4 \cdot 2^2}{\Delta t}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{4 \cdot (4 + 4\Delta t + (\Delta t)^2) - 16}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{16\Delta t + 4 \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\cancel{\Delta t} \cdot (16 + 4 \cdot \Delta t)}{\cancel{\Delta t}}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}(16 + 4 \cdot \Delta t) = 16$$

Der Rennwagen hat zum Zeitpunkt $t_0 = 2$ s eine Momentangeschwindigkeit von 16 $\frac{m}{s}$.

Der Differentialquotient der Funktion $s(t) = 4t^2$ kann auch für einen beliebig gewählten, aber festen Zeitpunkt t_0 angeben werden.

$$v(t_0) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{4 \cdot (t_0 + \Delta t)^2 - 4 \cdot t_0^2}{\Delta t}\right) =$$

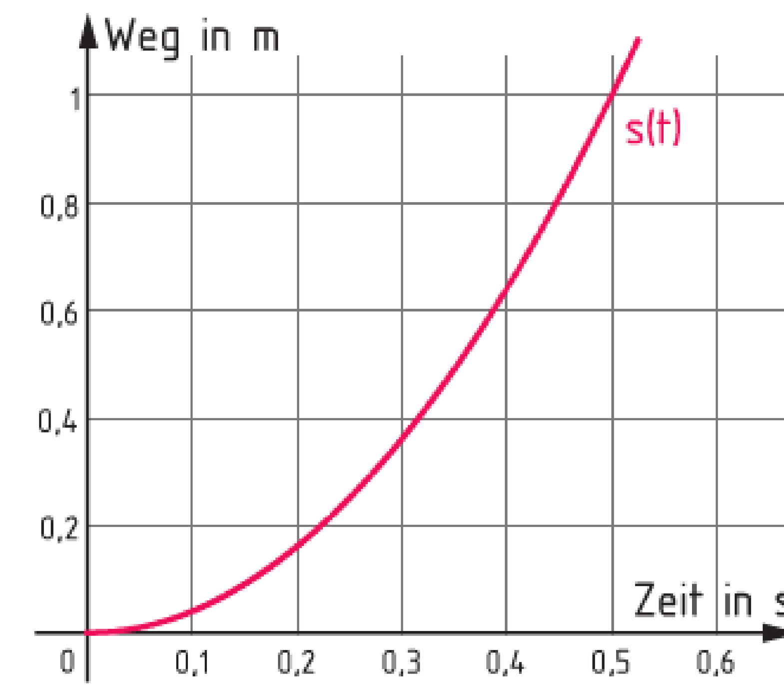
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{4 \cdot (t_0^2 + 2t_0 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) - 4t_0^2}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{8t_0 \cdot \Delta t + 4 \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta t \cdot (8t_0 + 4 \cdot \Delta t)}{\Delta t}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}(8t_0 + 4 \cdot \Delta t) = 8t_0$$

Für einen beliebigen Zeitpunkt t_0 gilt: $v(t_0) = 8\ \frac{m}{s^2} \cdot t_0$

Für t_0 kann jeder Wert aus dem Definitionsbereich der Funktion s eingesetzt werden. Das bedeutet, dass **jedem beliebigen Zeitpunkt t** ein Wert für **die momentane Geschwindigkeit v zugeordnet** werden kann.
In unserem Beispiel gilt: $v(t) = \frac{ds}{dt} = 8\ \frac{m}{s^2} \cdot t$
Zum Beispiel gilt für die Momentangeschwindigkeit des Rennwagens zum Zeitpunkt t = 3 s:
$v(3\ s) = 8\ \frac{m}{s^2} \cdot 3\ s = 24\ \frac{m}{s}$

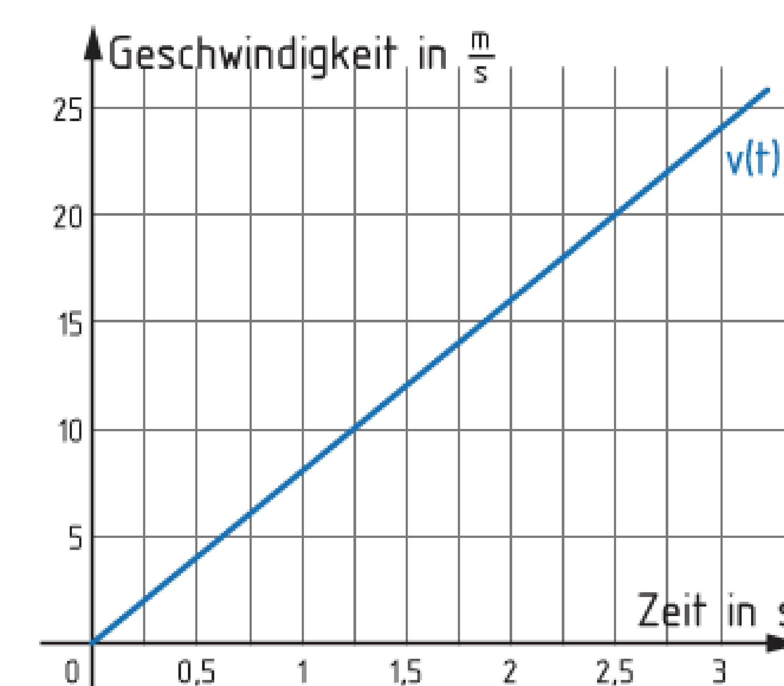
Zeitabhängige Funktionen



Die nebenstehende Abbildung stellt den Graphen der **Weg-Zeit-Funktion s** dar:

$$s(t) = 4\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Die Funktion beschreibt den zurückgelegten Weg s.

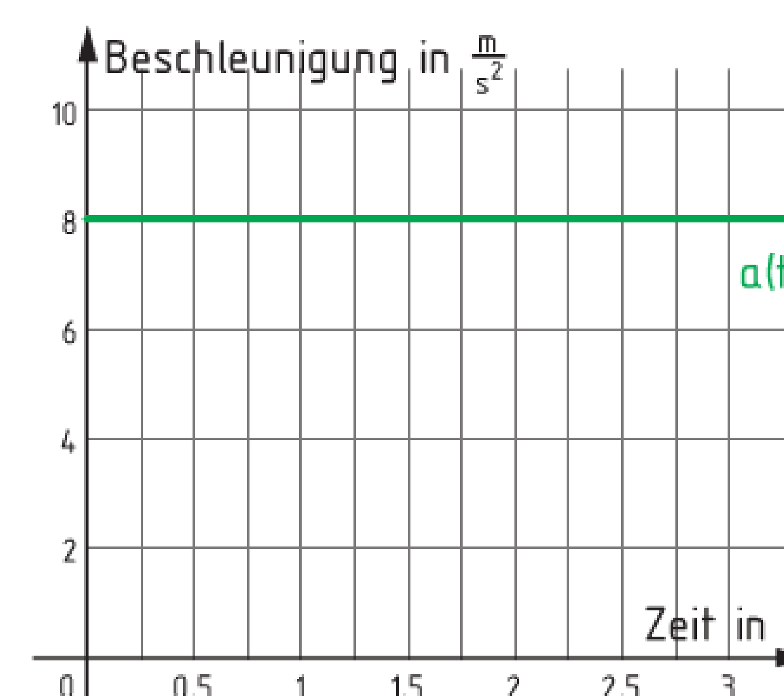


Gibt man den **Differentialquotienten** in Abhängigkeit von der Zeit an, erhält man die Funktion v(t), die die **Momentangeschwindigkeit**, also die Änderungsrate des zurückgelegten Wegs s, zu jedem beliebigen Zeitpunkt t angibt. Für obiges Beispiel gilt:

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = 8\ \frac{m}{s^2} \cdot t$$

Die Momentangeschwindigkeit wird mit $v = \dot{s}$ [sprich: „s Punkt"] bezeichnet.

Beschreibt eine Funktion nicht den zurückgelegten Weg sondern die Entfernung von einem Punkt, so liegt eine Position-Zeit-Funktion vor. Diese Funktion kann auch fallend sein. Der Differentialquotient nimmt dann negative Werte an. Ein negativer Wert für die Geschwindigkeit bedeutet, dass die Bewegung in die entgegengesetzte Richtung erfolgt. Die Momentangeschwindigkeit ist dann der Absolutbetrag des Differentialquotienten.



Ebenso kann man den **Differentialquotienten der Funktion v** ermitteln. Man erhält die Änderungsrate der Geschwindigkeit v(t) zu jedem beliebig Zeitpunkt t. Diese Änderungsrate ist die **Beschleunigung a**. Sie stellt ebenfalls eine Funktion in Abhängigkeit von der Zeit dar. Im hier angegebenen Beispiel ist die Momentangeschwindigkeit eine lineare Funktion. Sie hat eine konstante Steigung, die Beschleunigung ist eine konstante Funktion.

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = 8\ \frac{m}{s^2}$$

Die Beschleunigung wird mit $a = \dot{v} = \ddot{s}$ [sprich: „s zwei Punkt"] bezeichnet.

Die **Momentangeschwindigkeit v** zum Zeitpunkt t entspricht geometrisch der **Steigung der Tangente** an den Funktionsgraphen der Funktion s an der Stelle t und wird mithilfe des **Differentialquotienten** $\frac{ds}{dt}$ ermittelt.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}\right)$$

Die **Beschleunigung a** zum Zeitpunkt t entspricht geometrisch der Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen der Funktion v an der Stellt t. Sie wird mithilfe des Differentialquotienten $\frac{dv}{dt}$ ermittelt.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}\right)$$

Schreibweisen:

$v = \dot{s}$

$a = \dot{v} = \ddot{s}$

ABCD **3.5** Ein Ball wird zum Zeitpunkt t = 0 s mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 35\,\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geschossen. Für die Höhe h gilt: $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit $g \approx 10\,\frac{m}{s^2}$
h … Höhe in m, t … Zeit in s

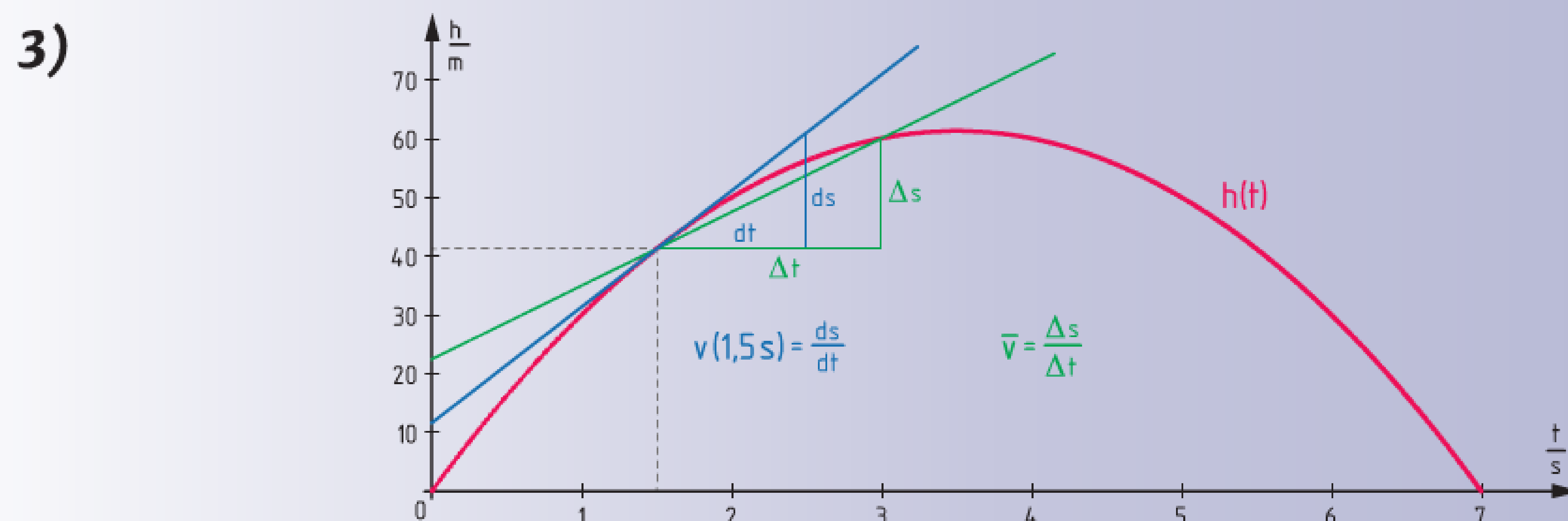
1) Berechne die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ im Zeitintervall [1,5 s; 3 s].
2) Berechne die Momentangeschwindigkeit v des Balls zum Zeitpunkt t_0 = 1,5 s.
3) Stelle h(t) und die Ergebnisse aus ***1)*** und ***2)*** grafisch dar. Beschreibe den Unterschied.
4) Berechne die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ im Zeitintervall [4,5 s; 6 s]. Vergleiche das Ergebnis mit dem aus ***1)***. Erkläre mögliche Unterschiede.
5) Es soll die mittlere Geschwindigkeit im Intervall [2s; 5s] berechnet werden.
Ein Schüler rechnet:
$\overline{v} = \frac{h(5) - h(2)}{5 - 2} = \frac{50 - 50}{3} = 0$ … Die mittlere Geschwindigkeit ist null.
Erkläre, welcher Denkfehler gemacht wurde.

Lösung:

1) $h(t) = 35 \cdot t - 5 \cdot t^2$
$\overline{v} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(3) - h(1{,}5)}{3 - 1{,}5} = \frac{60 - 41{,}25}{1{,}5} = 12{,}5$
Der Ball hat zwischen 1,5 s und 3 s eine mittlere Geschwindigkeit von $12{,}5\,\frac{m}{s}$.

2) $v(1{,}5) = \left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=1{,}5} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{h(1{,}5 + \Delta t) - h(1{,}5)}{\Delta t}\right) =$
$= \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{[35 \cdot (1{,}5 + \Delta t) - 5 \cdot (1{,}5 + \Delta t)^2] - [35 \cdot 1{,}5 - 5 \cdot 1{,}5^2]}{\Delta t}\right) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{20 \cdot \Delta t - 5 \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t}\right) =$
$= \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta t \cdot (20 - 5 \cdot \Delta t)}{\Delta t}\right) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(20 - 5 \cdot \Delta t) = 20$
Zum Zeitpunkt t_0 = 1,5 s hat der Ball eine Momentangeschwindigkeit von $20\,\frac{m}{s}$.

3)



Die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ entspricht der Steigung der Sekante zwischen 1,5 s und 3 s. Die Momentangeschwindigkeit v ist die Steigung der Tangente zum Zeitpunkt 1,5 s.

4) $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(6) - h(4{,}5)}{6 - 4{,}5} = -17{,}5 \Rightarrow \overline{v} = \left|\frac{\Delta h}{\Delta t}\right| = 17{,}5\,\frac{m}{s}$
Im Intervall [1,5 s; 3 s] hat der Differenzenquotient einen positiven Wert, der Ball bewegt sich nach oben. Im Intervall [4,5 s; 6 s] hat der Differenzenquotient einen negativen Wert, der Ball fällt. Um die mittlere Geschwindigkeit angeben zu können, muss man den Betrag des Differenzenquotienten bilden. Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $17{,}5\,\frac{m}{s}$.

5) In der vorliegenden Berechnung wurde nicht berücksichtigt, dass zwischen der Auf- und der Abwärtsbewegung des Balls unterschieden werden muss.

3.6 Welche der folgenden Aussagen sind falsch? Der Term $\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ … C

A) … gibt die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 an.
B) … gibt die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[t_0; t_1]$ an.
C) … steht für die mittlere Änderungsrate der Funktion s(t) im Intervall $[t_0; t_1]$.
D) … kann den Wert null annehmen.
Dabei gilt: s … Weg, t … Zeit

3.7 Im Kaisermühlentunnel auf der A22, mit 2 150 m der längste Straßentunnel Wiens, wird die Einhaltung der erlaubten Höchstgeschwindigkeit von 80 $\frac{km}{h}$ mittels „Section Control" überwacht. Weil Herr Mann durch ein Telefonat mittels Freisprechanlage abgelenkt ist, fährt er mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ in den Tunnel ein. Er bemerkt seinen Fehler nach 500 m. Erkläre, wie er reagieren muss, um einer Verwaltungsstrafe zu entgehen. BCD



3.8 Berechne die mittlere Geschwindigkeit im angegebenen Intervall. B

a) $s(t) = 2\,m + 15\,\frac{m}{s} \cdot t + 0{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, [0 s; 5 s]
b) $h(t) = 30\,m - 3{,}5\,\frac{m}{s} \cdot t - 4{,}91\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, [1 s; 2 s]
c) $h(t) = 4\,\frac{m}{s} \cdot t - 4{,}91\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, [1 s; 1,5 s]
d) $s(t) = 100\,m + 4{,}91\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, [0 s; 3 s]

3.9 Berechne die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0. B

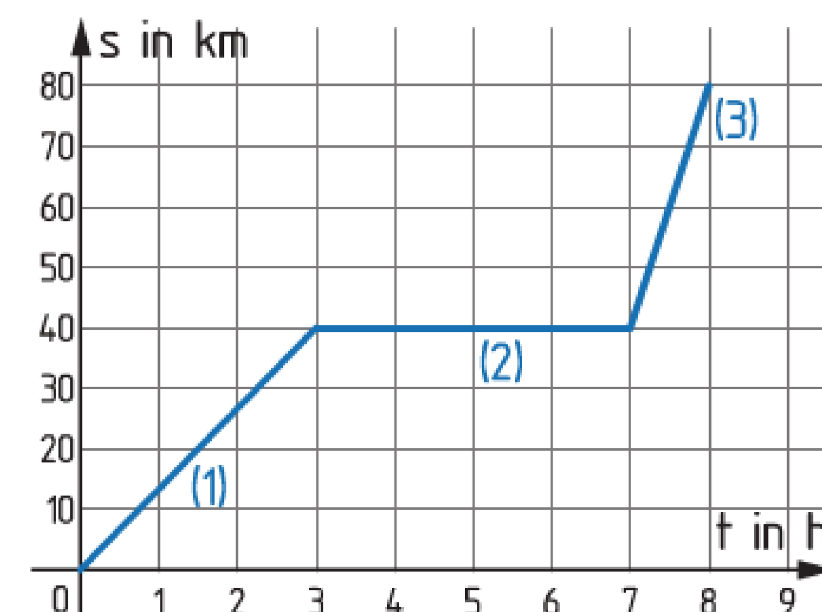
a) $h(t) = -4{,}91\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, $t_0 = 1{,}5\,s$
b) $h(t) = 1{,}5\,\frac{m}{s} \cdot t - 0{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, $t_0 = 2\,s$
c) $s(t) = 2\,m + 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, $t_0 = 3\,s$
d) $h(t) = 3\,m + 4\,\frac{m}{s} \cdot t - 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, $t_0 = 0{,}25\,s$

3.10 Jemand lässt versehentlich seine Digitalkamera von der Aussichts-Plattform des Wiener Donauturms ($h_0 = 150\,m$) senkrecht nach unten fallen. Die Fallbewegung kann unter Vernachlässigung des Luftwiderstands durch die Funktion $h(t) = h_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2$ beschrieben werden (t in Sekunden, $g \approx 10\,\frac{m}{s^2}$). AB

1) Berechne, nach welcher Zeit die Kamera am Boden aufschlägt.
2) Berechne die Aufprallgeschwindigkeit.

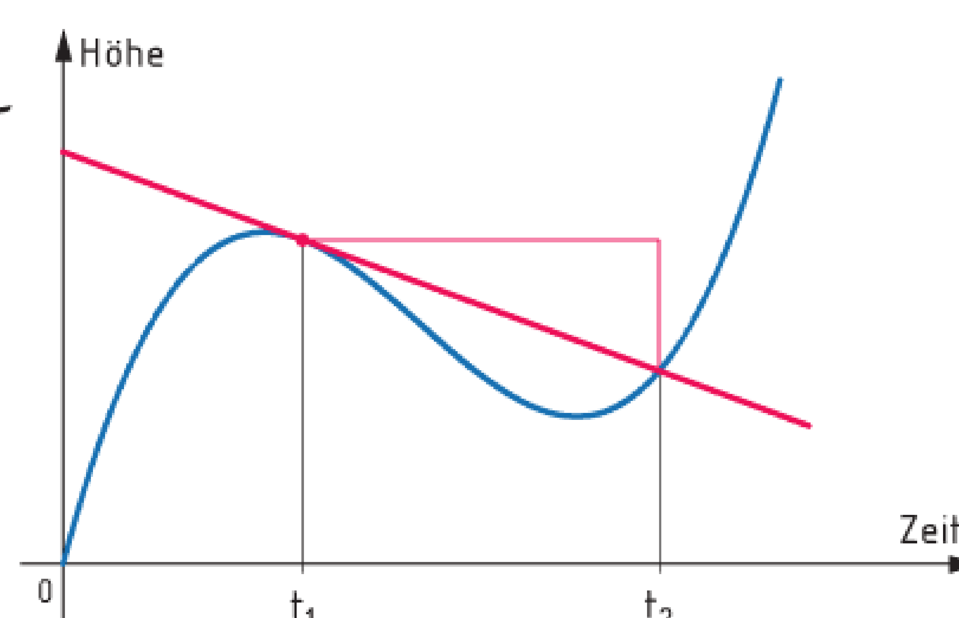
3.11 Eine Fahrt wird durch ein Weg-Zeit-Diagramm näherungsweise beschrieben. ABCD

1) Ermittle jeweils die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ und $\bar{v}_3$ für die drei Abschnitte.
2) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ für die gesamte Fahrtdauer?
3) Begründe, warum $\bar{v}$ nicht das arithmetische Mittel von $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ und $\bar{v}_3$ ist.



4) Kann man für die dargestellte Weg-Zeit-Funktion die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 3 h berechnen? Begründe deine Antwort.
5) Für welche Zeitpunkte muss die tatsächliche Fahrt vom angegebenen Modell abweichen? Begründe deine Antwort.

3.12 Kim sagt: „Die Steigung der Geraden gibt die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 an."
Robin sagt: „Die Steigung der Geraden gibt die mittlere Geschwindigkeit zwischen t_1 und t_2 an."
Beurteile die Aussagen. CD

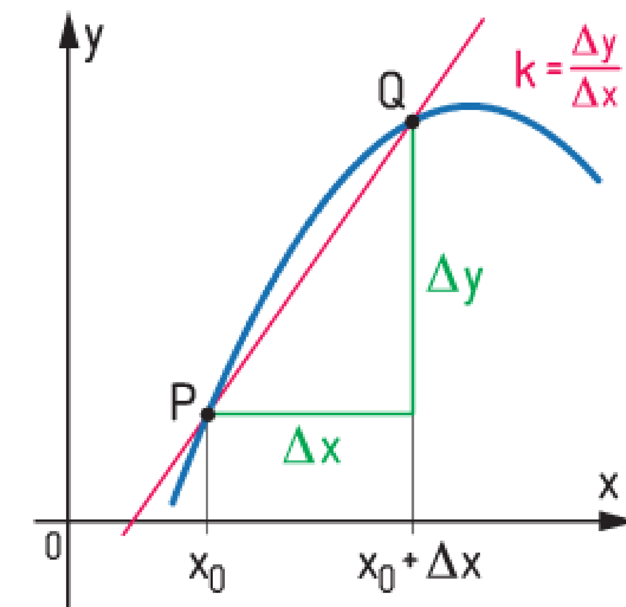


3.2.2 Differenzenquotient und Differentialquotient

In Abschnitt 3.2.1 haben wir die Begriffe mittlere Änderungsrate und momentane Änderungsrate für Weg-Zeit-Funktionen erarbeitet. Im Folgenden sollen diese Begriffe auf beliebige Funktionen y = f(x) übertragen werden.

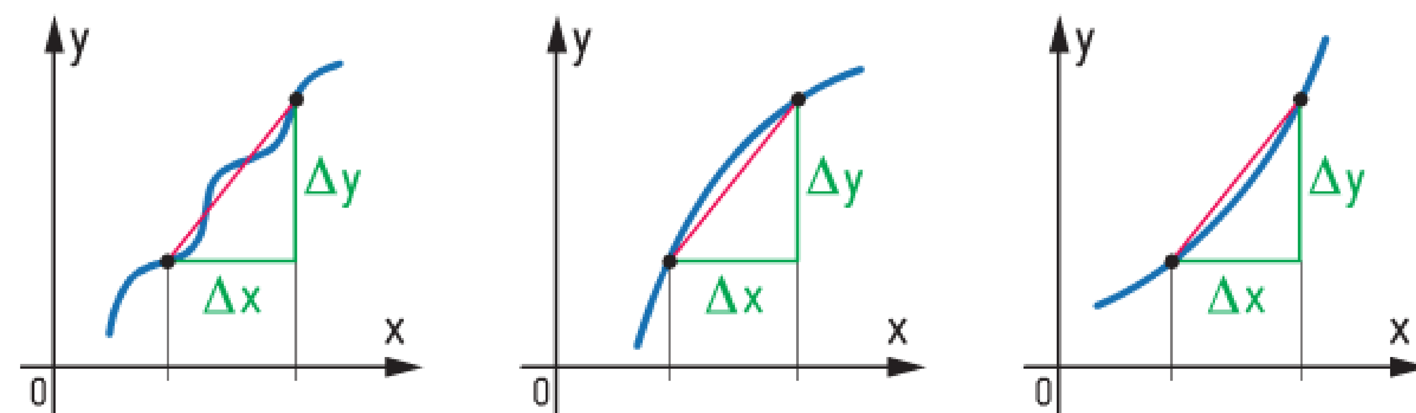
Differenzenquotient

Wir betrachten nun eine beliebige Funktion y = f(x) mit der Definitionsmenge D_f. Um zu beschreiben, wie stark sich die Funktionswerte ändern, gibt man das Verhältnis von der Änderung Δy der Funktionswerte zur Änderung Δx der x-Werte an. Dieser Quotient wird **mittlere Änderungsrate** oder **Differenzenquotient** genannt und entspricht – geometrisch interpretiert – der **Steigung** der **Sekante**.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

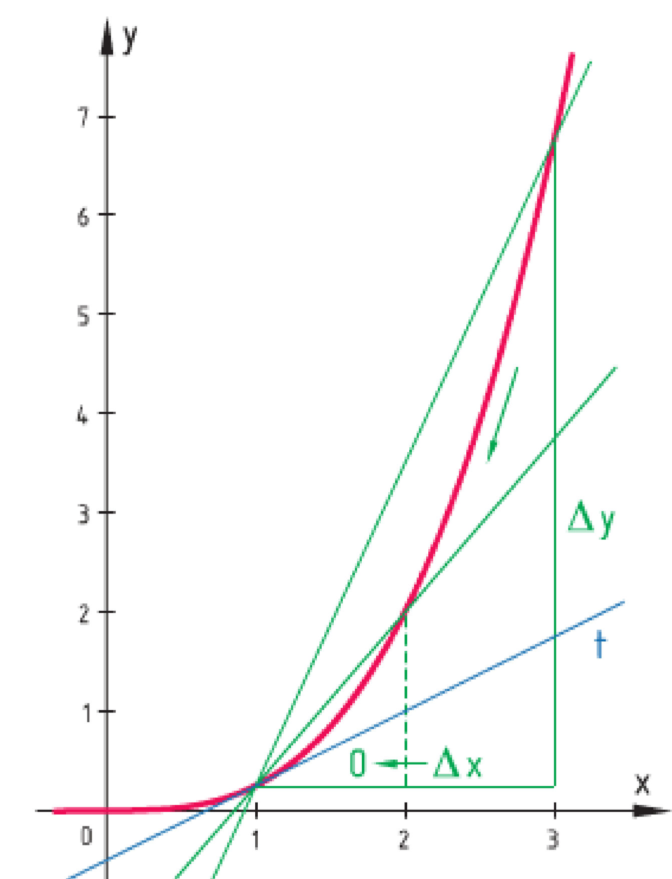
Da der Differenzenquotient die mittlere („durchschnittliche") Änderungsrate beschreibt, sagt er über den genauen Verlauf der Funktion nichts aus. Es kann sich für verschiedene Funktionen daher derselbe Differenzenquotient ergeben. Er gibt jedoch jenen Faktor k an, mit dem man die Änderung Δx der Variablen multiplizieren muss, um die Änderung Δy der Funktionswerte zu erhalten: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k \Rightarrow k \cdot \Delta x = \Delta y$



Differentialquotient

In vielen Fällen ist nicht nur die mittlere Änderungsrate, sondern auch die momentane Änderungsrate von Bedeutung. Um die **Änderungsrate an einer bestimmten Stelle** zu ermitteln, bildet man den Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$. Dieser wird als **Differentialquotient** bezeichnet und oft als f′(x) angeschrieben.

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x = x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$$



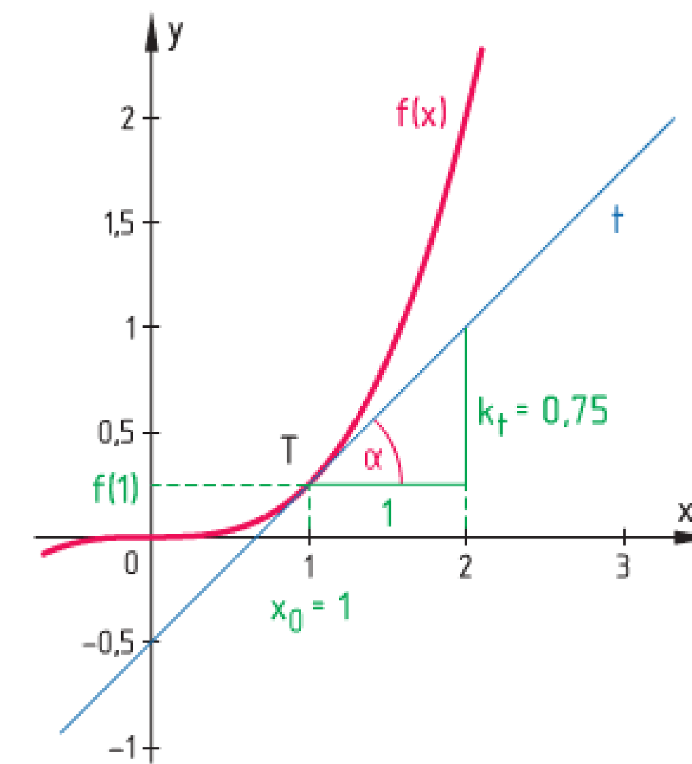
Der Differentialquotient $f'(x_0)$ kann geometrisch als **Steigung der Tangente** an den Graphen der Funktion im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ gedeutet werden. Die **Steigung $f'(x_0)$** dieser Tangente wird auch als **Steigung der Funktion f(x)** an der Stelle x_0 bezeichnet.

Bildet man die Änderungsrate an **jeder beliebigen Stelle** x, erhält man die Funktion f′(x). Man bezeichnet f′(x) als **1. Ableitung** der Funktion und das Berechnen als **Ableiten** oder **Differenzieren**.



Nicht jede Funktion kann an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs abgeleitet werden. Zum Beispiel können Funktionen, die einen Knick oder eine Sprungstelle haben, an dieser Stelle nicht differenziert werden. Es existieren keine Tangenten an diesen Stellen.

Da der Differentialquotient die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 angibt, ist es nun möglich, die Gleichung der Tangente in $T(x_0|f(x_0))$ und deren Steigungswinkel anzugeben.



ZB: Die Gleichung der Tangente t und der Steigungswinkel α sollen für die Funktion $y = 0,25x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$ angegeben werden. Die Steigung k_t der Tangente an der Stelle $x_0 = 1$ wird mithilfe des Differentialquotienten an dieser Stelle ermittelt.

$$y'(1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{0,25 \cdot (1+\Delta x)^3 - 0,25 \cdot 1^3}{\Delta x}\right) =$$

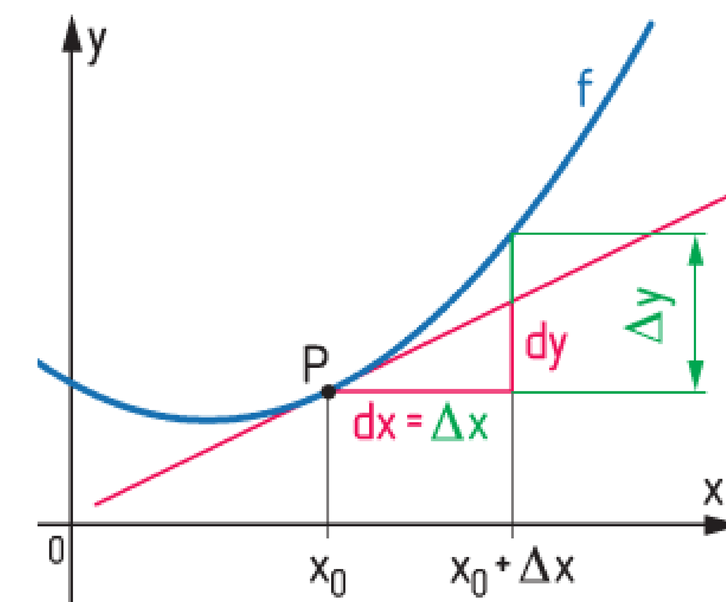
$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{0,25 \cdot (1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 0,25}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cancel{0,25} + 0,75\Delta x + 0,75(\Delta x)^2 + 0,25(\Delta x)^3 - \cancel{0,25}}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cancel{\Delta x} \cdot (0,75 + 0,75\Delta x + 0,25(\Delta x)^2)}{\cancel{\Delta x}}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(0,75 + \underbrace{0,75\Delta x}_{\to 0} + \underbrace{0,25(\Delta x)^2}_{\to 0}\right) = 0,75 = k_t$$

Um die Gleichung der Tangente t in x_0 zu ermitteln, berechnet man die y-Koordinate des Berührungspunkts T: $y(1) = 0,25$.
Mithilfe des Punkts $T(1|0,25)$ und der Steigung $k_t = 0,75$ wird die Gleichung der Tangente ermittelt.
$t: y = k_t \cdot x + d \Rightarrow y = 0,75 \cdot x + d$
$T \in t \Rightarrow 0,25 = 0,75 \cdot 1 + d \Rightarrow d = -0,5$
$t: y = 0,75x - 0,5$ … Funktionsgleichung der Tangente in $T(1|0,25)$

Man kann nun den **Steigungswinkel** α dieser Tangente t mithilfe des Zusammenhangs $k_t = \tan(\alpha)$ berechnen:
$\alpha = \arctan(0,75) = 36,869...°$
$\alpha \approx 36,87°$ … Steigungswinkel der Tangente $t: y = 0,75x - 0,5$

Da $f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = k_t$ gilt, können dy und dx mithilfe des Steigungsdreiecks der Tangente veranschaulicht werden. Ändert sich das Argument x_0 um $\Delta x = dx$, so kann die zugehörige Änderung des Funktionswerts näherungsweise durch dy beschrieben werden. Für kleine Änderungen Δx kann die Funktion somit durch die Tangente angenähert werden. Die Gleichung der **linearen Näherung** wird oft in folgender Form angegeben:



$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

- $\left.\begin{array}{l} y = f'(x_0) \cdot x + d \\ P(x_0|f(x_0)) \end{array}\right\} f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + d \Rightarrow d = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Der **Differenzenquotient** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ gibt das Verhältnis der Änderung Δy des Funktionswerts zur Änderung Δx der Variablen in einem Intervall $[x; x + \Delta x]$, also die **mittlere Änderungsrate**, an. Er beschreibt somit die **Steigung einer Sekante** der Funktion $y = f(x)$.

Der **Differentialquotient** $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$ gibt die **momentane Änderungsrate** einer Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle x an. Er kann auch als **Steigung der Tangente** an den Funktionsgraphen an der Stelle x aufgefasst werden.
Ordnet man jeder beliebigen Stelle x der Funktion f den Differentialquotienten zu, erhält man die Funktion $y' = f'(x)$, die **1. Ableitung** der Funktion.

Differentialrechnung

Höhere Ableitungen

Viele Funktionen sind nicht nur differenzierbar, sondern haben auch eine Ableitungsfunktion, die selbst wieder differenzierbar ist. Durch Ableiten der 1. Ableitung erhält man die 2. Ableitung, man schreibt $y'' = f''(x)$, [sprich: „y zwei Strich“]. Kann auch diese Funktion wieder differenziert werden, so erhält man die 3. Ableitung. Auf die Bedeutung der höheren Ableitungen wird in einigen der folgenden Abschnitte eingegangen werden.

Höhere Ableitungen einer Funktion $y = f(x)$

2. Ableitung: $y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ [sprich: „d zwei y nach dx Quadrat“]

3. Ableitung: $y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ n-te Ableitung: $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$

Schreibweisen von Ableitungen

- **Ableitung** einer Funktion f(x):
  Die Schreibweise des Differentialquotienten als Bruch $\frac{dy}{dx}$ ist eine symbolische Schreibweise für die Grenzwertberechnung $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$. Wegen der Gültigkeit der Grenzwertsätze ist es aber im Allgemeinen trotzdem zulässig, wie mit Bruchtermen zu rechnen. Wird die Ableitung mit $\frac{d}{dx} f(x)$ angeschrieben, so wird dem Ausdruck $\frac{d}{dx}$ dabei die Eigenschaft eines Operators (einer Rechenvorschrift) zugewiesen, der die Grenzwertbildung ausdrücken soll.
- Die Ableitung einer Größe nach der **Zeit** t wird oft abgekürzt, indem man über die abhängige Variable einen Punkt setzt. ZB: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$
- Um den Differentialquotienten an einer **bestimmten Stelle** zu beschreiben, verwendet man auch folgende Schreibweise:
  $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$, zB: $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = 2}$ … Ableitung an der Stelle 2
- Ableitungen von Funktionen mit **mehreren Variablen**:
  Enthält eine Funktion mehr als eine Unbekannte, so muss vor dem Ableiten die Variable verdeutlicht werden, wie zum Beispiel: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot h \Rightarrow \frac{dV}{dr}$ … 1. Ableitung

B **3.13** Ermittle die mittlere Änderungsrate im gegebenen Intervall.
a) $y = x^3 + 8$, [4; 5] **b)** $y = 4x + 1$, [−5; 1] **c)** $y = \frac{4}{x}$, [2; 7]

B **3.14** Zeichne die Graphen von drei verschiedenen Funktionen, die im Intervall [0; 5] den Differenzenquotienten 2 haben.

ABD **3.15** Zeichne den Graphen einer Funktion f, die im Intervall [a; b] nicht streng monoton fallend ist, aber einen negativen Differenzenquotienten hat. Welche Eigenschaft muss diese Funktion unter diesen Bedingungen haben?

BD **3.16** Erkläre anhand einer Zeichnung, warum die Berechnung des Differenzenquotienten für $y = x^2 - 6x$ in [2; 4] den Wert null liefert, obwohl die Funktion nicht konstant verläuft.

B **3.17** Berechne den Differentialquotienten von f(x) an der Stelle x_0.
a) $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$ **b)** $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$, $x_0 = -1$ **c)** $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$

B **3.18** Ermittle die Ableitung der Funktion.
a) $s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$ **b)** $W(b) = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot b^2$ **c)** $V(R) = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi$ **d)** $E(h) = m \cdot g \cdot h$

B **3.19** Ermittle die Gleichung der Tangente an den Graphen und gib ihren Steigungswinkel an.
a) $f(x) = (x - 2)^2$, $x_0 = 2$ **b)** $f(x) = -0{,}3x^2 + 2x$, $x_0 = -1$ **c)** $f(x) = (x + 1)^3$, $x_0 = -2$

3.2.3 Weitere Beispiele für mittlere und momentane Änderungsraten

Mittlere und momentane Änderungsraten werden in Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft verwendet, um auftretende Veränderungen zu beschreiben. Im Folgenden ist die Bedeutung des Differentialquotienten für einige wichtige physikalische Zusammenhänge angeführt.

- **Größen der Translation – Geschwindigkeit v und Beschleunigung a**

$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ Änderung des zurückgelegten Wegs s in Abhängigkeit von der Zeit t

$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$ Änderung der Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t

- **Größen der Rotation – Winkelgeschwindigkeit ω und Winkelbeschleunigung α**

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ Änderung des bei einer Kreisbewegung überstrichenen Winkels φ in Abhängigkeit von der Zeit t

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$ Änderung der Winkelgeschwindigkeit ω in Abhängigkeit von der Zeit t

- **Kraft F und Leistung P**

$F = \frac{dW}{ds}$ Änderung der in Wegrichtung verrichteten Arbeit W in Abhängigkeit vom dabei zurückgelegten Weg s

$P = \frac{dW}{dt}$ Änderung der verrichteten Arbeit W in Abhängigkeit von der Zeit t

- **Drehmoment M**

$M = \frac{dL}{dt}$ Änderung des Drehimpulses L in Abhängigkeit von der Zeit t

- **Elektrische Stromstärke i und Stromdichte j**

$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ Änderung der elektrischen Ladung q in einem elektrischen Leiter in Abhängigkeit von der Zeit t

$j = \frac{di}{dA}$ Änderung der Stromstärke i in einem elektrischen Leiter in Abhängigkeit von der Querschnittsfläche A des Leiters

- **Wärmestrom $\dot{Q}$**

$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ Änderung der Wärmemenge (Wärmeenergie) Q in Abhängigkeit von der Zeit t

- **Wärmekapazität c**

$c = \frac{dQ}{dT}$ Änderung der Wärmemenge (Wärmeenergie) Q in einem Körper in Abhängigkeit von der Temperatur T

- **Grenzkostenfunktion K'**

$K'(x) = \frac{dK}{dx}$ Änderung der Kostenfunktion K in Abhängigkeit von der produzierten Stückmenge x

Die Grenzkosten entsprechen näherungsweise den Kosten für die zuletzt hergestellte bzw. für die nächste zu produzierende Einheit (siehe Seite 160).

Differentialrechnung

CD **3.20** Ein Pudding kühlt nach seiner Zubereitung ab. Die Temperatur T hängt dabei von der seit Beginn des Abkühlvorgangs vergangenen Zeit t ab. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Begründe deine Antwort.



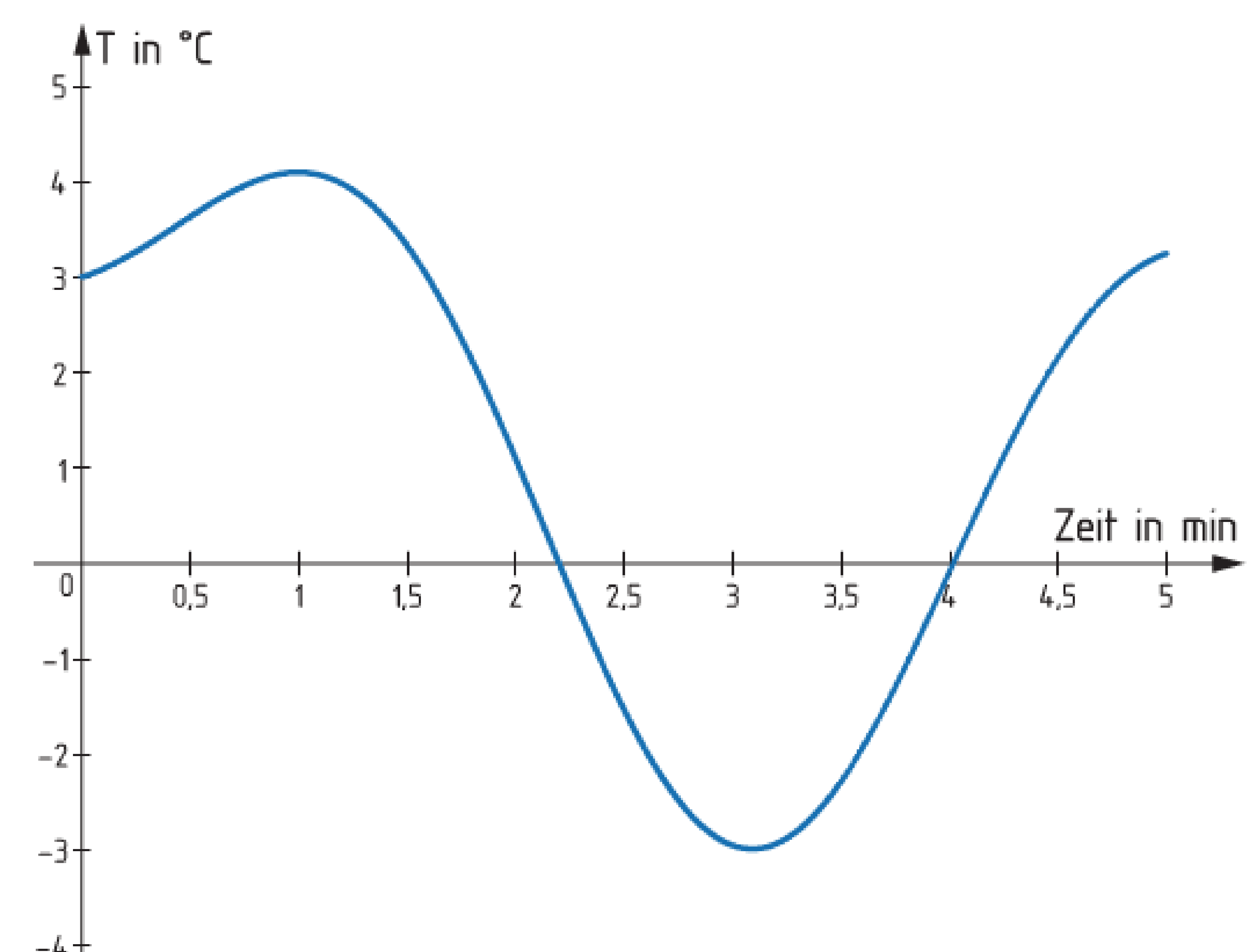
A) $T(t_2) - T(t_1)$ gibt die Änderung der Temperatur im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an.
B) $T(t_2) - T(t_1)$ gibt die mittlere Änderung der Temperatur im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an.
C) $T'(t)$ gibt an, um wie viel Grad der Pudding in der letzten Minute abgekühlt ist.
D) $T'(t)$ gibt das Maß der Abkühlung zu einem bestimmten Zeitpunkt an.
E) $\lim\limits_{t \to \infty} (T(t))$ gibt an, welche Temperatur der Pudding nach langer Zeit erreicht.
F) $\lim\limits_{t \to \infty} \left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\right)$ steht für den Differentialquotienten.

AC **3.21** Bei einem Experiment wurde der Druck p (in hPa) abhängig von der Zeit t (in Minuten) bestimmt. Dabei wurden die angegebenen Werte gemessen.
Ergänze die folgenden Aussagen.
1) p(80 min) = 2 250 hPa bedeutet, dass ......
2) p(20 min) – p(0 min) gibt die ...... im Zeitintervall [0 min; 20 min] an.
3) Die mittlere Änderungsrate des Drucks hat die Einheit ......
4) Die Änderung ist im Intervall [...; ...] am größten.
5) Die mittlere Änderungsrate im Intervall [60 min; 70 min] beträgt ......
6) Mit $\frac{1843\,\text{hPa} - 1699\,\text{hPa}}{60\,\text{min} - 50\,\text{min}} = 14{,}4\,\frac{\text{hPa}}{\text{min}}$ wird ...... berechnet.

t in min	p in hPa
0	1 015
10	1 121
20	1 238
30	1 368
40	1 511
50	1 669
60	1 843
70	2 036
80	2 250
90	2 485
100	2 745
110	3 033
120	3 350
130	3 700

A **3.22** In einem aus einem Kondensator und einer Spule bestehenden Schwingkreis wird der Kondensator aufgeladen. Für die Ladung auf einer Kondensatorplatte gilt:
$q(t) = C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t)$ C ... Kapazität, U_0 ... Spannung
ω ... Kreisfrequenz, t ... Zeit, q ... Ladung
Gib die Funktion der elektrischen Stromstärke i(t) an.

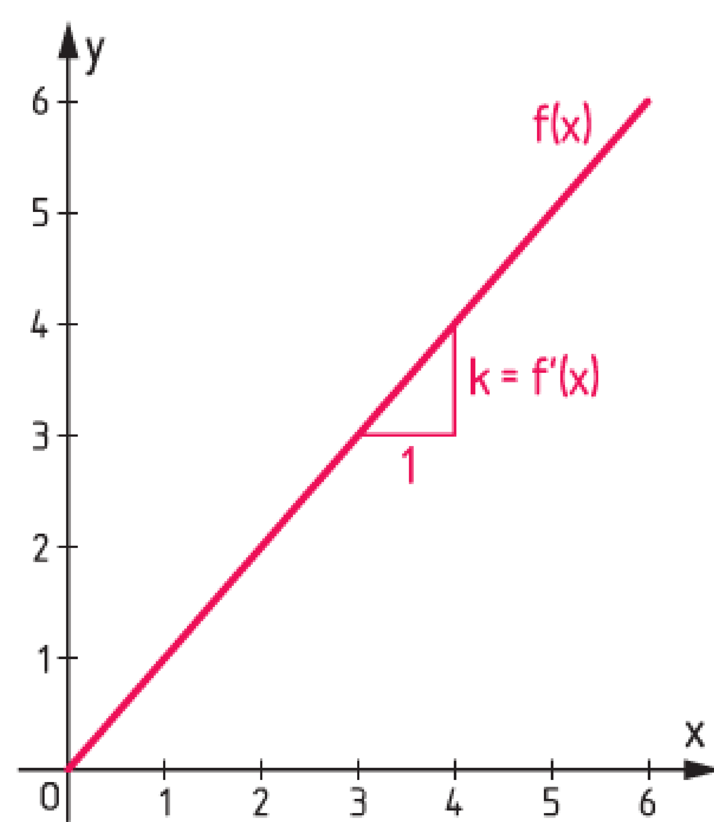
C **3.23** Arbeite mit der Zeichnung.
1) Bestimme die mittlere Änderungsrate im Intervall [1 min; 2 min].
2) Gib ein Intervall an, in dem die mittlere Änderungsrate einen negativen Wert annimmt.
3) Was sagt die mittlere Änderungsrate im Intervall [2 min; 3 min] aus?
4) Schätze die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t = 2 min.

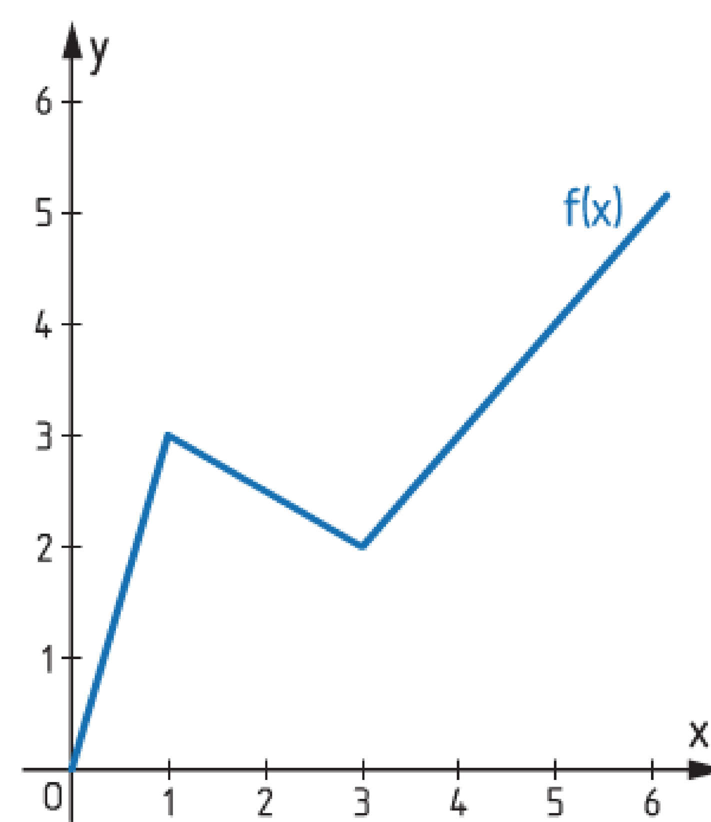


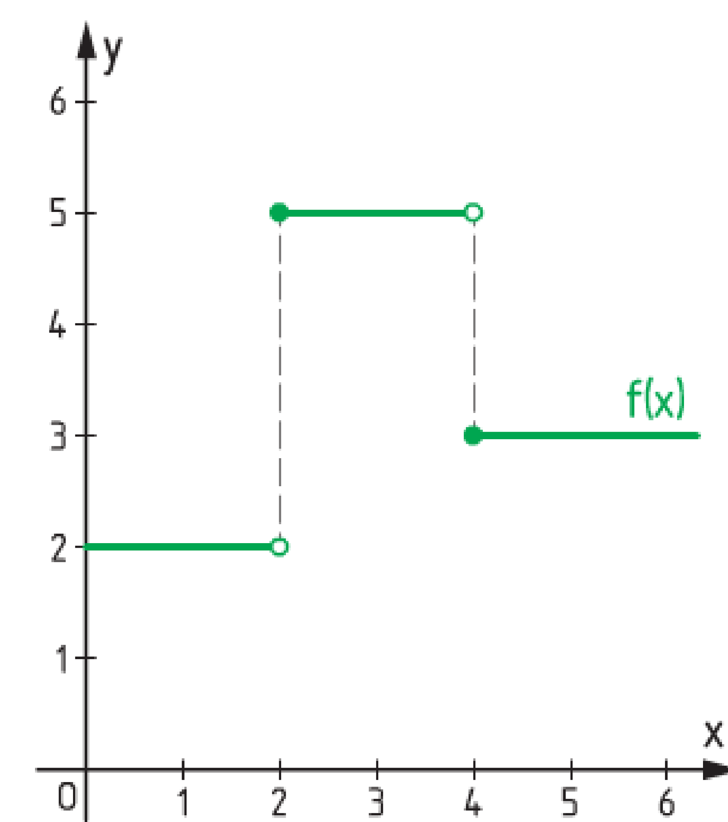
3.3 Grafisches Ermitteln der Ableitungsfunktion

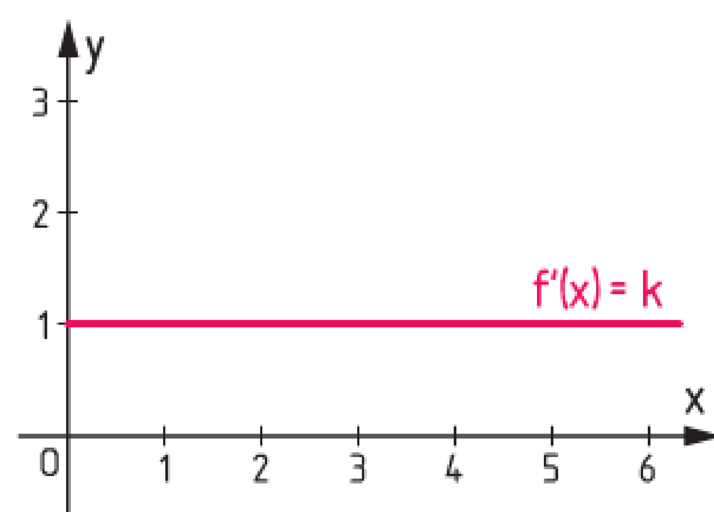
Um die Ableitungsfunktion einer Funktion zu ermitteln, kann auch grafisch vorgegangen werden. Der Wert der ersten Ableitung einer Funktion entspricht an jeder Stelle dem Anstieg der Tangente in diesem Punkt. Wird dieser Anstieg mithilfe einer Zeichnung ermittelt, so spricht man von **grafischem Differenzieren**.

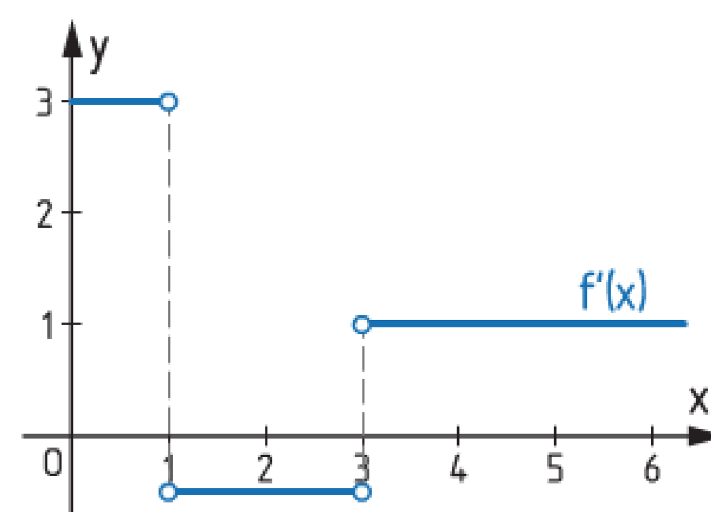
- Ist die gegebene Funktion y = f(x) eine lineare Funktion, so ist die Steigung konstant und kann aus dem Steigungsdreieck abgelesen werden.
- Ist eine Funktion y = f(x) stückweise linear, so kann die Steigung für jedes Teilstück abgelesen werden. Gibt es Stellen, an denen die Funktion keine Tangente hat (zum Beispiel Ecken oder Sprungstellen), so existiert die Ableitung an diesen Stellen nicht.

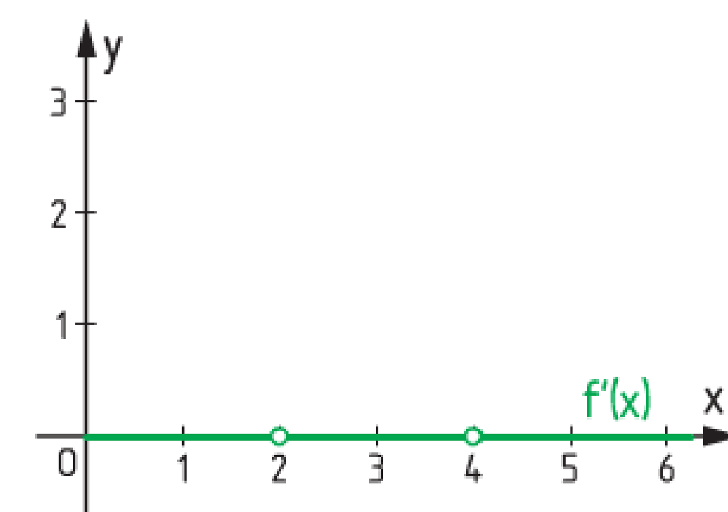




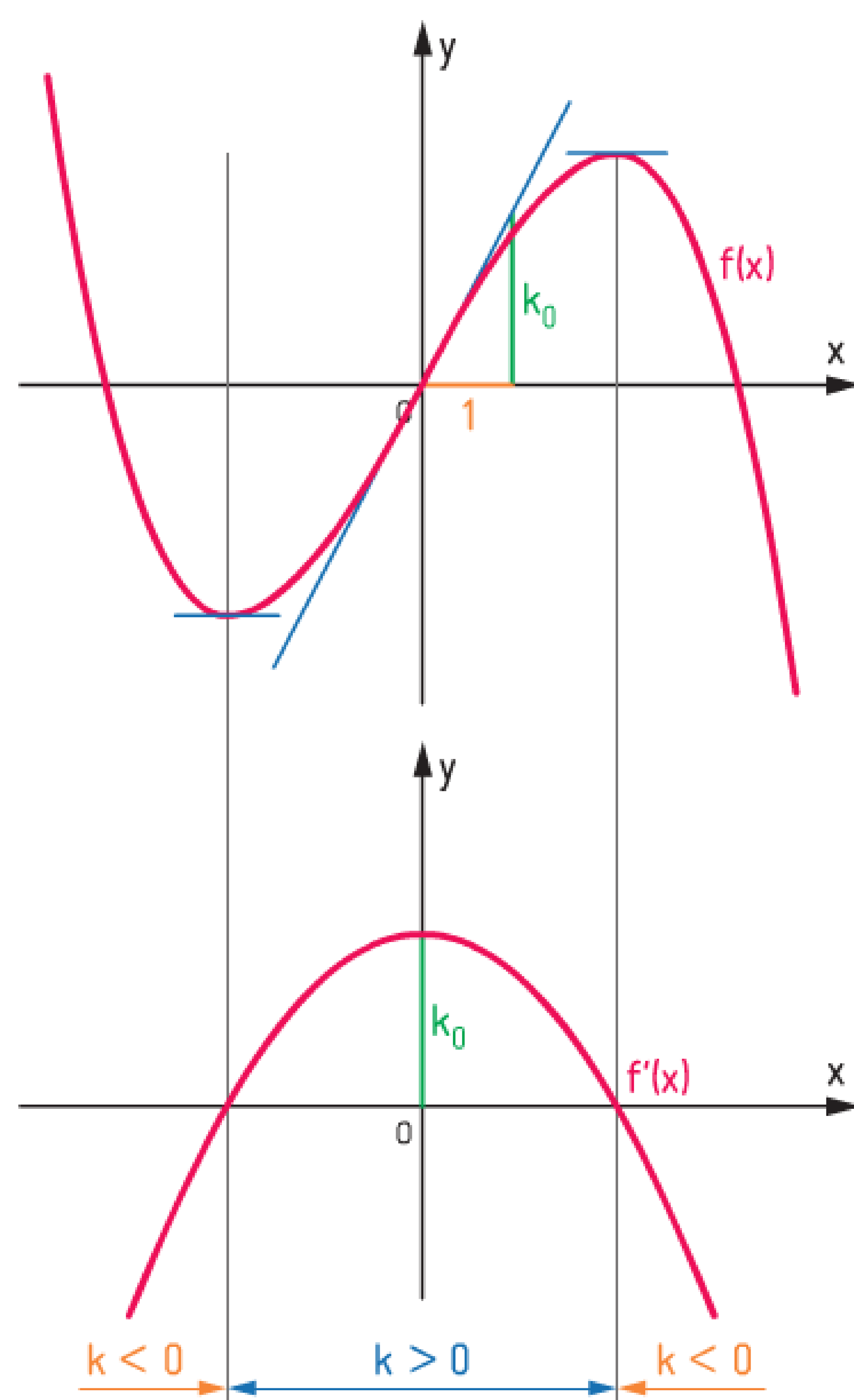






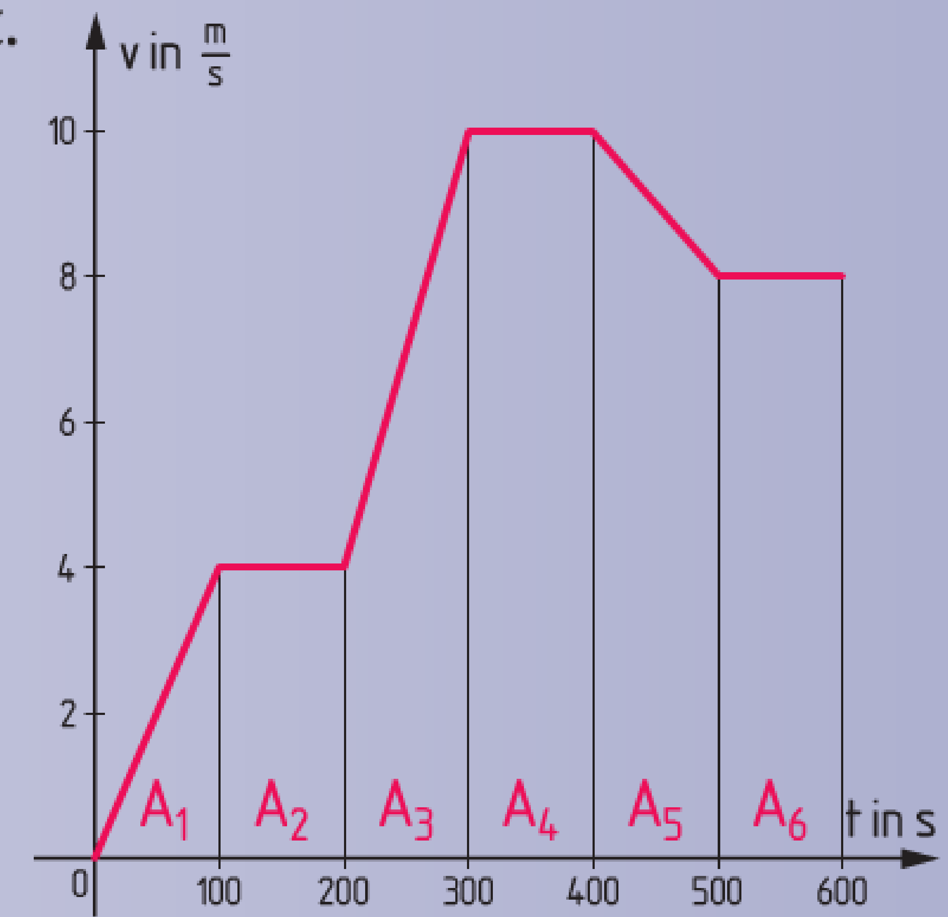


Ist eine Funktion y = f(x) nicht linear oder nicht stückweise linear, so können die Tangentensteigungen grafisch im Allgemeinen nur näherungsweise ermittelt werden.



- Hat die Funktion y = f(x) Punkte mit waagrechten Tangenten, so ist dort f′(x) = 0. Die Ableitungsfunktion hat also an den entsprechenden Stellen eine Nullstelle.
- Sind die Steigungen der Tangenten in einem Bereich der Funktion positiv, so ist dort $f'(x) > 0$; sind die Steigungen negativ, so ist dort $f'(x) < 0$.
- Um den Wert der Ableitung f′ an einer beliebigen Stelle grafisch zu ermitteln, zeichnet man im dazugehörigen Punkt die Tangente an f ein. Deren Steigung kann aus einem Steigungsdreieck mit $\Delta x = 1$ abgelesen und als Wert von f′ aufgetragen werden. Zum Beispiel beträgt die Steigung der Tangente im Koordinatenursprung k_0.
  Da die Funktionswerte der Funktion f′ den jeweiligen Tangentensteigungen der Funktion f entsprechen, ist k_0 der Funktionswert an dieser Stelle.

ABC **3.24** Während einer 10–minütigen Fahrt wurde der Geschwindigkeitsverlauf aufgezeichnet und in einem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellt.

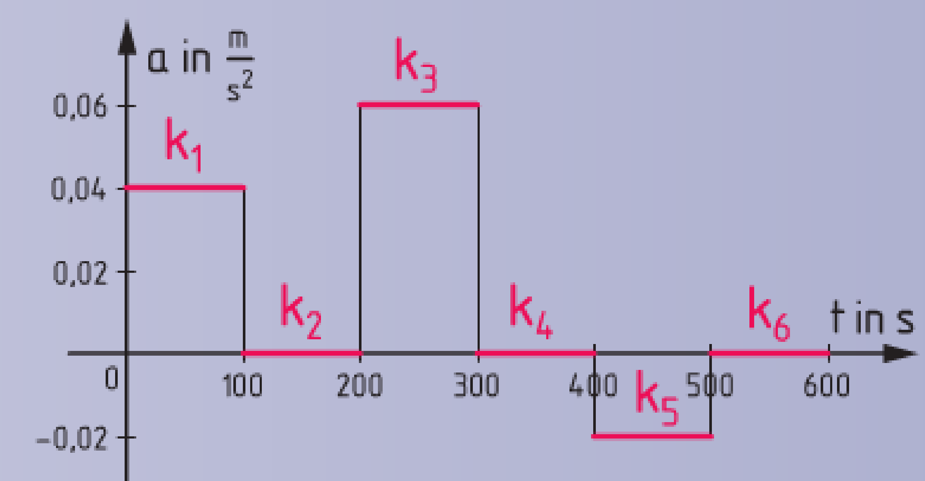


1) Ermittle das Beschleunigung-Zeit-Diagramm grafisch und beschreibe deine Vorgehensweise.

2) Aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht ist bekannt, dass der Inhalt der Fläche, die von der Geschwindigkeitsfunktion und der Zeitachse eingeschlossen wird, dem zurückgelegten Weg entspricht. Berechne die Gesamtlänge des zurückgelegten Wegs.

Lösung:

1) Die Steigungen der einzelnen Teilstücke werden aus der Grafik abgelesen.



$$k_1 = \frac{4\,\frac{m}{s}}{100\text{ s}} = 0{,}04\,\frac{m}{s^2};\ k_2 = 0\,\frac{m}{s^2};\ k_3 = \frac{6\,\frac{m}{s}}{100\text{ s}} = 0{,}06\,\frac{m}{s^2}$$

$$k_4 = 0\,\frac{m}{s^2};\ k_5 = \frac{-2\,\frac{m}{s}}{100\text{ s}} = -0{,}02\,\frac{m}{s^2};\ k_6 = 0\,\frac{m}{s^2}$$

Die so ermittelten Steigungen sind die Werte der Beschleunigungsfunktion a. Sie werden in ein passend skaliertes Koordinatensystem eingezeichnet.

2) Die Flächeninhalte unter den Teilstrecken können mithilfe elementarer Formeln berechnet werden:

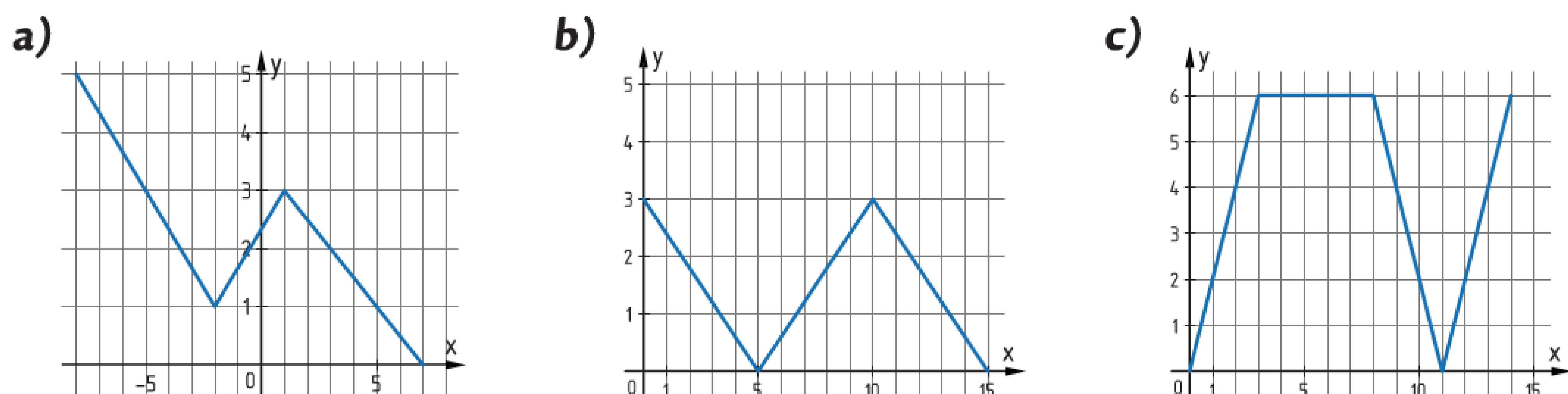
$$s = \frac{4\,\frac{m}{s}\cdot 100\text{ s}}{2} + 4\,\frac{m}{s}\cdot 100\text{ s} + \frac{(4+10)\,\frac{m}{s}\cdot 100\text{ s}}{2} + 10\,\frac{m}{s}\cdot 100\text{ s} + \frac{(10+8)\,\frac{m}{s}\cdot 100\text{ s}}{2} + 8\,\frac{m}{s}\cdot 100\text{ s}$$

$s = 200\text{ m} + 400\text{ m} + 700\text{ m} + 1\,000\text{ m} + 900\text{ m} + 800\text{ m} = 4\,000\text{ m} = 4\text{ km}$

Die Fahrstrecke beträgt 4 km.

BC **3.25** Zeichne den Graphen der Ableitungsfunktion der dargestellten Funktion.

a) **b)** **c)**



BC **3.26** Zeichne die Funktion und ermittle die erste Ableitung grafisch.

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & -2 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x \leq 6 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x-9 & -7 \leq x < -6 \\ -\left|\frac{x}{2}\right| & -6 \leq x \leq 2 \\ x-3 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

C **3.27** Kreuze die richtige Aussage an.

○ Die Ableitung einer Funktion ist immer eine Gerade.

○ Ist die Ableitung einer Funktion an einer Stelle kleiner als null, so ist die Funktion dort fallend.

○ Die Ableitung einer stückweise linearen Funktion ist immer eine Waarechte.

3.28 Skizziere jeweils die erste Ableitung der dargestellten Funktion. Welche physikalische Bedeutung hat die Ableitung? BC

a) **b)** **c)**

3.29 Erstelle zu der angegebenen Fortbewegungsart ein passendes Weg-Zeit-Diagramm. Fertige dazu zuerst eine Tabelle an, in der du den zurückgelegten Weg in 15-Minuten-Schritten einträgst. Ermittle das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm durch grafisches Differenzieren. ABC

a) Wandern **b)** Inlineskaten **c)** Moped fahren **d)** Schwimmen

3.30 Ordne den gegebenen Funktionen jeweils jene Grafik zu, die ihre erste Ableitung darstellt und begründe deine Auswahl. CD

1) **2)** **3)** **4)**

A) **B)** **C)** **D)**

3.31 Wie viele Funktionen gib es, deren Ableitungsfunktion $f'(x) = 5$ ist? Wodurch unterscheiden sich die Funktionen voneinander? Begründe deine Antwort. CD

3.32 Skizziere die Funktion f, deren Ableitung f′ dargestellt ist und die durch den vorgegebenen Punkt geht. Gehe davon aus, dass die Funktion f keine Sprungstellen hat. BC

a) P(0|0) **b)** P(0|1) **c)** P(0|–1)

Aufgaben 3.33 – 3.34: Zeichne jeweils die Funktion und ermittle deren Ableitung grafisch.

3.33 **a)** $y = 3x^2 - 3x - 3$ **b)** $f(x) = -4x^2 + 4$ **c)** $g(x) = (x - 4)^2 + 1$ BC

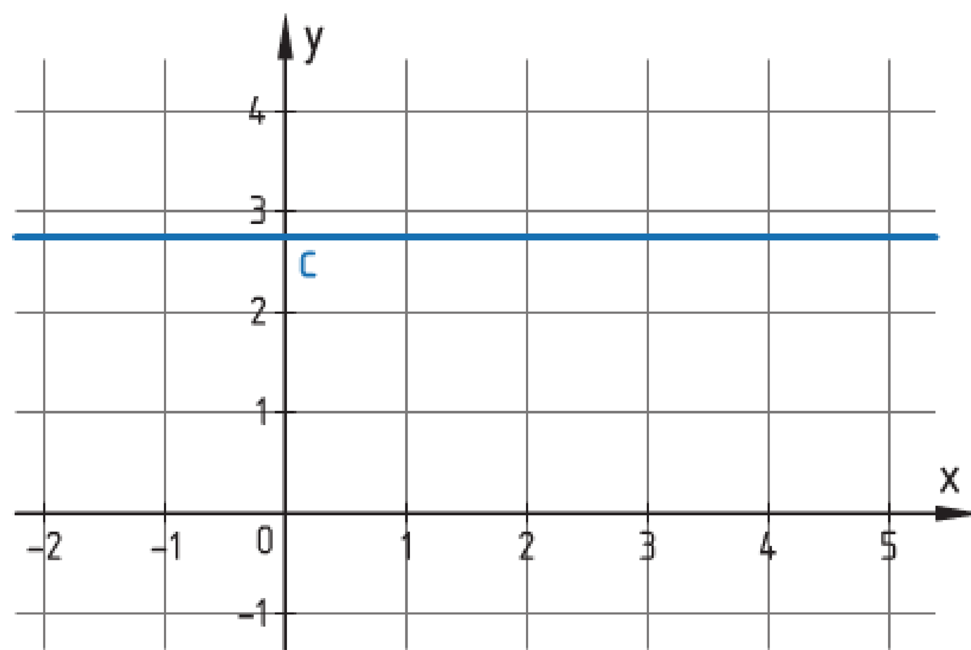
3.34 **a)** $y = -x^3 + 5x$ **b)** $y = x^3 + 2x^2 - 4x$ **c)** $y = (x - 1)^3$ BC

3.4 Ableitungen von Polynomfunktionen

Die Berechnung der Ableitungsfunktion mithilfe des Differenzenquotienten ist oft aufwändig. Man kann jedoch mithilfe allgemeiner Überlegungen Regeln entwickeln, die das Angeben der Ableitung ohne Durchführung der Grenzwertberechnung ermöglichen.

ABC **3.35** ***1)*** Stelle die Funktionen $y_1 = 2$, $y_2 = x$, $y_3 = 2x$ und $y_4 = x + 2$ grafisch dar.
2) Ermittle jeweils die Ableitungsfunktion durch grafisches Differenzieren.
3) Gib die Funktionsgleichungen dieser Ableitungen an. Was fällt dir auf?

Ableitung der konstanten Funktion f(x) = c



Eine konstante Funktion f(x) = c hat in jedem Punkt die Steigung null, ihre Ableitung muss daher überall den Wert null haben.

Beweis:

$f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{c - c}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{0}{\Delta x}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}(0) = 0$$

Ableitung der konstanten Funktion

$$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ f'(x) = 0$$

3.36 Ermittle die erste Ableitung.

a) f(x) = 50 ***b)*** g(x) = a

Lösung:

a) f′(x) = 0 ***b)*** g′(x) = 0 ● Da die Gleichungsvariable x ist, ist a eine Konstante.

Ableitung der Potenzfunktion f(x) = xⁿ (n ∈ ℝ)

In diesem Abschnitt wurde für einige Potenzfunktionen der Differentialquotient an einer bestimmten Stelle x_0 ermittelt. Exemplarisch wird nun zunächst die Ableitung von $f(x) = x^3$ ermittelt, und danach eine allgemeine Ableitungsregel herzuleiten.

$f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cancel{x^3} + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{x^3}}{\Delta x}\right) =$$

● Die binomische Formel wird angewendet und anschließend der Term vereinfacht.

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cancel{\Delta x} \cdot (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)}{\cancel{\Delta x}}\right) =$$

● Aus dem verbleibenden Term wird Δx herausgehoben und gekürzt.

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(3x^2 + \underbrace{3x \cdot \Delta x}_{\to 0} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\to 0}) = 3x^2$$

$f'(x) = 3x^2$

● Alle Summanden, die den Faktor Δx enthalten, haben den Grenzwert null.

In der ersten Ableitung steht der ursprüngliche Exponent als Faktor vor der Potenz, der Exponent wird um 1 verringert.

Analog kann man die Ableitung von $f(x) = x^n$ für alle Exponenten $n \in \mathbb{N}$ ermitteln.
Mithilfe des Pascal'schen Dreiecks kann eine Formel für $(x + \Delta x)^n$ angegeben werden.
Es gilt: $(x + \Delta x)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + n \cdot x \cdot (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\not{x^n} + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{1}{2}n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - \not{x^n}}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{1}{2}n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\not{\Delta x} \cdot \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2}n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^1 + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right)}{\not{\Delta x}}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(n \cdot x^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{2}n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^1 + \ldots + (\Delta x)^{n-1}}_{\to 0}\right)$$

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

- Nach dem Vereinfachen des Zählers kann Δx herausgehoben und gekürzt werden.
- Alle grün gedruckten Summanden enthalten den Faktor Δx und haben daher den Grenzwert 0.

Der Beweis wurde nur für Exponenten $n \in \mathbb{N}$ geführt. Die Ableitungsvorschrift gilt jedoch für alle reellen Exponenten, also auch für alle Funktionen, die als Potenzfunktion angeschrieben werden können, wie zum Beispiel $y = \frac{1}{x}$ oder $y = \sqrt[n]{x}$ (Beweis siehe Aufgabe 3.197).

Ableitung der Potenzfunktion

$$f(x) = x^n \;\Rightarrow\; f'(x) = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{R}$$

Merkhilfe: „Hochzahl als Faktor vor die Potenz, von der Hochzahl 1 subtrahieren."

3.37 Ermittle die gesuchte Ableitung mithilfe der Ableitungsregeln. **B**

a) $y = x^6$; $y' = ?$ ***b)*** $s(t) = t$; $\dot{s} = ?$ ***c)*** $f(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x) = ?$ ***d)*** $x(z) = \sqrt[4]{z}$; $\frac{dx}{dz} = ?$

Lösung:

a) $y = x^6 \Rightarrow y' = 6 \cdot x^{6-1} = 6x^5$

b) $s(t) = t \Rightarrow \dot{s} = 1 \cdot t^0 = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

d) $x(z) = \sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4}}$

$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{4} \cdot z^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} \cdot z^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{z^3}}$

- $t = t^1$
- $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
- Ergebnisse werden üblicherweise mit positiven Exponenten angegeben.
- $\sqrt[n]{z^m} = z^{\frac{m}{n}}$

Differentialrechnung

Faktorregel Ableitung von Funktionen der Form y = a · f(x)
Ausgehend von einer Funktion f(x) ermittelt man die Ableitung der Funktion y = a · f(x), a ∈ ℝ:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{a \cdot f(x + \Delta x) - a \cdot f(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = a \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$$

$$y' = a \cdot f'(x)$$

Faktorregel

$$y = a \cdot f(x),\ a \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ y' = a \cdot f'(x)$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren unverändert erhalten.

B **3.38** Ermittle die gesuchten Ableitungen.

a) $y = 5x^3$; $y' = ?$, $y'' = ?$

b) $s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$; $\dot{s} = ?$, $\ddot{s} = ?$

Lösung:

a) $y = 5 \cdot x^3 \ \Rightarrow\ y' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$
$y'' = 15 \cdot 2x = 30x$

b) $s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 \ \Rightarrow\ \dot{s} = \frac{a}{2} \cdot 2t = a \cdot t$
$\ddot{s} = a \cdot 1 = a$

Ableitung der Summe bzw. Differenz von Funktionen
Durch elementare Umformungen des Differenzenquotienten lässt sich eine Regel für das Ableiten für Summen bzw. Differenzen zeigen.

Summenregel

$$y = f(x) \pm g(x) \ \Rightarrow\ y' = f'(x) \pm g'(x)$$

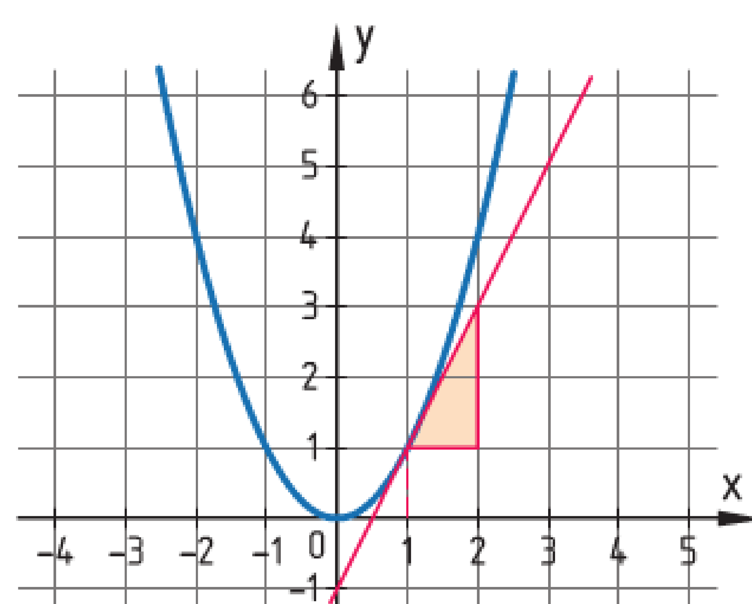
Die Ableitung einer Summe (Differenz) ist die Summe (Differenz) der Ableitungen.

B **3.39** Ermittle die erste Ableitung von $f(x) = 4x^3 - 2x^2$.

Lösung:
$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x = 12x^2 - 4x$

Beachte den Unterschied zwischen der Multiplikation mit einem konstanten Faktor und der Addition einer Konstanten.

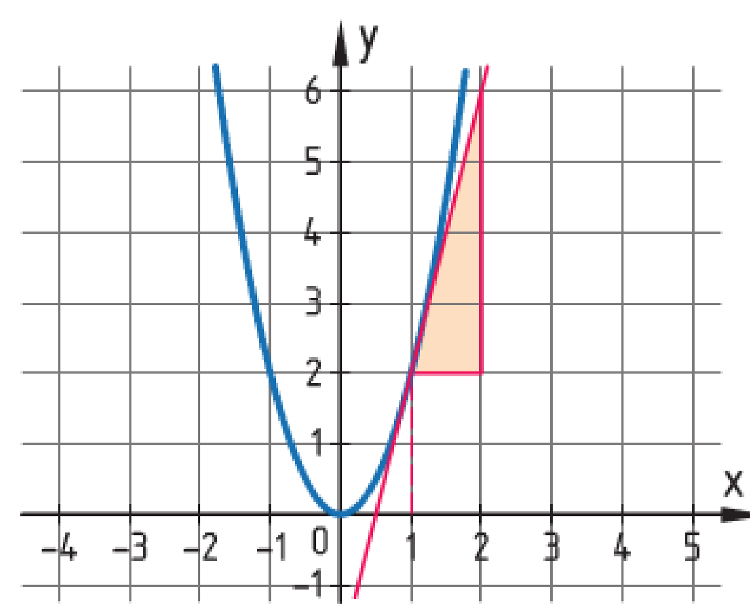
ZB: $y_1 = f(x) = x^2$



$y_1' = 2x$

Die Steigung kann aus dem Steigungsdreieck abgelesen werden.

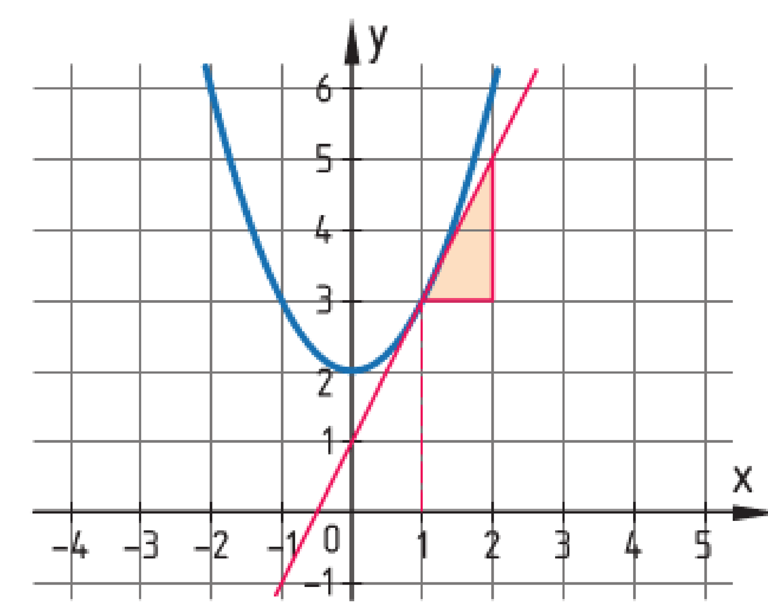
$y_2 = 2 \cdot f(x) = 2x^2$



$y_2' = 4x$

Die Multiplikation der Funktion mit 2 entspricht einer Streckung in y-Richtung, die Steigung der Tangente verdoppelt sich.

$y_3 = f(x) + 2 = x^2 + 2$



$y_3' = 2x$

Die Addition von 2 entspricht einer Verschiebung in y-Richtung, die Steigung der Tangente bleibt unverändert.



Kommt in einer Funktion eine Variable vor, die **nicht die Funktionsvariable** ist, so wird diese bei der Ableitung **wie eine Konstante** behandelt.
ZB: $f(x) = x^2 + a^2 \ \rightarrow\ f'(x) = 2x$

Ableitungen von Polynomfunktionen

Da Polynomfunktionen Summen (Differenzen) von Potenzfunktionen sind, können deren Ableitungen mithilfe der Summen- und Faktorregel und der Ableitungsregel für Potenzfunktionen ermittelt werden.

3.40 Ermittle die gesuchten Ableitungen. **B**

a) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7,\ f'(x) = ?,\ f''(x) = ?$ **b)** $g(y) = \frac{y^4}{3} + 5y - 2,\ \frac{dg}{dy} = ?,\ \frac{d^2g}{dy^2} = ?$

Lösung:

a) $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 0 = 6x^2 + 10x$

$f''(x) = 6 \cdot 2x + 10 \cdot 1 = 12x + 10$

b) $\frac{dg}{dy} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot y^3 + 5 \cdot 1 - 0 = \frac{4}{3} \cdot y^3 + 5,\quad \frac{d^2g}{dy^2} = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot y^2 = 4y^2$ ● $\frac{y^4}{3} = \frac{1}{3} \cdot y^4$

3.41 Ermittle alle Ableitungen von $f(x) = x^4 - 5x^2$. **BD**
Erkläre zuerst, wie viele von null verschiedene Ableitungen es gibt.

Lösung:
Es gibt vier von null verschiedene Ableitungen. Da der Exponent der höchsten Potenz vier ist und dieser beim Ableiten immer um eins verringert wird, erhält man für die 4. Ableitung eine Konstante und die nächste Ableitung ist gleich null.

$f'(x) = 4x^3 - 10x$ $f^{(4)}(x) = 24$

$f''(x) = 12x^2 - 10$ $f^{(5)}(x) = 0$

$f'''(x) = 24x$ $f^{(6)}(x) = f^{(7)}(x) = ... = 0 \Rightarrow f^{(n)}(x) = 0$ für $n \geqslant 5$

3.42 Es ist die Funktion $y = -2x^2 + 7x - 5$ gegeben. **B**

1) Ermittle den Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x_1 = 5$.

2) Berechne, an welcher Stelle der Funktion die Tangente die Steigung $k = -1$ hat.

Lösung:

1) $y'(x) = -2 \cdot 2x + 7 = -4x + 7$ ● Ableitung allgemein berechnen, dann die Stelle einsetzen.

$y'(5) = -4 \cdot 5 + 7 = -13$

2) $y'(x) = k = -1 \Rightarrow -4x + 7 = -1 \Rightarrow x = 2$ ● Die Ableitungsfunktion wird gleich dem Wert von k gesetzt.

Aufgaben 3.43 – 3.47: Gib die gesuchten Ableitungen an.

3.43 **a)** $y = 9;\ y' = ?$ **b)** $s(t) = 100;\ \dot{s} = ?$ **c)** $v = a^2;\ \frac{dv}{dy} = ?$ **B**

3.44 **a)** $f(x) = x^4;\ f'(x) = ?$ **b)** $x = z^3;\ \frac{dx}{dz} = ?$ **c)** $v(t) = t^2;\ \dot{v} = ?$ **B**

3.45 **a)** $f(x) = 23x^3; f'(x) = ?$ **b)** $g(x) = \frac{1}{5}x^3; g'(x) = ?$ **c)** $y = 3x^0; y' = ?$ **B**

3.46 **a)** $f(x) = 3x^4 + 7; f'(x) = ?$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x; f'(x) = ?$ **c)** $f(x) = 2x^5 - \pi; f'(x) = ?$ **B**

3.47 **a)** $a = z^2;\ \frac{da}{dz} = ?, \frac{da}{dx} = ?$ **b)** $x = y^{11};\ \frac{dx}{dt} = ?, \frac{dx}{dy} = ?$ **c)** $e = m \cdot c^2,\ \frac{de}{dm} = ?, \frac{de}{dc} = ?$ **B**

Aufgaben 3.48 – 3.49: Ermittle jeweils die erste Ableitung und schreibe das Ergebnis mit positivem ganzzahligem Exponenten an.

3.48 **a)** $y = x$ **b)** $y = x^{-7}$ **c)** $y = \frac{1}{x^5}$ **d)** $y = \frac{1}{x^2}$ **e)** $y = \frac{1}{x^{-4}}$ **B**

3.49 **a)** $y = \sqrt[3]{x}$ **b)** $y = \sqrt[5]{x^2}$ **c)** $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ **d)** $y = \sqrt{x^3}$ **e)** $y = \sqrt[8]{x^0}$ **B**

3.50 Kreuze an: Die erste Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grads ist … **C**

○ eine lineare Funktion. ○ eine Funktion 4. Grads. ○ eine quadratische Funktion.

B **3.51** Gib die Funktion in der Form $y = c \cdot x^n$ ($n \in \mathbb{Q}$) an. Ermittle anschließend die Ableitung.

1) $y = 3\sqrt{x}$ **2)** $y = \sqrt{3x}$ **3)** $y = \sqrt{3}\,x$ **4)** $y = \frac{\sqrt{x}}{3}$ **5)** $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ **6)** $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$

Aufgaben 3.52 – 3.54: Ermittle jeweils die erste Ableitung und schreibe das Ergebnis immer mit positiven Exponenten an.

B **3.52** **a)** $y = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ **b)** $y = 6x^5 + 7x^3 + 5x - 9$ **c)** $y = 0{,}5x^4 + 0{,}25x^2 - 0{,}3$

B **3.53** **a)** $K(x) = 0{,}01x^3 + 2x + F$ **b)** $F(s) = as^3 + bs^2 - cs + d$ **c)** $f(y) = \frac{2}{3}y^6 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{5}{2}y^2$

B **3.54** **a)** $s(t) = 3t^2 - 5t + \frac{1}{t}$ **b)** $v(t) = \frac{t^2}{4} - 3t + \frac{2}{t}$ **c)** $f(z) = \frac{1}{a}z^3 + \frac{b}{4}z^2 - c \cdot z + \frac{d}{z}$

C **3.55** Setze im Differentialquotienten die fehlende Variable ein.

a) $r = ab + a$, $\frac{dr}{d...} = 1 + b$ **c)** $t = ab^a + a^2b$, $\frac{dt}{d...} = a^2b^{a-1} + a^2$

b) $s = 2ab^2 - 4a - 4b$, $\frac{ds}{d...} = 4ab - 4$ **d)** $u = 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^2$, $\frac{du}{d...} = 6ab^2 + 2b + 6a^2b$

BD **3.56** Ermittle alle von null verschiedenen Ableitungen. Erkläre zuerst, wie viele es davon gibt.
a) $y = x^4 - 3x^2$ **b)** $f(x) = 1 + x^3 - x^6$ **c)** $f(t) = t^4 + 4t^3 - 6t$

BCD **3.57** Überlege zuerst, ob die 13. Ableitung der gegebenen Funktion gleich null ist. Berechne die ersten drei Ableitungen und beurteile danach erneut, ob deine Überlegung richtig war.

a) $y = 3x^3$ **b)** $y = 5x^{-1}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \frac{3}{4x^2}$ **e)** $y = \frac{3x}{2x^{-2}}$ **f)** $y = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{x}}$

Aufgaben 3.58 – 3.59: Ermittle jeweils die angegebenen Ableitungen.

B **3.58** **a)** $h = 4r^2 + a \cdot r + \frac{r^3}{b}$;
$\frac{dh}{dr} = ?$, $\frac{dh}{da} = ?$, $\frac{dh}{db} = ?$

b) $S = \frac{f \cdot t}{g} + \frac{g}{f \cdot t}$;
$\frac{dS}{dg} = ?$, $\frac{dS}{dt} = ?$, $\frac{d^2S}{dt^2} = ?$

B **3.59** **a)** $T = \frac{a}{b \cdot \sqrt{t}} - \sqrt[3]{a}$;
$\frac{dT}{da} = ?$, $\frac{dT}{dt} = ?$, $\frac{dT^2}{dt^2} = ?$

b) $X = a \cdot t^3 - \frac{s}{a \cdot t} + \frac{\sqrt{a}}{s} \cdot t$;
$\frac{dX}{da} = ?$, $\frac{dX}{ds} = ?$, $\frac{dX}{dt} = ?$

Aufgaben 3.60 – 3.62: Ermittle jeweils die Ableitung an der angegebenen Stelle.

B **3.60** **a)** $y = 3x^2 - 2x + 1$, $x_0 = -1$ **b)** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4} + 3$, $x_0 = 25$ **c)** $y = 3 - \frac{1}{x}$, $x_0 = 0{,}5$

B **3.61** **a)** $q(t) = 2t^2 + 3t - \frac{1}{t}$, $t_0 = 3$ **b)** $f(x) = \frac{2x^5}{3} - \frac{x^3}{6} + \frac{9}{2x^2}$, $x_0 = -3$

B **3.62** **a)** $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$, $t_0 = 3{,}8$ **b)** $v(z) = \frac{a \cdot \sqrt{z}}{b \cdot z} - 2z$, $z_0 = 4$ **c)** $h(t) = \frac{s \cdot t + t^3}{s}$, $t_0 = \frac{s}{2}$

B **3.63** Berechne, an welcher Stelle der Funktion die Tangente die angegebene Steigung hat.
a) $y = x^2 - 5x + 11$, $k = \frac{1}{2}$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^3 - 4x$, $k = 10$ **c)** $y = x + \sqrt{x} - 1$, $k = \frac{5}{4}$

B **3.64** In welchen Punkten der Funktion hat die Tangente den angegebenen Steigungswinkel?
a) $y = x^2 + 7$, $\alpha = 45°$ **b)** $y = -\frac{\sqrt{3}}{x} + 1$, $\alpha = 60°$ **c)** $y = 5 - \sqrt{x}$, $\alpha = 26{,}565°$

B **3.65** Berechne, an welchen Stellen $y'' = 0$ gilt.
a) $y = x^4 + 10x^3 + 36x^2$ **b)** $y = x^5 - 3x^2$ **c)** $y = x^6 - 240x^2$

B **3.66** Ermittle die Gleichung der Tangente im Punkt P. Stelle die Funktion grafisch dar und zeichne die Tangente und das zugehörige Steigungsdreieck ein.
a) $y = x^2 - 3$, $P(1|y_P)$ **b)** $y = \frac{1}{10}x^3 + 2$, $P(-2|y_P)$ **c)** $y = \sqrt{x}$, $P(4|y_P)$

Textaufgaben

3.67 Auf Kirtagen findet man oft einen „Lukas". Dabei schlägt ein Besucher mit einem Hammer auf einen gefederten Kopf. Je heftiger der Schlag ausfällt, desto größer ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0, mit der ein Metallkörper in einem Rohr nach oben saust. Die erreichte Höhe dient als Maß für die Stärke des Schlags. AB

Für die Höhe h gilt das Weg-Zeit-Gesetz:

$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

t … Zeit in s, h … Höhe in m, $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$



Berechne, mit welcher Geschwindigkeit der Metallkörper am Ende eines 6 m hohen „Lukas" ankommt, wenn ihm eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 11\ \frac{m}{s}$ mitgegeben wurde.

3.68 In ferner Zukunft wird am Planeten Curioso ein Vergnügungspark mit einer Bungeejumping-Anlage errichtet. Das Seil ist 30 m lang, die Fallbeschleunigung auf Curioso beträgt $g_C \approx 4{,}71\ \frac{m}{s^2}$. Analog gilt für den freien Fall wie auf der Erde: AB

$s(t) = \frac{g_C}{2} \cdot t^2$

t … Zeit in Sekunden, s … Weg in Meter

1) Berechne, welche Höchstgeschwindigkeit erreicht werden kann.

2) Berechne die momentane Geschwindigkeit nach 15 m.

3) Berechne, welche Länge das Bungeeseil aufweisen müsste, damit eine Höchstgeschwindigkeit von $80\ \frac{km}{h}$ erreicht werden kann.

3.69 Die Form des Arms einer Leselampe kann annähernd durch die Funktion $f(x) = -0{,}1x^2 + 1{,}2x$ im Intervall [0; 4] beschrieben werden. AB

1) Ermittle die Ableitung der Funktion.

2) Berechne den Winkel, den der Lampenarm am Intervallanfang mit der senkrechten Achse einschließt und den Winkel, den der Funktionsgraph am Intervallende mit der waagrechten Achse einschließt.

3) Gib in beiden Fällen die Gleichung der Tangente an.

3.70 Der Querschnitt einer 4,3 m breiten und 1,4 m hohen Halfpipe für Skateboarder lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben (Angaben in Meter): ABC TE

$y = 0{,}057861 \cdot x^4 - 0{,}007861 \cdot x^2 + 0{,}2$

Jonny steht am oberen Ende der Bahn und lässt sich zum Zeitpunkt t = 0 s mit seinem Board in die Bahn fallen. Seine Anfangsgeschwindigkeit beträgt $0\ \frac{m}{s}$. Luft- und Reibungswiderstand werden vernachlässigt.

Für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion gilt näherungsweise:

$v(t) = 7{,}715 \cdot t - 5{,}510 \cdot t^2$

t … Zeit in Sekunden, v … Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$



1) Stelle die Halfpipe in einem Koordinatensystem grafisch dar. Beschreibe den Verlauf der Halfpipe mit eigenen Worten.

2) Berechne jenen Winkel zur Horizontalen, unter dem Jonny losfährt.

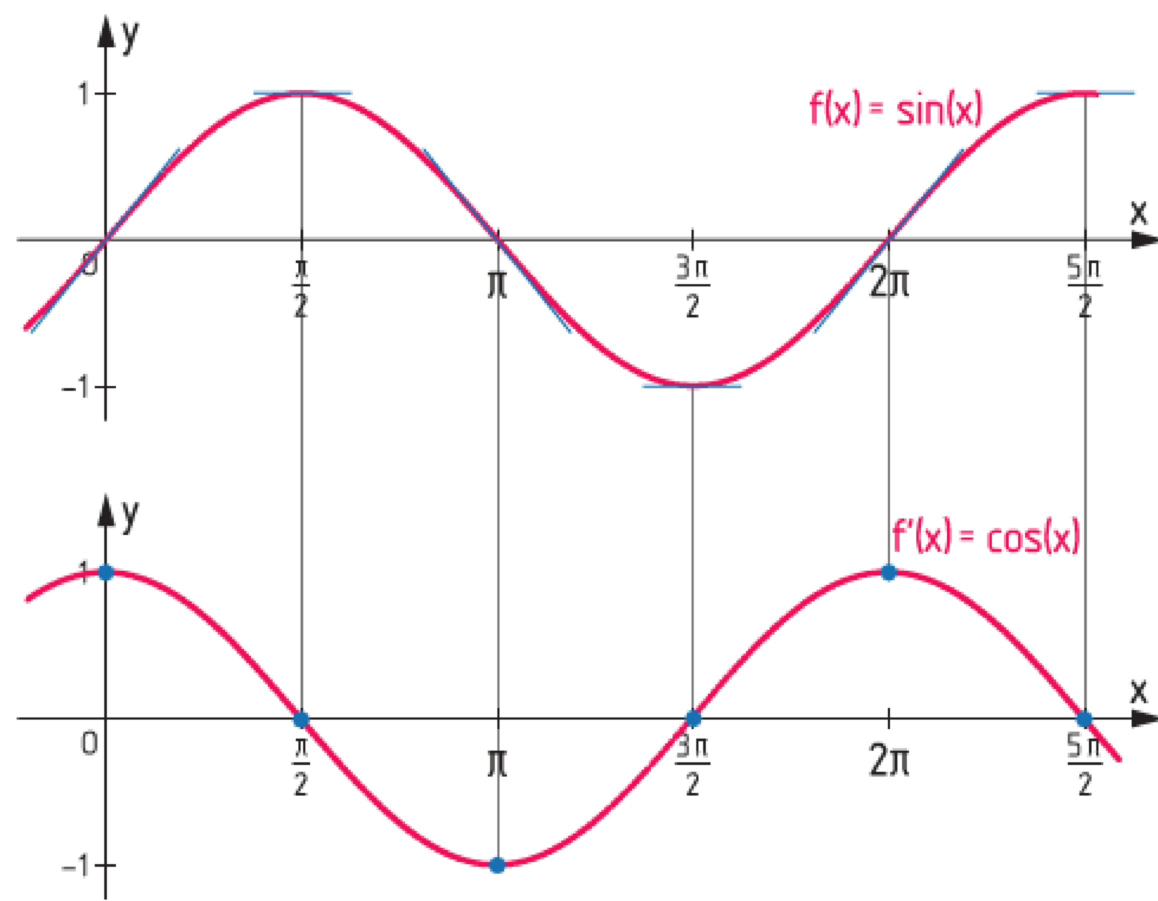
3) Ermittle die Beschleunigung-Zeit-Funktion a(t) für die Fahrt.

4) Berechne die Momentangeschwindigkeit v sowie die momentane Beschleunigung a von Jonny in der Mitte der Anlage.

3.5 Ableitungen transzendenter Funktionen

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(x)$ lässt sich zum Beipiel mithilfe der Grenzwertdefinition herleiten. An dieser Stelle wird sie durch grafisches Differenzieren veranschaulicht.



- An jenen Stellen, an denen der Funktionsgraph waagrechte Tangenten hat, hat die Ableitungsfunktion Nullstellen.
- Zeichnet man die Tangenten in den Schnittpunkten mit der x-Achse ein, so erkennt man:
  Bei $x = 0$, $x = 2\pi$, … beträgt die Steigung $k = 1$.
  Bei $x = \pi$, $x = 3\pi$, … beträgt die Steigung $k = -1$.
  Daher betragen die Funktionswerte der Ableitungsfunktion an diesen Stellen 1 bzw. –1.

Ermittelt man weitere Werte der Ableitungsfunktion durch grafisches Differenzieren, erkennt man, dass es sich um die Cosinusfunktion handelt, also $(\sin(x))' = \cos(x)$ gilt.

Für die Ableitung von $y = \cos(x)$ gilt $y' = -\sin(x)$. Dies kann analog gezeigt werden.
Für $y = \tan(x)$ erfolgt der Beweis in Aufgabe 3.113.

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \tan(x)$
$f'(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ mit $x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

B 3.71 An welcher Stelle des Intervalls $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hat $f(x) = \cos(x)$ einen Steigungswinkel von 30°?

Lösung:

$\alpha = 30° \Rightarrow k = \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — ● Steigung $k = \tan(\alpha)$

$k = f'(x) = -\sin(x)$

$-\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -0{,}615... \approx -0{,}62$ — ● Im angegebenen Intervall hat die goniometrische Gleichung nur eine Lösung.

An der Stelle $x = -0{,}62$ hat $f(x) = \cos(x)$ einen Steigungswinkel von 30°. — ● Das Argument einer Winkelfunktion ist im Bogenmaß (Radiant) anzugeben.

ABC 3.72 Berechne die 2. und die 6. Ableitung von $y = \sin(x)$. Beschreibe, was dir dabei auffällt. Gib alle Ableitung von $y = \sin(x)$ an.

$y = \sin(x)$
$y' = \cos(x)$
$y'' = -\sin(x)$
$y''' = -\cos(x)$
$y^{(4)} = \sin(x) = y$
$y^{(5)} = \cos(x) = y'$
$y^{(6)} = -\sin(x) = y''$

$\Rightarrow$ Nach jeweils vier Ableitungsschritten erhält man wieder die ursprüngliche Funktion.

$y = y^{(4)} = y^{(8)} = y^{(12)} = ... = y^{(4n)} = \sin(x)$
$y' = y^{(5)} = y^{(9)} = y^{(13)} = ... = y^{(4n+1)} = \cos(x)$
$y'' = y^{(6)} = y^{(10)} = y^{(14)} = ... = y^{(4n+2)} = -\sin(x)$
$y''' = y^{(7)} = y^{(11)} = y^{(15)} = ... = y^{(4n+3)} = -\cos(x)$
mit $n \in \mathbb{N}$

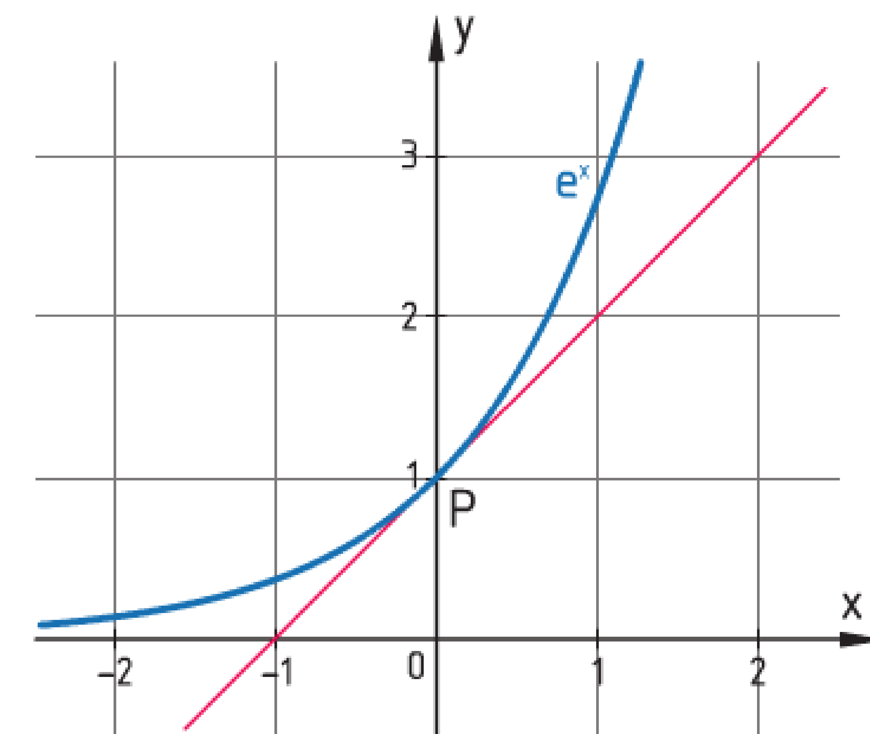
Ableitungen der Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

In Band 2 haben wir die besondere Rolle der Euler'schen Zahl und der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ kennengelernt. Auch beim Differenzieren wird ihre Sonderstellung klar. Sie ist die einzige Funktion, deren Ableitung mit der Funktion selbst ident ist.
Für $f(x) = e^x$ gilt: $f'(x) = f(x) = e^x$

Beweis:
Wir bilden zunächst den Differentialquotienten:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{e^{(x+\Delta x)} - e^x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x}\right) = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)$$

Der Grenzwert hängt nicht von der gewählten Stelle x ab und ist daher konstant.



In Band 2 wurde bereits festgestellt, dass die Funktion $f(x) = e^x$ im Punkt P(0|1) die Tangente $y = x + 1$, also die Steigung 1, hat.
Es muss daher gelten:

$$f'(0) = e^0 \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) = 1, \text{ daher gilt: } f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x \qquad \text{q.e.d.}$$

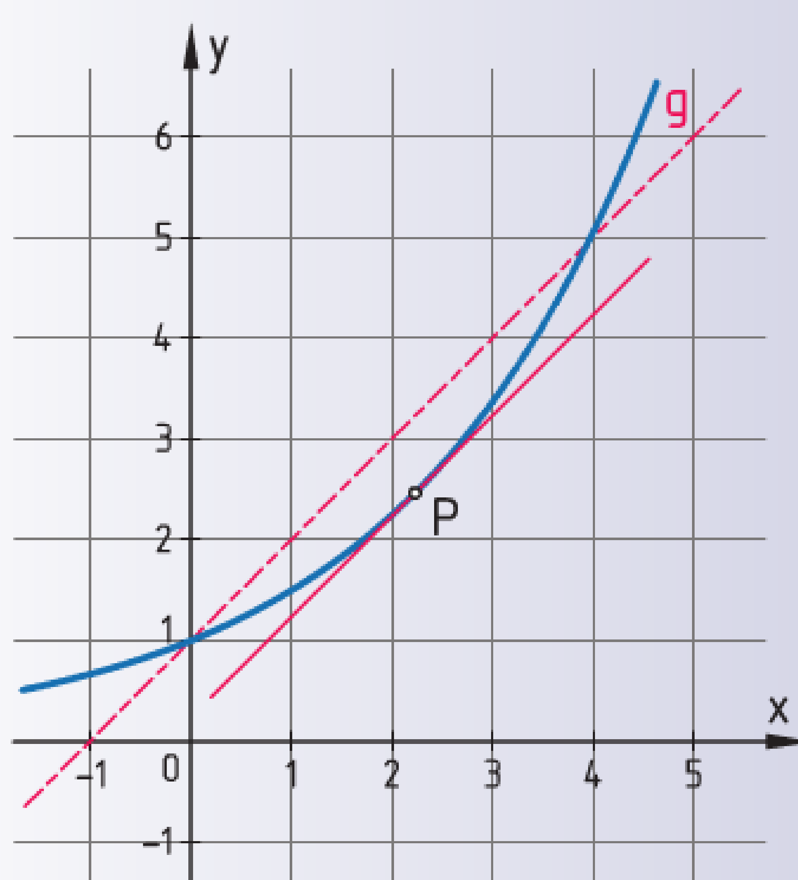
Ableitungen der Exponentialfunktionen und der Logarithmusfunktionen

$f(x) = e^x$	$f(x) = a^x$	$f(x) = \ln(x)$	$f(x) = \log_a(x)$
$f'(x) = e^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Weitere Beweise erfolgen in den Aufgaben.

3.73 In welchem Punkt $P(x_P|y_P)$ hat die Funktion $y = 1{,}5^x$ eine Tangente, die parallel zur Geraden g: $y = x + 1$ ist? Fertige eine Zeichnung an. Dokumentiere deine Vorgehensweise. **BC**

Lösung:



$y = 1{,}5^x$
Ich ermittle die 1. Ableitung:
$y' = 1{,}5^x \cdot \ln(1{,}5)$

Danach bestimme ich die Steigung der Geraden g.
g: $y = x + 1 \Rightarrow k = 1$

Die Tangente soll parallel zur Geraden sein, deshalb muss sie die gleiche Steigung wie die Gerade haben.
Ich setze daher die 1. Ableitung gleich 1:
$y'(x_P) = 1$
$1{,}5^{x_P} \cdot \ln(1{,}5) = 1$

Danach berechne ich x_P:
$x_P = 2{,}226... \approx 2{,}23$

Nun kann ich die y-Koordinate des Punkts berechnen.
$y_P = 1{,}5^{2{,}226...} = 2{,}466... \approx 2{,}47$

Im Punkt P(2,23|2,47) ist die Tangente parallel zur Geraden g.

ABC **3.74** Ermittle die ersten 4 Ableitungen von $f(x) = \ln(x)$. Beschreibe, was dir auffällt, und gib die n-te Ableitung an.

Lösung:

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = -2 \cdot (-1) \cdot x^{-3} = 2 \cdot \frac{1}{x^3}$

$f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2 \cdot x^{-4} = -6 \cdot \frac{1}{x^4}$

Das Vorzeichen wechselt bei jeder Ableitung: $(-1)^{n-1}$

Der Exponent im Nenner steigt jeweils um 1 an: $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, ..., \frac{1}{x^n}$

Für den Faktor gilt: $(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Somit erhält man für die n-te Ableitung:

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x^n}$

Das Produkt $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ wird **n-Faktorielle** oder **n-Fakultät** genannt.
Man schreibt kurz: n! [Sprich „n-Faktorielle“ oder „n-Fakultät“]

Ableitungen der Hyperbelfunktionen

Die Ableitungen der Hyperbelfunktionen werden mithilfe der Definition als Exponentialfunktionen ermittelt.

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Ableitungen der Hyperbelfunktionen

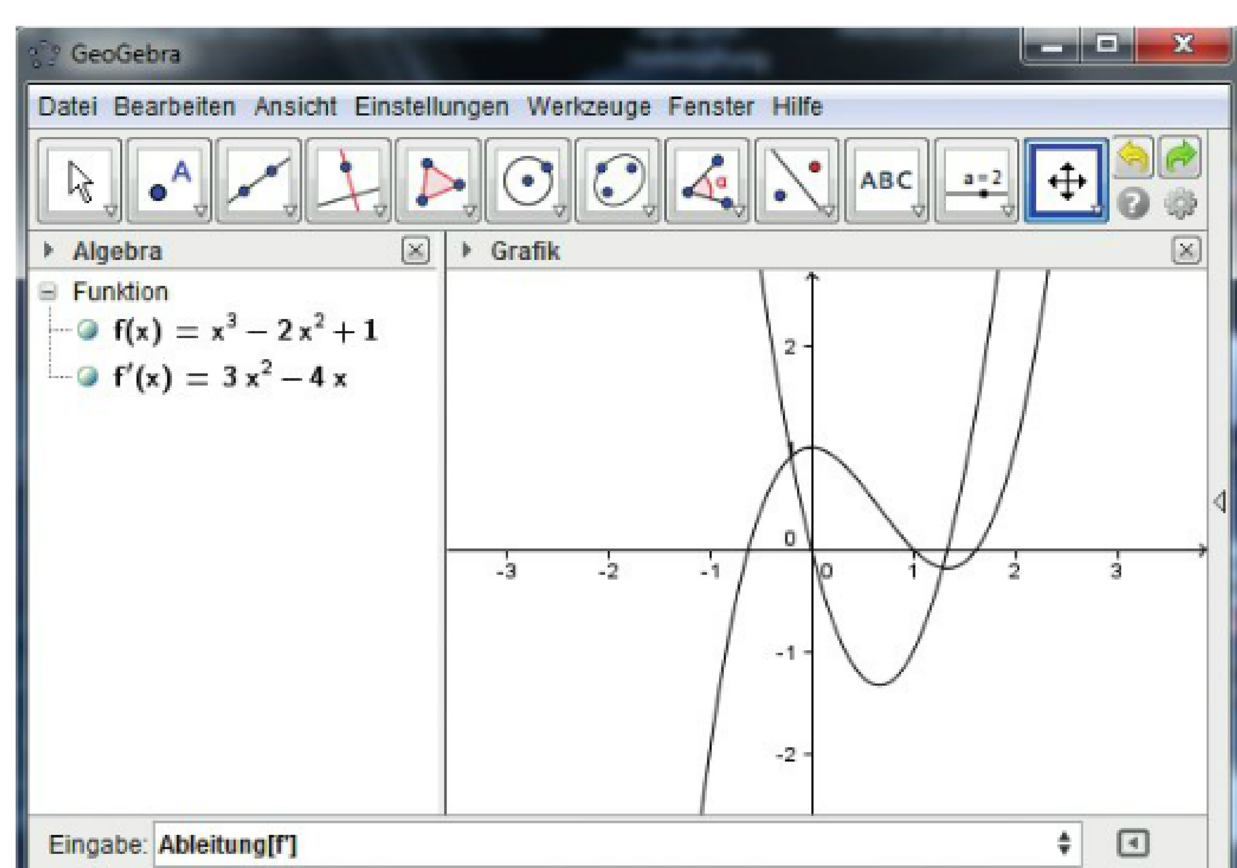
$f(x) = \sinh(x)$	$f(x) = \cosh(x)$	$f(x) = \tanh(x)$
$f'(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \sinh(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$



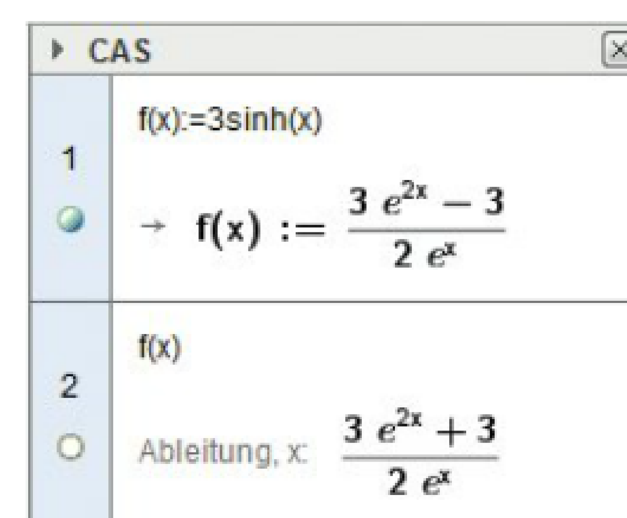
Technologieeinsatz: Ableitungen
GeoGebra

TI-Nspire, Mathcad: www.hpt.at

Im Algebra-Fenster stehen die Befehle **Ableitung[Funktion]** und **Ableitung[Funktion, Grad der Ableitung]** zur Verfügung. ZB: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$



Im CAS-Fenster können Ableitungen mithilfe der Befehle **Ableitung[Ausdruck]**, **Ableitung[Ausdruck, Variable]** oder **Ableitung[Ausdruck, Variable, Grad der Ableitung]** oder mit dem Werkzeug ∂ ermittelt werden. ZB: $f(x) = 3 \cdot \sinh(x)$

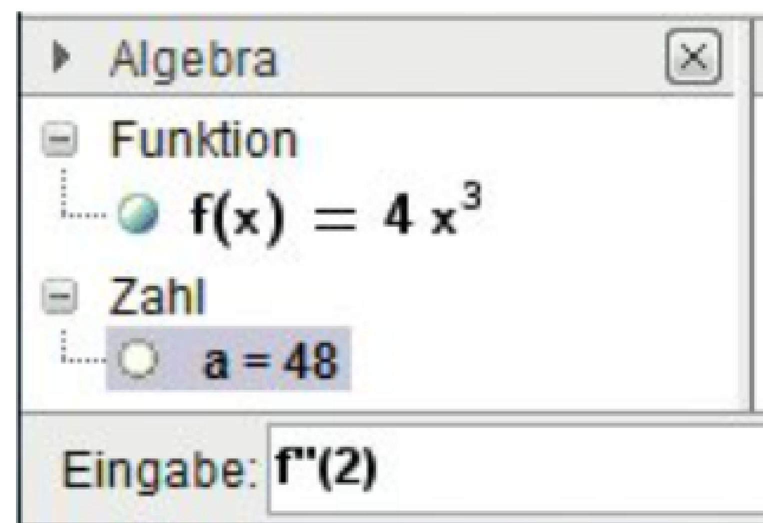


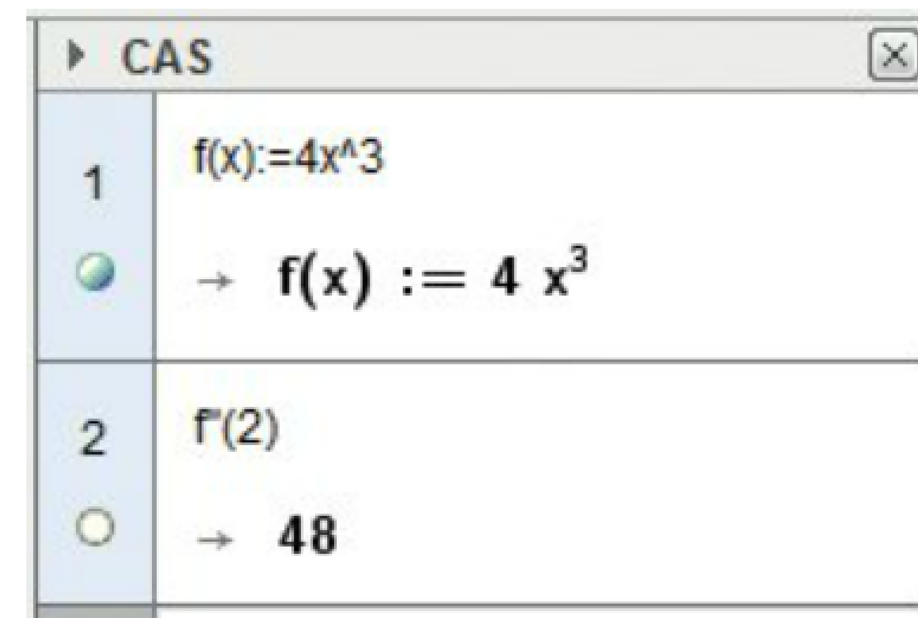
In beiden Fenstern kann auch die „Strich“–Schreibweise $f'(x)$ verwendet werden.

Technologieeinsatz: Ableitung an einer bestimmten Stelle x_0
GeoGebra

TI-Nspire, Mathcad: www.hpt.at

Durch Angabe des Arguments kann der Wert einer Ableitung an einer bestimmten Stelle berechnet werden.
ZB: Die 2. Ableitung von $f(x) = 4x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$ soll berechnet werden.

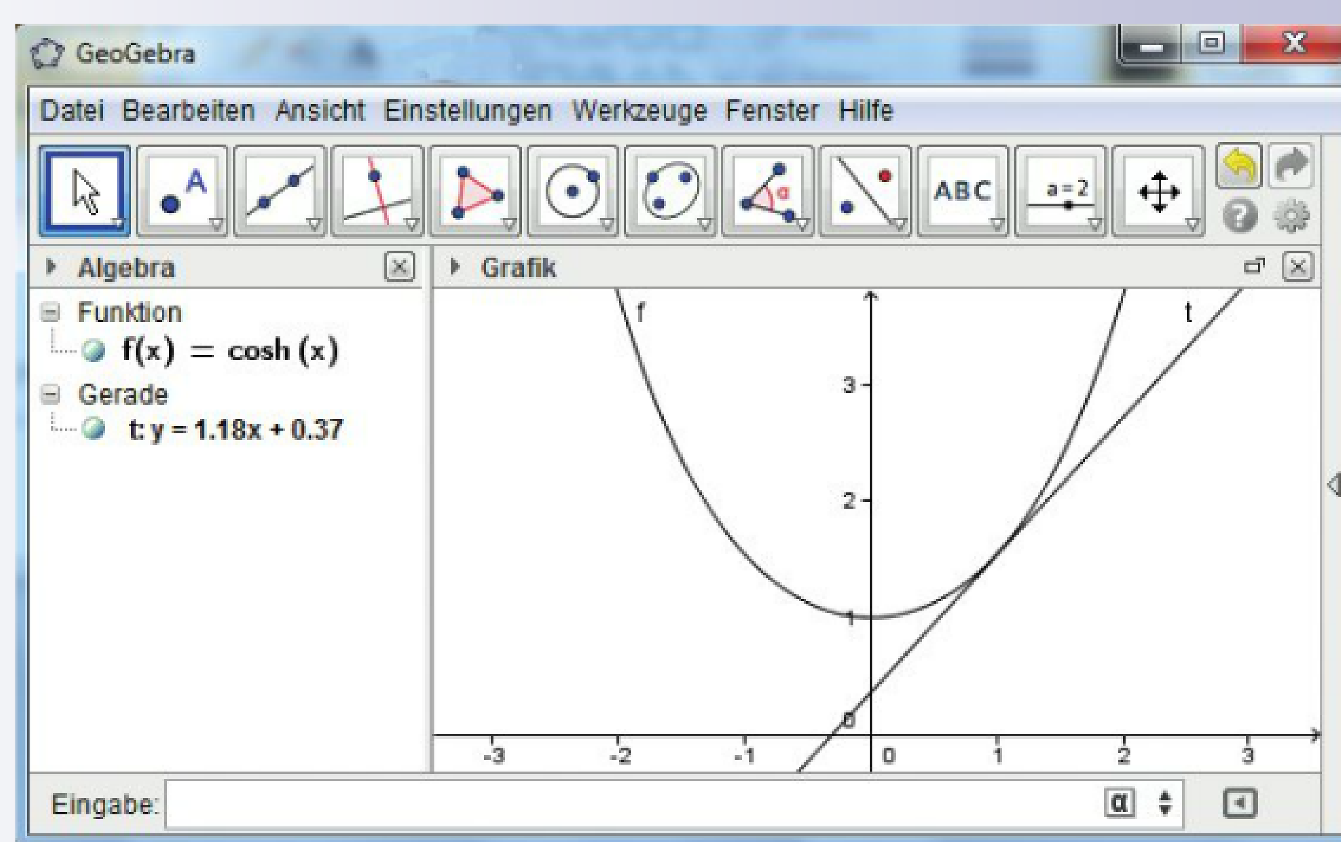




3.75 ***1)*** Ermittle die Gleichung der Tangente t der Funktion $f(x) = \cosh(x)$ an der Stelle $x_T = 1$. BC
2) Stelle die Funktion f und die Tangente t mithilfe von Technologieeinsatz grafisch dar und beschreibe deine Vorgehensweise. Vergleiche mit dem Ergebnis aus ***1)***.

Lösung mit GeoGebra:
1) $k = f'(1) = \sinh(1) = 1{,}1752... \approx 1{,}18$
$y_T = \cosh(1) = 1{,}5430...$
$y_T = k \cdot x_T + d \Rightarrow d = y_T - k \cdot x_T = \cosh(1) - \sinh(1) \cdot 1 = 0{,}3678... \approx 0{,}37$
Die Gleichung für t lautet: $y = 1{,}18x + 0{,}37$

2)



Die Funktion f in die Eingabezeile eingeben.

Mit dem Befehl **Tangente[x-Wert, Funktion]** Tangente zeichnen lassen.

Die Funktionsgleichung der Tangente lässt sich jetzt ablesen. Man erhält das gleiche Ergebnis:
t: $y = 1{,}18x + 0{,}37$

Aufgaben 3.76 – 3.79: Ermittle jeweils die erste Ableitung.

3.76 **a)** $f(x) = 2 \cdot \sin(x) - 5 \cdot \cos(x)$ **b)** $y = x + \tan(x)$ **c)** $f(t) = 3 \cdot \cos(t) + \frac{1}{t}$ B

3.77 **a)** $y = 4e^x + e^2$ **b)** $f(x) = 2^x - 3x$ **c)** $y(t) = 3e^t - e^x$ B

3.78 **a)** $f(x) = 5 \cdot \ln(x) + 5$ **b)** $y = 1 + x + \lg(x)$ **c)** $y(t) = 2 \cdot \ln(t) - t \cdot \ln(2)$ B

3.79 **a)** $y = x - \cosh(x)$ **b)** $f(x) = e^x - \sinh(x)$ **c)** $y = x + 2 \cdot \tanh(x) - 1$ B

Aufgaben 3.80 – 3.83: Ermittle jeweils die angegebenen Ableitungen.

3.80 **a)** $v = a^b$; $\frac{dv}{da} = ?, \frac{dv}{db} = ?, \frac{dv}{dx} = ?$ **b)** $z = \sin(\alpha)$; $\frac{dz}{d\alpha} = ?, \frac{dz}{dt} = ?$ B

3.81 **a)** $z = a^b + 2ab^2 - 5a^2b$; $\frac{dz}{da} = ?, \frac{dz}{db} = ?$ **b)** $f = a \cdot t + a^t$; $\frac{df}{dt} =?, \frac{df}{da} =?$ B

3.82 **a)** $t = \frac{s^y}{3} - y^s$; $\frac{dt}{ds} = ?, \frac{dt}{dy} = ?$ **b)** $Y = \sin(\alpha) \cdot \sin(t) + \cos(\alpha) \cdot \cos(t)$; $\frac{dY}{d\alpha} = ?, \frac{dY}{dt} = ?$ B

3.83 **a)** $V = a^b + c^3$; $\frac{d^2V}{da^2} = ?, \frac{d^2V}{db^2} = ?, \frac{d^2V}{dc^2} = ?$ **b)** $X = \sin(t) \cdot \cos(\alpha)$; $\frac{d^2X}{dt^2} = ?, \frac{d^2X}{d\alpha^2} = ?$ B

Differentialrechnung

D **3.84** Die Funktion $f(x) = 3xz^2 + 2x^2 - z \cdot \sin(x)$ sollte mithilfe von Technologieeinsatz differenziert werden. Bei der Eingabe ist es zu Fehlern gekommen. Beschreibe, welche Fehler gemacht wurden. Beschreibe, wie das Programm die Eingabe jeweils verarbeitet hat.



A) $\frac{d}{dx}(3\,xz^2 + 2\,x^2 - z \cdot sinx) \rightarrow 4 \cdot x$

B) $\frac{d}{dx}(3\,x \cdot z^2 + 2\,x^2 - zsin(x)) \rightarrow 3 \cdot z^2 + 4 \cdot x - \frac{d}{dx} zsin(x)$

C) $\frac{d}{dx} 3\,x \cdot z^2 + 2\,x^2 - z \cdot \sin(x) \rightarrow 2 \cdot x^2 + 3 \cdot z^2 - \sin(x) \cdot z$

C **3.85** Setze im Differentialquotienten die fehlende Variable ein.

a) $r = ab + a^b$; $\frac{dr}{d...} = a \cdot (1 + a^{b-1} \cdot \ln(a))$

b) $t = e^a + 2a^2b$; $\frac{dt}{d...} = e^a + 4ab$

c) $t = a^b - b^a$; $\frac{dt}{d...} = (a^{b-1} - b^{a-1} \cdot \ln(b)) \cdot b$

d) $u = y \cdot e^x - \ln(y) - \frac{x}{y}$; $\frac{du}{d...} = y \cdot e^x - \frac{1}{y}$

Aufgaben 3.86 – 3.87: Ermittle jeweils den Wert der Ableitung an der gegebenen Stelle.

B **3.86** **a)** $y = \tan(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$ **b)** $y = \cos(t)$, $t_0 = 0{,}8$

B **3.87** **a)** $y = 2^x$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}$ **b)** $y = \lg(x)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ **c)** $y = e^x$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$ **d)** $y = \ln(x)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}$

B **3.88** Ermittle die Gleichung der Tangente an die Funktion an der gegebenen Stelle.
a) $y = 3 \cdot \ln(x)$, $x_0 = 2$ **b)** $y = \cos(t)$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$ **c)** $y = \lg(x)$, $x_0 = 10$

B **3.89** Stelle die gegebene Funktion grafisch dar. Berechne, in welchem Punkt und unter welchem Winkel sie die y-Achse schneidet und zeichne dort die Tangente ein.



a) $y = 0{,}8^x$ **b)** $y = \sinh(x)$ **c)** $y = \tan(x)$

Aufgaben 3.90 – 3.91: Gib jeweils die Ableitung an. Ermittle weiters ihren Wert an der angegebenen Stelle und gib den Steigungswinkel der Tangente an dieser Stelle an.

B **3.90** **a)** $f(x) = 3 \cdot \sin(x) - 5 \cdot \cos(x)$, $x_0 = 0$ **c)** $y = 2x - \sin(x)$, $x_0 = 0{,}5$
b) $y(t) = 1 - \tan(t)$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$ **d)** $f(t) = \cos(t) - t$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$

B **3.91** **a)** $y = -2e^x$, $x_0 = 0$ **b)** $f(x) = 1 + \ln(x)$, $x_0 = 1$ **c)** $y = 2 \cdot 0{,}5^x$, $x_0 = 2$

B **3.92** Ermittle die Gleichung der Tangente an der angegebenen Stelle.
a) $f(x) = e^x - 1$, $x_0 = 0$ **b)** $y = 2 + 0{,}5 \cdot \ln(x)$, $x_0 = 1$ **c)** $y(t) = t - 2 \cdot \sin(t)$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$

Aufgaben 3.93 – 3.94: In welchen Punkten haben die Funktionen die angegebene Steigung?

B **3.93** **a)** $y = \frac{1}{2}e^x$, $k = \frac{1}{2}$ **b)** $y = \frac{\ln(x)}{4}$, $k = 0{,}47$ **c)** $f(x) = 1 + 3^x$, $k = 0{,}21$

B **3.94** **a)** $y = 2 \cdot \sin(x) - 1$, $k = 1$ **b)** $f(x) = x - \cos(x)$, $k = -0{,}28$ **c)** $f(t) = 1 + 0{,}5 \cdot \tan(t)$, $k = 1{,}3$

BC **3.95** In welchen Punkten hat die Funktion eine waagrechte Tangente?
a) $y = 1 + 1{,}5 \cdot \sin(x)$ **b)** $f(x) = 3 - 2 \cdot \cos(x)$ **c)** $y(t) = \sin(t) + \cos(t)$

BC **3.96** Überprüfe die Ableitungsregel für $f(x) = \cos(x)$ durch grafisches Differenzieren.

C **3.97** Gib an, wie oft differenziert wurde.

a) $f(t) = e^t + \frac{t^3}{6}$; $f^{\cdots}(t) = e^t + 1$

b) $f(t) = 7e^t + t^2 \cdot e^3$; $f^{\cdots}(t) = 7e^t + 2e^3$

c) $f(t) = \ln(t) - \frac{1}{4t}$; $f^{\cdots}(t) = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \cdot \left(-\frac{6}{t^3}\right)$

d) $f(t) = -\sin(t) + \cos(t)$; $f^{(4n + \dots)}(t) = \sin(t) + \cos(t)$

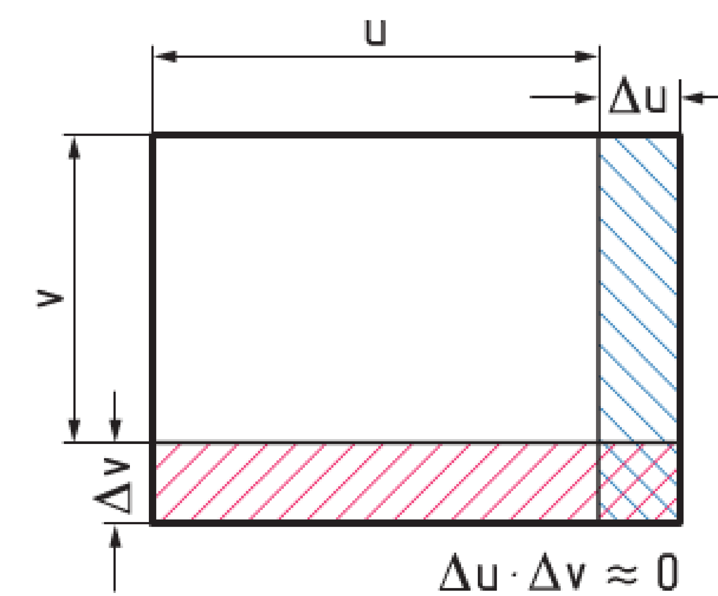
3.6 Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

3.6.1 Produktregel

Ist eine Funktion das Produkt zweier Funktionen, zum Beispiel $y = x \cdot e^x$, so wird die **Produktregel** zum Ableiten benötigt.

3.98 **1)** Differenziere die drei Funktionen: $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$ und $y_3 = y_1 \cdot y_2 = x^5$ BC
2) Überprüfe, ob $y_1' \cdot y_2' = y_3'$ ist.

Anhand einer Skizze kann man überlegen: Das Produkt $u \cdot v$ kann durch den Flächeninhalt eines Rechtecks veranschaulicht werden. Wird nun u um Δu und v um Δv vergrößert, so ändert sich der Flächeninhalt um die schraffierten Flächen. Sind die Änderungen Δu und Δv sehr klein, so ist $\Delta u \cdot \Delta v$ vernachlässigbar klein. Für die Änderung des Flächeninhalts gilt dann: $\Delta(u \cdot v) \approx \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v$



Herleitung der Produktregel mittels Grenzübergang für $\Delta x \to 0$:

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}\right)$$

● $-u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x)$ ergänzen, herausheben

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

● Der Grenzübergang darf für jeden Faktor bzw. Summanden einzeln durchgeführt werden.

Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ Kurzform: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Merkhilfe:
„1. Faktor abgeleitet · 2. Faktor unverändert + 1. Faktor unverändert · 2. Faktor abgeleitet“

3.99 Ermittle y'. B

a) $y = x^2 \cdot \sin(x)$ **b)** $y = e^x \cdot (x^2 + 3x + 6)$

Lösung:

a) $y = x^2 \cdot \sin(x)$
$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$
$v = \sin(x) \Rightarrow v' = \cos(x)$
$y' = \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} + \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}$

b) $y = e^x \cdot (x^2 + 3x + 6)$
$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$
$v = x^2 + 3x + 6 \Rightarrow v' = 2x + 3$
$y' = \underbrace{e^x}_{u'} \cdot \underbrace{(x^2 + 3x + 6)}_{v} + \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{(2x + 3)}_{v'} = e^x \cdot (x^2 + 5x + 9)$

Produkte mit mehr als zwei Faktoren können zu Teilprodukten zusammengefasst werden.

ZB: $y = x \cdot e^x \cdot \sin(x) = (x \cdot e^x) \cdot \sin(x)$
$u = x \cdot e^x \Rightarrow u' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$
$v = \sin(x) \Rightarrow v' = \cos(x)$
$y' = 1 \cdot e^x \cdot \sin(x) + x \cdot e^x \cdot \sin(x) + x \cdot e^x \cdot \cos(x) =$
$= e^x \cdot (\sin(x) + x \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x))$

● Da $u = x \cdot e^x$ ein Produkt ist, muss bei der Berechnung der Ableitung u' die Produktregel angewendet werden.

Aufgaben 3.100 – 3.101: Erkläre, ob bei der Ableitung die Produktregel benötigt wird.

D **3.100** ***1)*** $y = 2 \cdot \sin(x)$ ***2)*** $y = x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ***3)*** $y = x \cdot \cos(x)$ ***4)*** $y = x \cdot e^2$

D **3.101** ***1)*** $f(b) = b \cdot \frac{b}{4}$ ***2)*** $f(a) = \ln(2) \cdot 3a^3$ ***3)*** $f(t) = t^2 \cdot \sin(t)$ ***4)*** $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

B **3.102** Ermittle jeweils die erste Ableitung mithilfe der Produktregel. Überprüfe das Ergebnis durch vorheriges Ausmultiplizieren.
a) $y = 5x^3 \cdot (2x^2 - 6)$ ***b)*** $y = (4x^3 - 6) \cdot (x^2 + 1)$ ***c)*** $y = (9x^2 - 3) \cdot (2 + 5x)$

Aufgaben 3.103 – 3.106: Ermittle jeweils die erste Ableitung.

B **3.103** ***a)*** $y = 2x \cdot \cos(x)$ ***b)*** $y = 4x^3 \cdot \sin(x)$ ***c)*** $y = 3x^4 \cdot \sin(x)$ ***d)*** $y = x^2 \cdot \cos(x)$

B **3.104** ***a)*** $y = \cos^2(x)$ ***b)*** $y = \tan^2(x)$ ***c)*** $y = \cos(x) \cdot \sin(x)$ ***d)*** $y = 2 \cdot \cos(x) \cdot \tan(x)$

B **3.105** ***a)*** $f(t) = 7t \cdot e^t$ ***b)*** $f(t) = t^4 \cdot e^t$ ***c)*** $f(t) = e^t \cdot t^2$ ***d)*** $f(t) = 2t^3 \cdot e^t \cdot \ln(2)$

B **3.106** ***a)*** $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ ***b)*** $f(x) = x \cdot \lg(x)$ ***c)*** $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$ ***d)*** $f(t) = 3e^t \cdot \ln(t)$

BD **3.107** Für die Ableitung der Funktion $y = \sqrt{x} \cdot (2x^2 - 2)$ wurden folgende Lösungen ermittelt. Zeige, dass die Ergebnisse richtig sind und erkläre, wie jeweils vorgegangen wurde.
A) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x^2 - 2) + \sqrt{x} \cdot 4x$ ***B)*** $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^2 + 4\sqrt{x} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ***C)*** $y' = 5x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$

Aufgaben 3.108 – 3.111: Ermittle jeweils die erste Ableitung.

B **3.108** ***a)*** $f(x) = (3 - x) \cdot e^x$ ***b)*** $f(t) = \frac{R}{L} \cdot t \cdot (1 - e^t)$ ***c)*** $f(x) = 5x \cdot 2^x$

B **3.109** ***a)*** $y = (x^2 + 3) \cdot 5^x$ ***b)*** $y = 2 \cdot \sqrt[5]{x} \cdot (x^3 - \cos(x))$ ***c)*** $y = (e^x - 1) \cdot (2^x + 1)$

B **3.110** ***a)*** $f(x) = x^2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ ***b)*** $y = \sqrt{x} \cdot (x^2 + 3) \cdot e^x$ ***c)*** $f(t) = t \cdot \ln(t) \cdot 2^t$

B **3.111** ***a)*** $f(x) = e^x \cdot (2x + 4) \cdot x^2$ ***b)*** $y = 2x^3 \cdot (x^2 - 1) \cdot \cos(x)$ ***c)*** $f(t) = t \cdot (e^t + 1) \cdot (\ln(t) - 1)$

3.6.2 Quotientenregel

Ist eine Funktion ein Quotient zweier Funktionen, zum Beispiel $y = \frac{x}{\sin(x)}$, so wird meist die **Quotientenregel** zum Ableiten benötigt. Sie kann mithilfe der Produktregel und der im folgenden Abschnitt gezeigten Kettenregel hergeleitet werden (Beweis: Aufgabe 3.174).

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \qquad \text{Kurzform: } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Merkhilfe: „$\frac{\text{Zähler abgeleitet} \cdot \text{Nenner unverändert} - \text{Zähler unverändert} \cdot \text{Nenner abgeleitet}}{(\text{Nenner unverändert})^2}$“

B **3.112** Ermittle die Ableitung: ***a)*** $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$; $f'(x) = ?$ ***b)*** $z(t) = \frac{a \cdot e^t}{b - t}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

Lösung:

a) $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$

$u = 5x \Rightarrow u' = 5$

$v = x^2 + 1 \Rightarrow v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{5}^{u'} \cdot \overbrace{(x^2 + 1)}^{v} - \overbrace{5x}^{u} \cdot \overbrace{2x}^{v'}}{\underbrace{(x^2 + 1)^2}_{v^2}} = \frac{5x^2 + 5 - 10x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-5x^2 + 5}{(x^2 + 1)^2}$$

b) $z(t) = \frac{a \cdot e^t}{b - t}$

$u = a \cdot e^t \Rightarrow u' = a \cdot e^t$

$v = b - t \Rightarrow v' = -1$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{a \cdot e^t \cdot (b - t) - a \cdot e^t \cdot (-1)}{(b - t)^2} = \frac{a \cdot e^t \cdot (b - t + 1)}{(b - t)^2}$$

3.113 Zeige, dass für die erste Ableitung von $y = \tan(x)$ gilt: $y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ bzw. $y' = 1 + \tan^2(x)$ B

Lösung:

$y = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$u = \sin(x) \Rightarrow u' = \cos(x)$

$v = \cos(x) \Rightarrow v' = -\sin(x)$

$y' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$

$y' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ • $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

bzw.

$y' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan^2(x)$ w.z.z.w.

3.114 Erkläre, ob bei der Ableitung die Quotientenregel verwendet werden muss. D

1) $y = \frac{2}{x}$ **2)** $y = \frac{x+1}{x-1}$ **3)** $y = \frac{x^2+4}{x}$ **4)** $y = \frac{x+3}{2}$ **5)** $y = \frac{2}{x+2}$

Aufgaben 3.115 – 3.118: Ermittle jeweils die erste Ableitung und vereinfache die Ergebnisse so weit wie möglich.

3.115 **a)** $f(x) = \frac{2x^3}{1+2x}$ **b)** $f(x) = \frac{5-x}{x^3-1}$ **c)** $y = \frac{3x+1}{4x^2+1}$ B

3.116 **a)** $f(x) = \frac{2x}{x^3-7}$ **b)** $y = \frac{2x^2-5x}{x^3-3}$ **c)** $f(x) = \frac{x^3-5x^2}{x^2-7}$ B

3.117 **a)** $y = \frac{2x^5}{e^x}$ **b)** $y = \frac{e^x+1}{2e^x-1}$ **c)** $f(x) = \frac{x+e^x}{x^2-e^x}$ B

3.118 **a)** $y = \frac{\ln(x)}{2x}$ **b)** $y = \frac{x}{\ln(x)}$ **c)** $y = \frac{1-\ln(x)}{x^6}$ B

3.119 Verwende zum Ableiten **1)** die Quotientenregel und **2)** die Produktregel. B
Zeige, dass beide Vorgehensweisen zum gleichen Ergebnis führen.

a) $y = \frac{\sin(x)}{x}$ **b)** $f(t) = \frac{\cos(t)}{t^2}$

3.120 Erkläre, welcher Fehler beim Ableiten gemacht wurde. CD

a) $y = \frac{x}{4}$; $y' = \frac{4-x}{16}$ **b)** $f(t) = \frac{\sin(t)}{t^3}$; $f'(t) = \frac{\cos(t) \cdot t^3 + \sin(t) \cdot 3t^2}{t^6}$

Aufgaben 3.121 – 3.122: Ermittle jeweils die erste Ableitung.

3.121 **a)** $y = \frac{x^3}{\cos(x)}$ **b)** $f(x) = \frac{2x}{\cos(x)}$ **c)** $y(t) = \frac{\sin(t) - t}{\cos(t)}$ B

3.122 **a)** $y = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) \cdot \sin(x)}$ **b)** $f(t) = \frac{t^2 \cdot \sin(t)}{t^2 - \cos(t)}$ **c)** $y = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) \cdot \cos(x)}$ B

3.123 Erkläre, welche Ableitungsregeln jeweils anzuwenden sind. CD

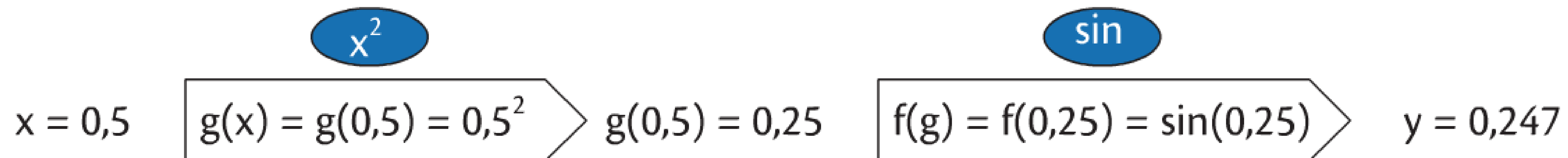
1) $y = 3 \cdot \frac{1}{x^3}$ **2)** $y = 4 \cdot \sin(x)$ **3)** $f(t) = t^2 \cdot \frac{1}{\sin(x)}$ **4)** $y = 2 \cdot \frac{e^x}{\ln(x)}$ **5)** $s(t) = e^t \cdot \frac{1}{t^3}$

3.124 Ermittle die angegebenen Ableitungen. B

a) $z = \frac{a \cdot b + r}{a + b}$; $\frac{dz}{da} = ?$, $\frac{dz}{db} = ?$, $\frac{dz}{dr} = ?$ **b)** $x = r \cdot \left(s + \frac{r+s}{r-s}\right)$; $\frac{dx}{dr} = ?$, $\frac{dx}{ds} = ?$

3.6.3 Kettenregel

Führt man zwei Funktionen g und f hintereinander aus, so erhält man eine zusammengesetzte Funktion f(g(x)).
ZB: $y = \sin(x^2)$ bedeutet: Der x-Wert wird zuerst quadriert, anschließend wird der Sinus dieses Zwischenergebnisses berechnet.



Die Funktion g(x) wird zuerst ausgeführt. Man nennt sie **„innere Funktion"**.

Die Funktion f(g) wird danach ausgeführt. Man nennt sie **„äußere Funktion"**.

Diese verketteten Funktionen können nicht mit den bisher erlernten Regeln abgeleitet werden, man benötigt daher eine weitere Ableitungsregel.

Die Ableitung einer zusammengesetzen Funktion erfolgt nach der **Kettenregel**.

$y = f(g(x))$		Differentialschreibweise:
$y' = \big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$		$y' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$
äußere Ableitung:	$f'(g(x))$	äußere Ableitung: $\frac{df}{dg}$
innere Ableitung:	$g'(x)$	innere Ableitung: $\frac{dg}{dx}$

Merkhilfe: „Äußere Ableitung (innere Funktion unverändert) mal innere Ableitung".

Beweis:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\underbrace{g(x+\Delta x) - g(x)}_{\Delta g}} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) =$$

- Der Differenzenquotient wird erweitert.

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta g}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) =$$

- Der Grenzübergang ist für jeden Faktor getrennt durchzuführen.

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Aus $\Delta x \to 0$ folgt $\Delta g \to 0$.

ZB: Beim Ableiten von $y = (x^2 + 1)^{11}$ werden die beiden verketteten Funktionen getrennt betrachtet.

$y = \mathbf{(x^2 + 1)^{11}}$

Innere Funktion: $g(x) = x^2 + 1$
- Die innere Funktion wird durch g substituiert.

Äußere Funktion: $f(g) = g^{11}$

$\frac{dg}{dx} = g'(x) = 2x$
- Ableiten der inneren Funktion

$\frac{df}{dg} = f'(g) = 11 \cdot g^{10}$
- Ableiten der äußeren Funktion nach g

$$y' = \overbrace{11 \cdot (g)^{10}}^{f'(g)} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 22x \cdot (x^2 + 1)^{10}$$

- Einsetzen und Rücksubstituieren

3.125 Ermittle jeweils die erste Ableitung und beschreibe deine Vorgehensweise. BC

a) $y = \sqrt{1-x}$ **b)** $y = \sin^2(x)$ **c)** $y = e^{\frac{x}{2}}$

Lösung:

a) $y = \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ — Funktion als Potenzfunktion anschreiben.

Innere Funktion: $g(x) = 1 - x$ — Innere und äußere Funktion erkennen.

Äußere Funktion: $f(g) = g^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \underbrace{\tfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(-1)}_{g'(x)} =$$

Mithilfe der Kettenregel die erste Ableitung bilden

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Ergebnis vereinfachen und mithilfe einer Wurzel angeben.

b) $y = \sin^2(x) = (\sin(x))^2$

$$y' = \underbrace{2 \cdot (\sin(x))^1}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'(x)} =$$

$$= 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$$

$\sin^2(x)$ ist eine andere Schreibweise für $(\sin(x))^2$. Die Sinusfunktion ist die innere Funktion und das Quadrieren die äußere Funktion. Die Ableitung wird mithilfe der Kettenregel gebildet. Anschließend wird das Ergebnis mithilfe des Summensatzes vereinfacht: $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

c) $y = e^{\frac{x}{2}} = e^{\left(\frac{x}{2}\right)}$ — Innere und äußere Funktion bestimmen.

$$y' = \underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{g'(x)} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$$

Äußere Ableitung mal innerer Ableitung.

3.126 Ermittle jeweils die gesuchte Ableitung. B

a) $u_c(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$; $\frac{du_c}{dt} = ?$ **b)** $f(t) = t \cdot \sin(\omega t)$; $\frac{df}{dt} = ?$

Lösung:

a) $u_c(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$$\frac{du_c}{dt} = U_0 \cdot \left(0 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right)\right) = \frac{U_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Der Faktor U_0 ist ein konstanter Faktor, der unverändert erhalten bleibt. Es ist daher keine Produktregel nötig.
- Im Term $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ist 1 eine additive Konstante, die Ableitung ist daher 0.

b) $f(t) = t \cdot \sin(\omega t)$

- Produktregel anwenden

$u = t \Rightarrow u' = 1$

$v = \sin(\omega t) \Rightarrow v' = \cos(\omega t) \cdot \omega$

- $v = \sin(\omega t)$ ist eine zusammengesetzte Funktion. Bei der Berechnung von v' ist die Kettenregel anzuwenden.

$$\frac{df}{dt} = \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(\omega t)}_{v} + \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{\cos(\omega t) \cdot \omega}_{v'} =$$

$$= \sin(\omega t) + \omega t \cdot \cos(\omega t)$$

B **3.127** Ermittle jeweils die erste Ableitung.

a) $y = \frac{5x + 2}{(3x + 1)^2}$ **b)** $y = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$

Lösung:

a) $y = \frac{5x + 2}{(3x + 1)^2}$

- Quotenregel anwenden.

$$y' = \frac{5 \cdot (3x + 1)^2 - (5x + 2) \cdot 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3}{(3x + 1)^4} =$$

- Beim Ableiten des Nenners ist die Kettenregel anzuwenden.

$$= \frac{(3x + 1) \cdot [5 \cdot (3x + 1) - (5x + 2) \cdot 2 \cdot 3]}{(3x + 1)^4} =$$

$$= \frac{15x + 5 - 30x - 12}{(3x + 1)^3} = \frac{-15x - 7}{(3x + 1)^3}$$

b) $y = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$

- y ist eine zusammengesetzte Funktion, daher ist die Kettenregel anzuwenden.
- Die innere Funktion ist der Quotient von Funktionen. Beim Ermitteln von $g'(x)$ ist die Quotientenregel anzuwenden.
- y' vereinfachen

NR: $\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)' = \frac{1 \cdot (x - 1) - (x + 1) \cdot 1}{(x - 1)^2} =$

$$= \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} \cdot \frac{-2}{(x - 1) \cdot (x - 1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{x - 1}{(x + 1) \cdot (x - 1)^2}} \cdot \frac{-1}{(x - 1)} = \sqrt{\frac{1}{(x + 1) \cdot (x - 1)}} \cdot \frac{-1}{(x - 1)} =$$

$$= \frac{-1}{(x - 1) \cdot \sqrt{(x + 1) \cdot (x - 1)}} = -\frac{1}{(x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

Oft kann man eine Funktion so umformen, dass dadurch der Rechenaufwand für das Ermitteln der Ableitung deutlich verringert wird, zB:

$$y = \ln\left(\sqrt{x^3}\right) = \ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2} \cdot \ln(x) \Rightarrow y' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2x}$$

B **3.128** Stelle die Funktion so dar, dass sie möglichst einfach zu differenzieren ist, und ermittle y'.

a) $y = \ln\left(\frac{2x + 5}{4x + 3}\right)$ **b)** $y = x^2 \cdot \sqrt{x + 1}$

Lösung:

a) $y = \ln\left(\frac{2x + 5}{4x + 3}\right) = \ln(2x + 5) - \ln(4x + 3)$

$$y' = \frac{2}{2x + 5} - \frac{4}{4x + 3}$$

b) $y = x^2 \cdot \sqrt{x + 1} = \sqrt{x^4 \cdot (x + 1)} = \sqrt{x^5 + x^4} = (x^5 + x^4)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (x^5 + x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (5x^4 + 4x^3) = \frac{5x^4 + 4x^3}{2 \cdot \sqrt{x^5 + x^4}} = \frac{x^2 \cdot (5x^2 + 4x)}{2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x + 1}} = \frac{5x^2 + 4x}{2 \cdot \sqrt{x + 1}}$$

Erweiterung der Kettenregel

Ist eine Funktion aus mehr als zwei Teilfunktionen zusammengesetzt, kann man die Kettenregel mehrfach anwenden. Da die entsprechende Formel in Differentialschreibweise übersichtlicher ist, wird sie oft in dieser Form angegeben.

Erweiterung der Kettenregel

$y = f(g(h(x))) \Rightarrow y' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}$ bzw. $y' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Für Funktionen mit mehr als drei Teilfunktionen geht man analog vor.

3.129 Ermittle y′. B

a) $y = \sin^2(3x)$ **b)** $y = e^{\left(\frac{7x-1}{2}\right)^2}$ **c)** $y(t) = (\cos(\omega t + \varphi) + 1)^2$

Lösung:

a) $y = \sin^2(3x) = (\sin(3x))^2$

$f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$y' = \overbrace{2 \cdot (\sin(3x))^1}\cdot \overbrace{\cos(3x)} \cdot \overbrace{3} =$

$= 6 \cdot \sin(3x) \cdot \cos(3x) = 3 \cdot \sin(6x)$

- $f(g) = g^2 \Rightarrow f'(g) = 2g$
  $g(h) = \sin(h) \Rightarrow g'(h) = \cos(h)$
  $h(x) = 3x \Rightarrow h'(x) = 3$
- $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

b) $y = e^{\left(\frac{7x-1}{2}\right)^2}$

$y' = e^{\left(\frac{7x-1}{2}\right)^2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{7x-1}{2}\right)^1 \cdot \frac{7}{2} = \frac{7 \cdot (7x-1)}{2} \cdot e^{\left(\frac{7x-1}{2}\right)^2}$

- $f(g) = e^g \Rightarrow f'(g) = e^g$
  $g(h) = h^2 \Rightarrow g'(h) = 2h$
  $h(x) = \frac{7x-1}{2} \Rightarrow h'(x) = \frac{7}{2}$

c) $y(t) = (\cos(\omega t + \varphi) + 1)^2$

$y'(t) = 2 \cdot (\cos(\omega t + \varphi) + 1)^1 \cdot (-\sin(\omega t + \varphi)) \cdot \omega =$

$= -2\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot (\cos(\omega t + \varphi) + 1)$

- $f(g) = g^2 \Rightarrow f'(g) = 2g$
  $g(h) = \cos(h) + 1$
  $g'(h) = -\sin(h)$
  $h(t) = \omega t + \varphi \Rightarrow h'(t) = \omega$

Spezialfälle der Kettenregel

Einige Teilfunktionen treten in der Praxis besonders häufig auf, zum Beispiel $y = \frac{1}{f(x)}$.

Durch allgemeine Berechnung der Ableitung kann man einige zusätzliche, zeitsparende Regeln herleiten.

- $y = \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1} \Rightarrow y' = (-1) \cdot (f(x))^{-2} \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$
- $y = \sqrt{f(x)} = (f(x))^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot (f(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$
- $y = \ln(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Spezialfälle der Kettenregel

$y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$ $y = \ln(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

ZB: Mithilfe von $y' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ kann die Ableitung von $y = \frac{1}{x^2+1}$ direkt ermittelt werden.

$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

B **3.130** Ermittle y' mithilfe der entsprechenden Formeln.

a) $y = \frac{1}{\sin(x)}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 1}$ **c)** $y = \ln(\cos(x))$

Lösung:

a) $y = \frac{1}{\sin(x)} \Rightarrow y' = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

- $y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ mit $f(x) = \sin(x)$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$ mit $f(x) = x^2 - 1$

c) $y = \ln(\cos(x)) \Rightarrow y' = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

- $y = \ln(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ mit $f(x) = \cos(x)$

BD **3.131** Ines überlegt, wie man e^{2x} ableiten könnte. Da e^x beim Ableiten gleich bleibt, ist sie überzeugt, dass die Ableitung von e^{2x} daher auch e^{2x} sein muss. Überprüfe ihre Schlussfolgerung.

Aufgaben 3.132 – 3.133: Gib die inneren und äußeren Funktionen an.

C **3.132** **a)** $y = \sin(4x)$ **b)** $f(y) = \sqrt{2y - 1}$ **c)** $s(t) = \ln(3t - 1)$

C **3.133** **a)** $y = \frac{1}{x^2 + 5}$ **b)** $f(y) = \cos^2(y - 3)$ **c)** $s(t) = e^{-\frac{1}{t}}$

Aufgaben 3.134 – 3.145: Ermittle jeweils die erste Ableitung. Verwende dabei die Kettenregel und vereinfache das Ergebnis, wenn möglich.

B **3.134** **a)** $f(x) = 2 \cdot (x + 3)^3$ **b)** $f(x) = (2x - 1)^2$ **c)** $f(x) = 4 \cdot (-2x + 5)^3$

B **3.135** **a)** $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^2$ **b)** $f(x) = (5x^2 - 2)^3$ **c)** $f(x) = (3x^7 - x)^4$

B **3.136** **a)** $f(x) = \sqrt{1 - x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{2x - 3x^8}$ **c)** $f(x) = \sqrt[4]{(2x - x^8)^3}$

B **3.137** **a)** $f(x) = \cos(3x)$ **b)** $y = 5 \cdot \sin(2x)$ **c)** $f(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

B **3.138** **a)** $y = \sin(x^4)$ **b)** $f(x) = \cos(7x^5 - 1)$ **c)** $y = \sin(\sqrt{x})$

B **3.139** **a)** $y = \cos^3(x)$ **b)** $f(x) = \sin^5(x)$ **c)** $y = \tan^2(x) + 1$

B **3.140** **a)** $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ **b)** $y = \sqrt[4]{\sin(x)}$ **c)** $y = \sqrt[5]{\cos^4(x)}$

B **3.141** **a)** $y = e^{4x + 2}$ **b)** $y = e^{\frac{x}{8}}$ **c)** $f(x) = e^{-4x}$

B **3.142** **a)** $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}$ **b)** $y = 3e^{\sqrt[3]{x^2}}$ **c)** $f(x) = 4e^{\frac{1}{x}}$

B **3.143** **a)** $y = \lg(x^2 + 1)$ **b)** $f(x) = \ln(2x + 9)$ **c)** $y = \lg(4x^7)$

B **3.144** **a)** $f(x) = \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$ **b)** $y = \ln(1 + \sqrt{x})$ **c)** $f(x) = \sqrt{\ln(x) + 1}$

B **3.145** **a)** $f(x) = \cos(e^x)$ **b)** $f(x) = \sin(3^x)$ **c)** $y = \cos(\ln(x))$

Aufgaben 3.146 – 3.148: Ermittle jeweils die erste Ableitung und erkläre den Unterschied.

B **3.146** **1)** $y = e^{\frac{1}{x}}$ **2)** $y = \frac{x}{e^x}$ **3)** $y = \frac{1}{e^x}$

BD **3.147** **1)** $y = \sin^2(x) + 1$ **2)** $y = \sin(x^2) + 1$ **3)** $y = \sin^2(x + 1)$

BD **3.148** **1)** $y = \cos^2(2x) + 4$ **2)** $y = \cos^2(2x + 4)$ **3)** $y = \cos((2x + 4)^2)$

Aufgaben 3.149 – 3.151: Welche der Ableitungen sind richtig? Gib an, woran man erkennen kann, wenn eine Ableitung es nicht ist.

3.149 $z = (x^2 + y)^2$ BC

A) $\frac{dz}{dx} = 4x \cdot (x^2 + y)$ **B)** $\frac{dz}{dx} = 2 \cdot (x^2 + y) \cdot x$

3.150 $y = (3x^3 - 3x)^3$ BC

A) $y' = 3 \cdot (3x^2 - 3x) \cdot 9x^2 - 3$ **B)** $y' = 3 \cdot (3x^3 - 3x)^2 \cdot (9x^2 - 3)$

3.151 $y = 3x \cdot \cos(2x)$ BC

A) $y' = -6 \cdot \sin(2x)$ **B)** $y' = 3 \cdot \cos(2x) - 6x \cdot \sin(2x)$

3.152 Gib die ersten drei Ableitungen an. B

a) $f(t) = e^{2t}$ **b)** $f(x) = 2^{4x}$ **c)** $f(z) = \ln(5z)$

3.153 Ermittle die angegebene Ableitung. B

a) $y = x \cdot e^x$; $y^{(4)} = ?$ **b)** $y = \sin(2x)$; $y^{(8)} = ?$ **c)** $y = x \cdot \ln(2x)$; $y^{(7)} = ?$

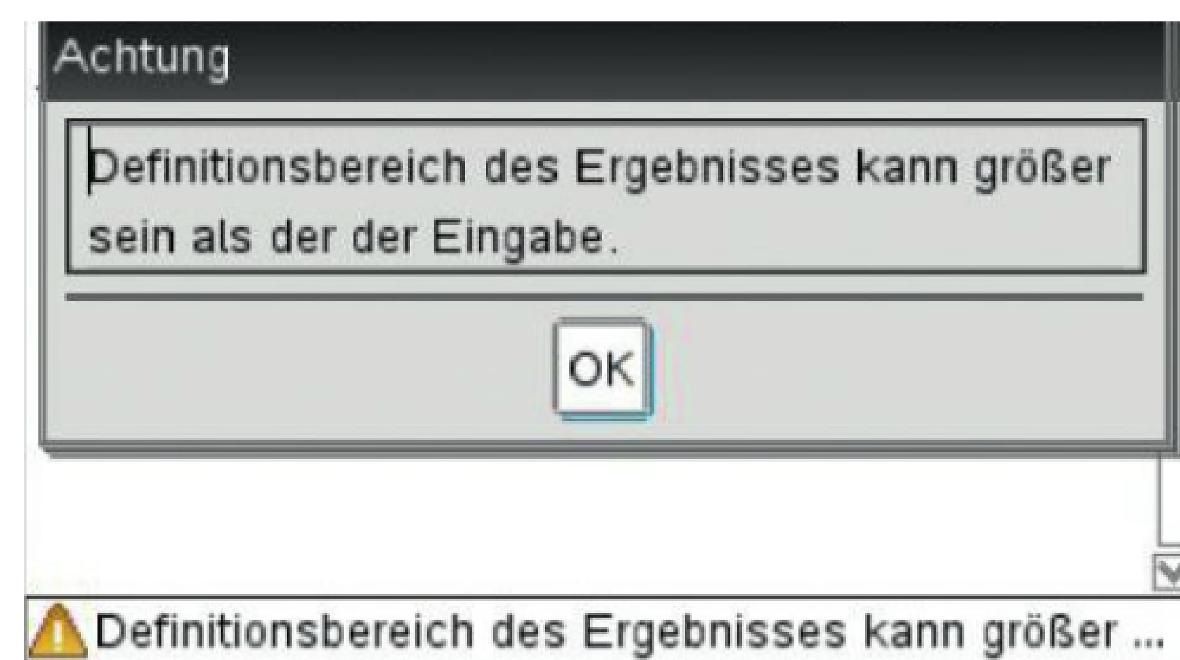
3.154 Gib die erste und die zweite Ableitung an. B

a) $y = \frac{x^2}{x + 2}$ **b)** $y = e^x \cdot (\sin(x) + 2\cos(x))$ **c)** $y = \frac{1 + e^x}{1 + x}$

3.155 Bei der Ableitung der Funktion D

$y = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 3}\right)$

erscheint die abgebildete Meldung.
Erkläre, was sie bedeutet.



3.156 Gib an, welche Aussagen auf die folgenden Funktionen jeweils zutreffen: C

Produkt aus zwei Funktionen; Produkt aus einer Konstanten und einer Funktion; Verkettete Funktionen; Quotient zweier Funktionen

a) 1) $y = x \cdot \ln(e)$ **2)** $y = \frac{3}{x}$ **3)** $y = \sin^2(x)$ **4)** $y = \sin(2x)$

b) 1) $f(t) = e^2 \cdot t^3$ **2)** $f(t) = t \cdot \sin(t)$ **3)** $f(t) = \frac{t + 1}{2 \cdot \cos(2\pi)}$ **4)** $f(t) = \ln(4x)$

c) 1) $s(t) = \frac{t}{4}$ **2)** $z(t) = \lg(10) \cdot t^2$ **3)** $s(t) = \ln(2 - t)$ **4)** $z(t) = e^t \cdot t^2$

Aufgaben 3.157– 3.160: Erkläre, welche Ableitungsregeln notwendig sind, um die erste Ableitung zu bilden. Ermittle die Ableitung.

3.157 **a)** $y = x^3 \cdot \sin(5x)$ **b)** $y = (2x^4 - x) \cdot \cos(2x)$ **c)** $y = (x - 1)^2 \cdot \sin(4x)$ BD

3.158 **a)** $y = x^2 \cdot \ln(2 - x)$ **b)** $y = 2x \cdot \ln(x - 2x^2)$ **c)** $y = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{x^5}{9}\right)$ BD

3.159 **a)** $f(t) = \frac{(t^2 + 3t)^2}{t + 1}$ **b)** $f(t) = \frac{3t^2}{(t + 3)^3}$ **c)** $f(t) = \frac{t \cdot (t + 1)}{(t - 1)^2}$ BD

3.160 **a)** $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(2x)}$ **b)** $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{x}$ **c)** $f(x) = \frac{\sin^2(2x)}{e^x}$ BD

3.161 Berechne die Funktionswerte und die jeweilige Steigung an der gegebenen Stelle. Vergleiche die Ergebnisse und beschreibe, was dir auffällt. BC

1) $f_1(t) = \sin(t)$, $t_0 = 6$ **2)** $f_3(t) = e^t$, $t_0 = 4$

$f_2(t) = \sin(3t)$, $t_0 = 2$ $f_4(t) = e^{\frac{1}{2}}$, $t_0 = 8$

Aufgaben 3.162 – 3.166: Ermittle jeweils die erste Ableitung mithilfe der Regeln von Seite 93.

B **3.162** **a)** $f(x) = \frac{1}{\cos(3x)}$ **b)** $y = \sqrt{\sin(2x)}$ **c)** $f(t) = \sin\left(\frac{2}{t}\right)$

B **3.163** **a)** $y = \frac{3x^2}{\sqrt{x} - 3}$ **b)** $f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x+5}}$ **c)** $y = \frac{x}{1 - \sqrt{x}}$

B **3.164** **a)** $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{2-x}}$ **b)** $y = \sqrt{\frac{1}{x^3 - 3}}$ **c)** $y = \frac{x \cdot \sqrt{1-x}}{3x^2 - 2}$

B **3.165** **a)** $y = \sqrt{x} \cdot \cos(3x^3)$ **b)** $y = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right) \cdot \cos\left(\sqrt{x}\right)$ **c)** $y = \sqrt{\sin(x) \cdot \cos(3x)}$

B **3.166** **a)** $y = \ln(x^3 - 2x^2 + 1)$ **b)** $f(x) = \ln(1 + x^2)$ **c)** $y = \ln(2^x - 1)$

Aufgaben 3.167 – 3.169: Ermittle jeweils die gesuchten Ableitungen.

B **3.167** **a)** $R = \frac{3u^2 - 7w^2u}{\sqrt{w^4 - 2u}}$; $\frac{dR}{dw} = ?$, $\frac{dR}{du} = ?$ **b)** $N = \frac{\sqrt{3q - m}}{m^2 - \sqrt{q}}$; $\frac{dN}{dq} = ?$, $\frac{dN}{dm} = ?$

B **3.168** **a)** $S = \frac{5a^{2f} - 6f^a}{\sqrt{2f^3a}}$; $\frac{dS}{da} = ?$, $\frac{dS}{df} = ?$ **b)** $H = rb^2 \cdot \frac{5r^b - b^{3r}}{b^2 - r^3}$; $\frac{dH}{dr} = ?$, $\frac{dH}{db} = ?$

B **3.169** **a)** $T = \frac{a^2b + 2}{(a-3)^b}$; $\frac{dT}{da} = ?$, $\frac{d^2T}{da^2} = ?$, $\frac{dT}{db} = ?$ **b)** $U = A \cdot \left(1 - e^{-\frac{2t}{A}}\right)$; $\frac{dU}{dt} = ?$, $\frac{d^2U}{dt^2} = ?$, $\frac{dU}{dA} = ?$

ABC **3.170** Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(3x^2)$.



1) Ermittle die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 an den Stellen $x_1 = -9$ und $x_2 = 7$.
2) Stelle f, t_1 und t_2 grafisch dar und ermittle den Schnittpunkt der Tangenten durch Ablesen.
3) Überprüfe dein Ergebnis durch eine Rechnung.

ABC **3.171** Die Gerade g verläuft durch den Punkt P(5|5) und hat den Steigungswinkel $\alpha = 45°$. Weiters ist die Funktion $f(x) = x \cdot \sin(5x)$ gegeben.



1) Ermittle die Gleichung der Tangente t an die Funktion f an der Stelle x = 16.
2) Berechne den Schnittpunkt der Geraden g mit der Tangente t sowie den Winkel, unter dem g und t einander schneiden.
3) Berechne Schnittpunkte und Winkel mithilfe von Technologieeinsatz und vergleiche mit den Ergebnissen aus **2)**.

D **3.172** Erkläre, weshalb die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ gleich der ersten Ableitung der Funktion $g(x) = \ln\left(\frac{x}{5}\right)$ ist.

BD **3.173** Gib die n-te Ableitung in allgemeiner Form an und beweise sie durch vollständige Induktion.
a) $y(x) = e^{a \cdot x}$ **b)** $s(t) = \frac{1}{a \cdot t + 1}$ **c)** $f(t) = \ln(t + 1)$ **d)** $u(c) = a^{b \cdot c}$

BD **3.174** Beweise die Quotientenregel mithilfe der Produktregel und der Kettenregel.
Hinweis: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot (v(x))^{-1}$

BD **3.175** Beweise die Ableitungsregel für $f(x) = a^x$.
Hinweis: Stelle die Funktion als Exponentialfunktion mit der Basis e dar.

BD **3.176** Beweise die Ableitungsregeln für:
a) $y = \sinh(x)$ **b)** $y = \cosh(x)$ **c)** $y = \tanh(x)$
Hinweis: Verwende die Definitionen mithilfe von Exponentialfunktionen.

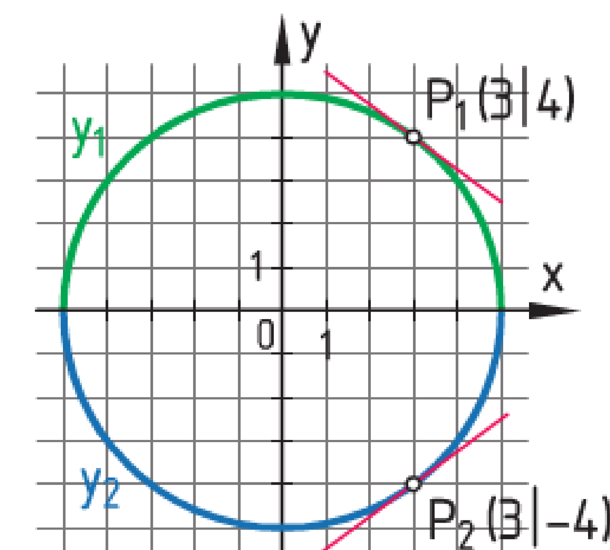
B **3.177** Zeige die Richtigkeit der angegebenen Ableitung.
$y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \cdot \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$, $y' = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

3.7 Implizites Differenzieren

Ableitung von Funktionen in impliziter Darstellung

Funktionen wurden bisher meist in der Form $y = f(x)$ dargestellt, also die Funktionsgleichung nach der Variablen y aufgelöst. In diesem Fall spricht man von der **expliziten Darstellung** der Funktion. Oft wird jedoch auf das Ausdrücken einer Variablen aus einer Kurvengleichung verzichtet.

ZB: Die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(0|0)$ und dem Radius $r = 5$ lautet:
$k: x^2 + y^2 = 25$ bzw $k: x^2 + y^2 - 25 = 0$
Die Kurvengleichung wird hier in der Form $F(x, y) = 0$ angegeben. Man nennt diese Darstellung die **implizite Darstellung** (latein: „implicare" = verflechten). Durch Auflösen der Gleichung nach y ergibt sich die explizite Darstellung $y_{1,2} = \pm\sqrt{25 - x^2}$ wobei die Funktion $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ den oberen und $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ den unteren Halbkreis beschreibt.



Um die Gleichungen der Tangenten in den Punkten mit $x_P = 3$ zu ermitteln, wird zuerst y_P berechnet:

$3^2 + y^2 - 25 = 0$
$y^2 = 16$
$y_P = \pm 4,\ P_1(3|4),\ P_2(3|-4)$

Die Berechnung der Steigung kann nun durch **Differenzieren in impliziter Form** erfolgen. Dabei ist y eine Funktion von x und hat die Ableitung y'. Bei jedem Term, der y enthält, ist daher die Kettenregel anzuwenden:
$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0 \mid$ ableiten
$2 \cdot x + 2 \cdot y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$
Tangente in $P_1(3|4)$: $y' = -\frac{3}{4} = k_1 \Rightarrow t_1: y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$
Tangente in $P_2(3|-4)$: $y' = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4} = k_2 \Rightarrow t_2: y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$

Implizites Differenzieren
Ist eine Funktion in impliziter Darstellung $F(x, y) = 0$ gegeben, kann sie differenziert werden, ohne auf die explizite Form $y = f(x)$ umgeformt zu werden. Dabei ist y als abhängige Variable zu betrachten. Jeder Term, der y enthält, ist nach der Kettenregel abzuleiten.

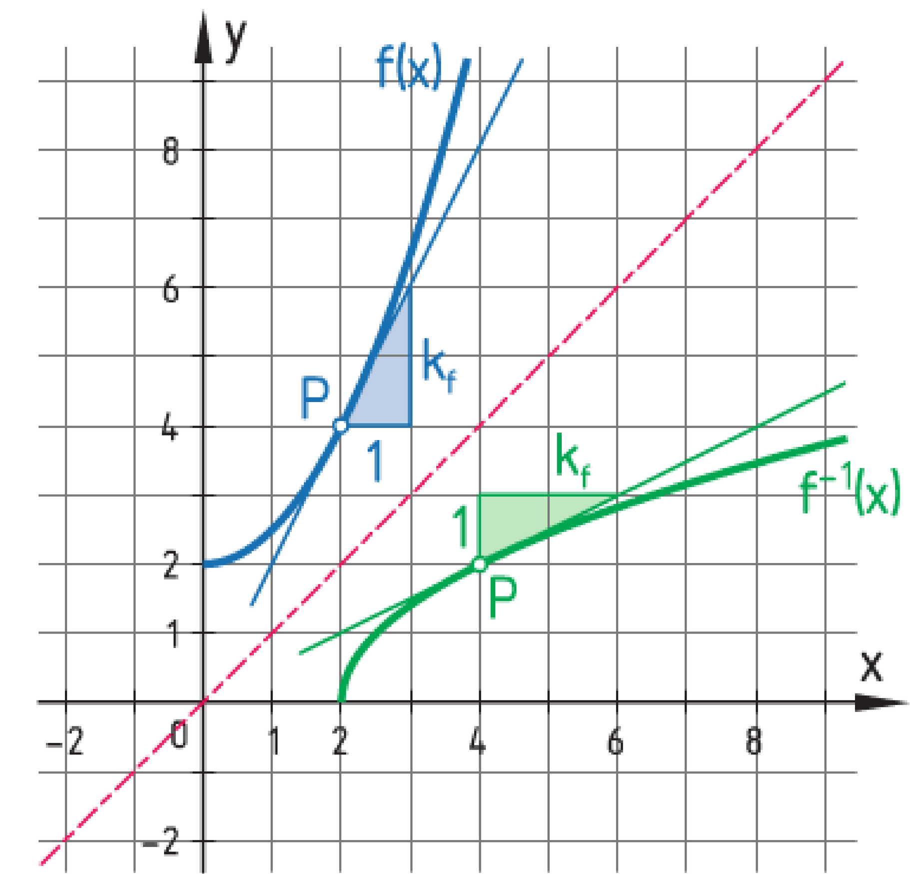
3.178 Differenziere die Halbellipse ell: $4x^2 + 9y^2 = 72,\ y \geq 0$ implizit. Ermittle die Gleichungen der Tangenten in den Punkten $P(3|y_P)$ und $S(\sqrt{18}|y_S)$. **B**

Lösung:
$4 \cdot 2x + 9 \cdot 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow 18y \cdot y' = -8x \Rightarrow y' = -\frac{4x}{9y}$
t_P: $4 \cdot 9 + 9 \cdot y^2 = 72 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(3|2)$
$y'_P = -\frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = -\frac{2}{3} = k_P$
$2 = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + d \Rightarrow d = 4,\ t_P: y = -\frac{2}{3} \cdot x + 4$
t_S: $4 \cdot (\sqrt{18})^2 + 9 \cdot y^2 = 72 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow S(\sqrt{18}|0)$
$y'_S = -\frac{4 \cdot \sqrt{18}}{9 \cdot 0} \Rightarrow y'$ ist für $y = 0$ nicht definiert.
$k_S = \infty \Rightarrow$ senkrechte Gerade: $t_S: x = \sqrt{18}$

- Beim Ableiten von y muss die Kettenregel beachtet werden. $(y^2)' = 2 \cdot y \cdot y'$
- $y' = k = \infty$: Die Tangente in S ist senkrecht. Die Gleichung einer Senkrechten lautet $x = c$.

Ableitung von Umkehrfunktionen

Ist der Funktionsgraph der Funktion y = f(x) gegeben, so erhält man den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ durch Spiegelung an der 1. Mediane (vergleiche Band 1, Abschnitt 1.3.2).
Da auch das Steigungsdreieck gespiegelt wird, ergibt sich für die Umkehrfunktion das grün eingezeichnete Steigungsdreieck.



Für die Steigung $k_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion erhält man:
$k_{f^{-1}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{k}$.
Die Steigungen von Funktion und Umkehrfunktion in einander entsprechenden Punkten sind zueinander reziprok, also Kehrwerte.
Wir untersuchen diesen Zusammenhang nun allgemein und bezeichnen – wegen der übersichtlicheren Schreibweise – die Umkehrfunktion von y = f(x) mit u(y).
Dann gilt: u(y) = x
Durch implizites Differenzieren dieser Gleichung erhält man:

$u'(y) \cdot y' = 1$ ● Kettenregel anwenden

$u'(y) = \frac{1}{y'}$ bzw. $y' = \frac{1}{u'(y)} = \frac{1}{u'(f(x))}$

Auf diese Weise lassen sich unter anderem die Ableitungen der Arcusfunktionen ermitteln.

ZB: $y = \arcsin(x)$

$\sin(y) = x$ ● Bilden der Umkehrfunktion

$\cos(y) \cdot y' = 1$ ● Implizit differenzieren und y′ ausdrücken

$y' = \frac{1}{\cos(y)}$ ● y durch x ausdrücken

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$
$\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$

Die Ableitung einer Funktion kann mithilfe impliziten Differenzierens der Umkehrfunktion ermittelt werden.

Ableitungen der Arcusfunktionen

$y = \arcsin(x)$	$y = \arccos(x)$	$y = \arctan(x)$
$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x \rvert < 1$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x \rvert < 1$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

BD Der Beweis für die Ableitung von y = arccos(x) bzw. y = arctan(x) erfolgt in Aufgabe 3.193.

3.179 Zeige die Richtigkeit der Ableitungsregel für y = ln(x) durch implizites Differenzieren.

Lösung:

$y = \ln(x)$
$e^y = x$ ● Mithilfe der Umkehrfunktion wird x aus der Funktionsgleichung ausgedrückt.
$e^y \cdot y' = 1$ ● Die abhängige Variable ist aber weiterhin y. Beim Differenzieren von y muss daher die Ableitung y′ berücksichtigt werden.
$y' = \frac{1}{e^y}$ ● e^y wird wieder durch x ersetzt.
$y' = \frac{1}{x}$

Logarithmisches Differenzieren

Sind in einer Funktion sowohl Basis als auch Exponent von der Variablen abhängig, so kann weder die Ableitungsregel für Potenzfunktionen noch jene für Exponentialfunktionen angewendet werden.

ZB: $y = x^x$ ist keine Potenzfunktion der Form $y = x^n$, weil der Exponent nicht konstant ist und sie ist auch keine Exponentialfunktion der Form $y = a^x$, weil die Basis nicht konstant ist. Die Ableitung der Funktion lässt sich durch Logarithmieren der Funktionsgleichung ermitteln:

$y = x^x$

$\ln(y) = \ln(x^x)$ — • Die Funktionsgleichung wird logarithmiert.

$\ln(y) = x \cdot \ln(x)$ — • Mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen kann so umgeformt werden, dass x nicht mehr im Exponenten auftritt.

$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$ — • Implizit differenzieren und Produktregel anwenden.

$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(x) + 1$

$y' = y \cdot (\ln(x) + 1)$

$y' = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$ — • y wird durch x^x ersetzt.

Von **logarithmischem Differenzieren** spricht man, wenn eine Funktionsgleichung zuerst logarithmiert und anschließend implizit differenziert wird.

3.180 Ermittle y′ durch logarithmisches Differenzieren: $y = x^{\sin(x)}$ — B

Lösung:

$y = x^{\sin(x)}$ — • Logarithmieren

$\ln(y) = \ln(x^{\sin(x)})$ — • Rechenregeln für Logarithmen anwenden

$\ln(y) = \sin(x) \cdot \ln(x)$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$ — • Implizit differenzieren; Produktregel beachten

$y' = y \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}\right)$

$y' = x^{\sin(x)} \cdot \left(\cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}\right)$

3.181 Ermittle y′ durch logarithmisches Differenzieren: $y = \sqrt{\frac{(x+5) \cdot (x-2)}{2x+6}}$ — BD

Erkläre den Vorteil von logarithmischem Differenzieren.

Lösung:

$$y = \sqrt{\frac{(x+5) \cdot (x-2)}{2x+6}}$$

$$\ln(y) = \ln\left(\sqrt{\frac{(x+5) \cdot (x-2)}{2x+6}}\right)$$

$$\ln(y) = \frac{1}{2} \cdot (\ln(x+5) + \ln(x-2) - \ln(2x+6))$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2x+6} \cdot 2\right)$$

$$y' = y \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right)$$

$$y' = \sqrt{\frac{(x+5) \cdot (x-2)}{2x+6}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right)$$

Durch Logarithmieren entsteht eine wesentlich einfacher abzuleitende Funktion.

B **3.182** Differenziere implizit und gib y′ an.
a) $x^3 - y^3 + 7x = 1$ **b)** $x \cdot \sin(y) + y \cdot \cos(x) = 0$ **c)** $x \cdot y - e^x + e^y = 1$

B **3.183** Differenziere implizit und ermittle den Wert der Ableitung an der angegebenen Stelle.
a) $x^2 + y^2 = 81, x_0 = 3$ **b)** $4x^2 + 3y^2 = 12, x_0 = 0$ **c)** $e^{x \cdot y} = 1, x_0 = 2$

Aufgaben 3.184 – 3.187: Ermittle jeweils die Ableitung durch logarithmisches Differenzieren.

B **3.184** **a)** $y = 2x^{3x}$ **b)** $y = \sqrt[x]{3x}$ **c)** $y = x^{\sqrt{x}}$

B **3.185** **a)** $y = (\sin(x))^x$ **b)** $y = x^{\tan(x)}$ **c)** $y = (\sin(x))^{\cos(x)}$

B **3.186** **a)** $y = x^{\ln(x)}$ **b)** $y = (\ln(x))^x$ **c)** $y = (\ln(x))^{\ln(x)}$

B **3.187** **a)** $y = \frac{(x + 3) \cdot (3x - 1)}{(x + 5)^2}$ **b)** $y = \sqrt{\frac{x \cdot (x^2 + 1)}{x^2 - 1}}$ **c)** $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x + 1} \cdot \sqrt[4]{x + 2}$

AB **3.188** **1)** Differenziere implizit und ermittle, in welchen Punkten die Kurve eine waagrechte bzw. eine senkrechte Tangente hat.
2) Stelle die Kurve und die Tangenten grafisch dar.
a) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$ **b)** $9x^2 + 16y^2 = 144$

B **3.189** Gegeben ist die Kurve $x^3 + y^3 - 6x \cdot y = 0$. Ermittle die Steigung der Tangente im Schnittpunkt mit der 1. Mediane.

B **3.190** Ermittle die Gleichung der Tangente in $x = \frac{\pi}{2}$ an die Kurve $x \cdot \sin(x) - 2y = 0$.

AB **3.191** Die Van-der-Waals-Gleichung ist eine Zustandsgleichung, die näherungsweise das Verhalten realer Gase beschreibt.



$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot (V_m - b) = R \cdot T$$

V_m … Molvolumen, T … Temperatur,
p … Druck, R … universelle Gaskonstante,
a, b … gasspezifische Konstanten
Ermittle $\frac{dV_m}{dp}$ durch implizites Differenzieren.

BD **3.192** In der Volkswirtschaftslehre wird die Kapitalausstattung k einer Gesellschaft pro Kopf durch folgende Formel beschrieben:
$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ mit K(t) … Kapital zum Zeitpunkt t, L(t) … Bevölkerung zum Zeitpunkt t
Zeige durch logarithmisches Differenzieren, dass gilt:
$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$

BD **3.193** Beweise die Ableitungsregel für folgende Funktion durch implizites Differenzieren.
a) $y = \arccos(x)$ **b)** $y = \arctan(x)$

BD **3.194** Zeige die Richtigkeit der Ableitungsregel für $y = \log_a(x)$ durch implizites Differenzieren.

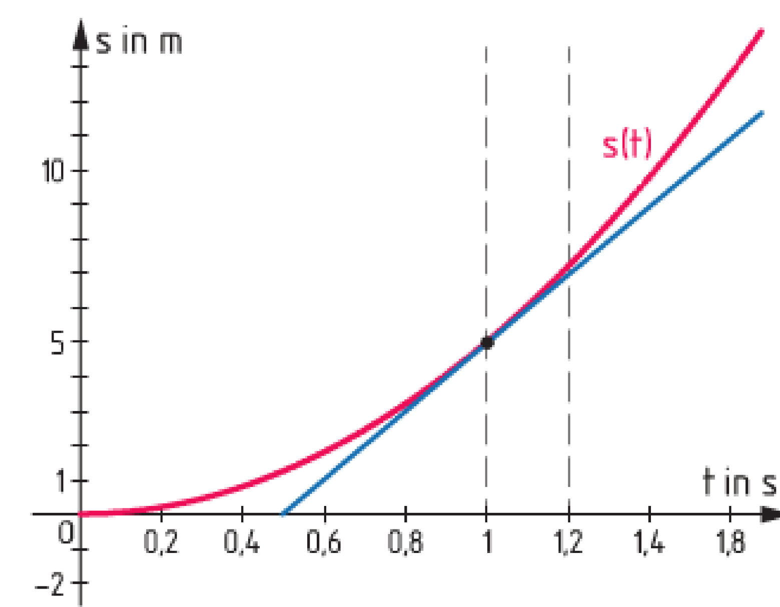
BD **3.195** Zeige die Gültigkeit der Quotientenregel durch logarithmisches Differenzieren.

BD **3.196** Zeige die Gültigkeit der Ableitungsregel für $y = a^x$ durch logarithmisches Differenzieren.

BD **3.197** Die Ableitungsregel für Potenzfunktionen wurde bisher nur für Exponenten aus den natürlichen Zahlen bewiesen. Beweise durch implizites Differenzieren, dass sie auch für alle Funktionen der Form $y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

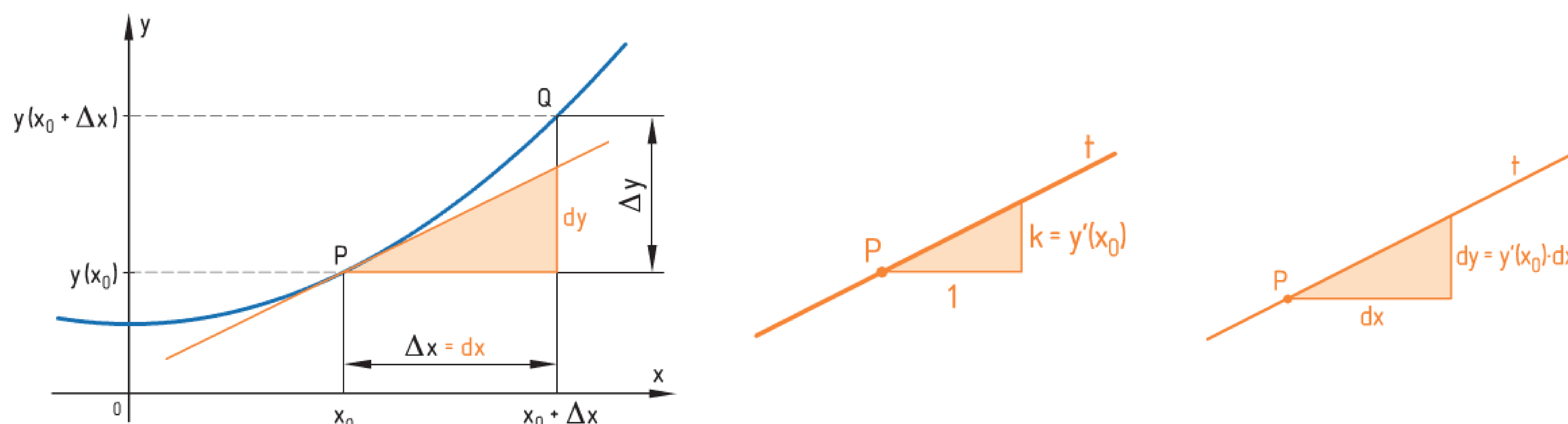
3.8 Differentiale und Linearisierung

3.198 Karin und Thomas versuchen, die Tiefe eines Brunnens zu ermitteln. Dazu lässt Karin einen Stein fallen und misst die Zeit bis zum Auftreffen des Steins auf der Wasseroberfläche. Die Messung ergibt eine Fallzeit von 1,2 Sekunden. Die Reaktionszeit beim Anhalten der Stoppuhr beträgt 0,2 Sekunden. Sie ziehen diese von der Messzeit ab und berechnen eine Tiefe von 5 m. Thomas behauptet, dass der in den 0,2 Sekunden zusätzlich zurückgelegte Weg 2 m betragen würde. Karin errechnet 2,158 m. Erkläre anhand der nebenstehenden Zeichnung, wie sie jeweils zu ihren Ergebnissen gekommen sind.



Oft genügt es, statt einer Funktion eine lineare Näherung in einem bestimmten Punkt zu betrachten, da der Fehler minimal und somit vernachlässigbar ist.

Man betrachtet eine Funktion $y = y(x)$ an einer Stelle x_0. Bei Änderung des x-Werts um Δx ändert sich der Funktionswert um die Differenz $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$.
Nun legt man eine Tangente t in x_0. Die Änderung des x-Werts von t wird dx bezeichnet, die des y-Werts mit dy. dx und dy werden **Differentiale** genannt.
Ist $dx = \Delta x$, so kann man dy mithilfe der Steigung der gegebenen Funktion y ausdrücken:
$dy = y'(x_0) \cdot dx$.



Ist der Punkt Q nahe am Punkt P, so ist der Unterschied zwischen Δy und dy gering. Man kann die **Funktion** y also in der Umgebung des Punkts P **näherungsweise durch die Tangente** in P **ersetzen**. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Linearisieren** einer Funktion.
Die Gleichung der Tangente lautet: $\frac{y - y_0}{x - x_0} = k \Rightarrow y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Wird das Argument einer Funktion an der Stelle x_0 um das **Differential dx = Δx** vergrößert, so beschreibt das **Differential dy** die Änderung des Funktionswerts der Tangente in x_0.

$$dy = y'(x_0) \cdot dx$$

Linearisieren einer Funktion:
In der Umgebung der Stelle x_0 wird die Funktion näherungsweise durch die Tangente ersetzt.
Für kleine Werte von $\Delta x = dx$ gilt für die Änderung Δy des Funktionswerts:

$$\Delta y \approx dy, \text{ also } \Delta y \approx y'(x_0) \cdot dx \quad \text{bzw.} \quad \Delta y \approx y'(x_0) \cdot \Delta x$$

Differentialrechnung

In technischen Anwendungen ist oft nur die Abweichung von einem so genannten Arbeitspunkt von Bedeutung. Man kann die Tangente dann in besonders einfacher Form angeben, wenn man den Koordinatenursprung in diesen Arbeitspunkt legt.

ABC **3.199** Zeichne die Funktion $y(x) = \sin(x)$ und lege im Punkt $P(0|0)$ eine Tangente an den Graphen.
Gib für Winkel, die von $x_0 = 0$ rad um $\Delta x = 0{,}1$ rad bis $\Delta x = 0{,}6$ rad (Schrittweite 0,1 rad) abweichen, die Änderung Δy des Funktionswerts an. Vergleiche diese mit den Differentialen. Wie viel Prozent beträgt der Fehler bei Näherung durch die Tangente? Bis zu welchem Winkel ist der Fehler bei Verwendung der Näherung kleiner als 5 %?

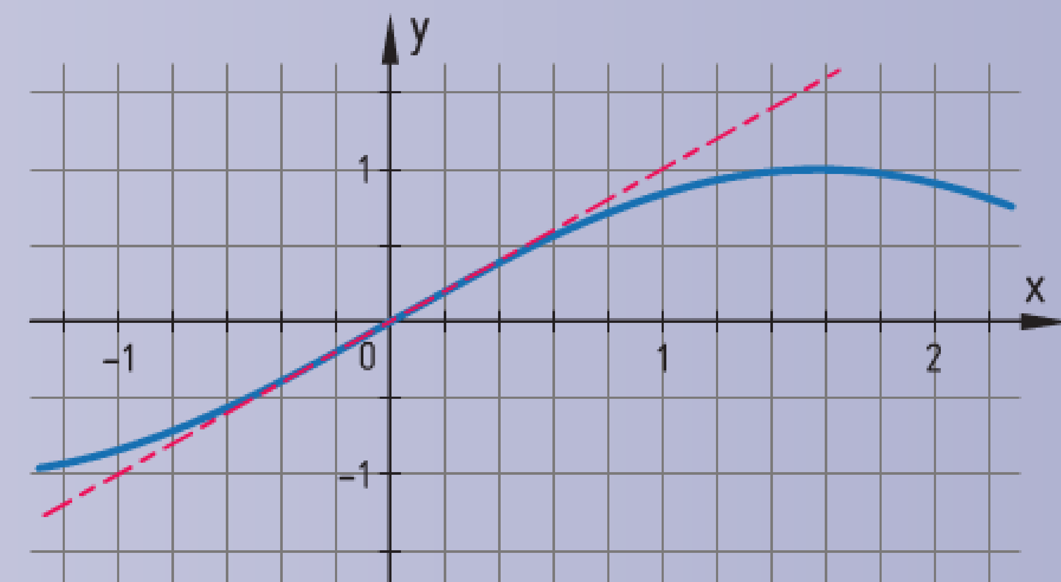
Lösung:

$y(x) = \sin(x),\ x_0 = 0$

$y'(x) = \cos(x)$

$y'(0) = \cos(0) = 1$

$\Delta y = \sin(0 + \Delta x) - \sin(0) = \sin(\Delta x)$



Tangentengleichung:
$y = 0 + 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow t\colon y = x$

$dy = 1 \cdot dx$

Δx	Δy	dy	$\frac{dy}{\Delta y}$	Fehler in %
0,1	0,099833	0,1	1,001669	0,17
0,2	0,198669	0,2	1,006698	0,67
0,3	0,295520	0,3	1,015159	1,52
0,4	0,389418	0,4	1,027173	2,72
0,5	0,479426	0,5	1,042915	4,29
0,6	0,564642	0,6	1,062619	6,26

- Gleichung der Tangente: $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$
- $dx = \Delta x$; $dy = y'(x_0) \cdot dx$
- ZB:
  $\Delta x = dx = 0{,}1$ rad
  $\Delta y = \sin(0{,}1) = 0{,}099...$
  $dy = dx = 0{,}1$

Fehler:
$\frac{0{,}1}{0{,}099...} = 1{,}00166... \approx 100{,}17\ \%$
Prozentueller Fehler: 0,17 %

Bis zu einer Abweichung um 0,5 rad von $x_0 = 0$ rad ist der prozentuelle Fehler kleiner als 5 %. Für kleine x-Werte kann daher $\sin(x) \approx x$ angenommen werden.

ABC TE **3.200** Zeichne die Funktion $y(x) = \cos(x)$ und lege im Punkt $P(\frac{\pi}{2}|0)$ eine Tangente an den Graphen. Gib für Winkel, die von $x_0 = \frac{\pi}{2}$ um $\Delta x = 0{,}05$ rad bis $\Delta x = 0{,}45$ rad (Schrittweite 0,05 rad) abweichen, die Änderung Δy des Funktionswerts an. Vergleiche diese mit den Differentialen. Wie viel Prozent beträgt der Fehler bei Näherung durch die Tangente? Bis zu welchem Winkel ist der Fehler bei Verwendung der Näherung kleiner als 2,5 %?

TE Aufgaben 3.201 – 3.203: Linearisiere jeweils die Funktion f an der Stelle x_0. Ermittle den Bereich, in dem der Fehler durch Linearisierung unter 2 % liegt. Stelle die Funktion und die Linearisierung grafisch dar.

B **3.201** **a)** $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x;\ x_0 = 2$ **b)** $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 6;\ x_0 = 1$

B **3.202** **a)** $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3};\ x_0 = 2$ **b)** $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 3x + 1;\ x_0 = 2$

B **3.203** **a)** $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ x_0 = \frac{3\pi}{2}$ **b)** $f(x) = 3 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right);\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$

3.204 Linearisiere die Funktion y an der Stelle x_0 und vergleiche Δy und dy für den angegebenen Wert von Δx. BC

a) $y = 1 - e^{-\frac{x}{4}}$; $x_0 = 0$; $\Delta x = 0{,}1$ **b)** $y = 25 \cdot \sin(2x)$; $x_0 = 0$; $\Delta x = \frac{\pi}{12}$

3.205 Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{3x} - 1$. BC

1) Ermittle die Gleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = 1$.

2) Ermittle den maximalen prozentuellen Fehler, wenn man die Funktion im Intervall [1; 1,05] an der Stelle $x_0 = 1$ linearisiert.

3.206 Die Periodendauer T eines ungedämpften elektrischen Schwingkreises wird folgendermaßen berechnet: ABCD

$T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$

T … Periodendauer in s, L … Induktivität in H (Henry), C … Kapazität in F (Farad)

1) Ermittle die Periodendauer für L = 0,2 H und C_0 = 100 µF.

2) Gib eine lineare Näherungsfunktion für T am Arbeitspunkt mit C_0 = 100 µF an.

3) Die Kapazität C nimmt um 5% ab. Berechne die Änderung der Periodendauer genau und näherungsweise und berechne den Fehler der Näherung.

Lösung:

1) $T_0 = T(100\ \mu F) = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C_0} =$ • Berechnung der Periodendauer T_0 im Arbeitspunkt

$= 2\pi \cdot \sqrt{0{,}2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 0{,}028099... \approx 28$ ms

2) $\frac{dT}{dC} = 2\pi \cdot \sqrt{L} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{C}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ • Berechnung der Ableitung

$\left.\frac{dT}{dC}\right|_{C = C_0} = \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{100 \cdot 10^{-6}}} = 140{,}496...$ • Ableitung für C_0 = 100 µF

$\bar{T} = T_0 + \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{C_0}} \cdot (C - C_0)$ • Gleichung der Tangente: $y = y_0 + y' \cdot (x - x_0)$

$\bar{T}(C) = T_0 + \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{C_0}} \cdot (C - C_0) \approx$ • Näherungsfunktion

$\approx 140{,}496 \cdot C + 0{,}014049$

3) $C_1 = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}95 = 95$ µF • Berechnung von C_1 = 95 % von C_0

$\bar{T}$ (95 µF) $\approx 140{,}496 \cdot 95 \cdot 10^{-6} + 0{,}014049 =$ • Einsetzen von C_1 in die Näherungsfunktion

$= 0{,}027396... \approx 27{,}396$ ms

T(95 µF) = 0,027387... ≈ 27,387 ms

$Fehler_{abs}$ = 27,396... – 27,387... = 0,009... ms ≈ 9 µs < 10 µs

Die Abweichung ist mit 9 µs unter den angegebenen 10 µs.

3.207 Der Durchmesser eines am Strand aufgeblasenen Wasserballs verringert sich im kalten Wasser von 55 cm auf 54 cm. Berechne genau und näherungsweise mithilfe des Differentials, um wie viel sich sein Volumen dadurch verändert hat. Gib den Fehler der Näherung absolut und in Prozent an. AB

3.208 Der Fehler beim Abmessen der Seitenkante eines Würfels beträgt maximal 5%. Gib mithilfe des Differentials eine Abschätzung der Größe des maximalen Fehlers bei der Berechnung der Oberfläche bzw. bei der Berechnung des Volumens an. AB

3.9 Die Regel von de l'Hospital



Der französische Aristokrat Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital (1661 – 1704) veröffentlichte 1696 in Paris ein Lehrbuch zur Differentialrechnung, das größtenteils die Erkenntnisse seines Lehrers Johann Bernoulli (schweizer Arzt, 1667 – 1748) beinhaltet. Wegen seines hohen Ansehens wurde dennoch eine wichtige Regel zur Grenzwertberechnung nach ihm benannt, die **Regel von de l'Hospital**.

BD **3.209** Versuche, die Grenzwerte mithilfe der bekannten Rechenregeln zu ermitteln. Was fällt dir auf?

1) $\lim\limits_{t \to 0}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$ ***2)*** $\lim\limits_{k \to 0}(k \cdot e^{-k})$ ***3)*** $\lim\limits_{a \to 2}\left(\frac{2a^3 - 16}{a^2 - 4a + 4}\right)$

Bei der Ermittlung von Grenzwerten kann das Anwenden der bekannten Rechenregeln auf die unbestimmten Ausdrücke „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" führen. Bei gebrochen rationalen Funktionen kann dieses Problem mithilfe des Dividierens durch die höchste vorkommende Potenz gelöst werden. Die Differentialrechnung bietet eine weitere Möglichkeit, den Grenzwert gegebenenfalls zu bestimmen.

ZB: Gesucht ist der Grenzwert der Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}\right) = „\frac{0}{0}"$

Diese Berechnung führt zu einem unbestimmten Ausdruck. Im Folgenden wird gezeigt, wie man den Grenzwert in diesem Fall ermitteln kann. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Funktionen g und h stetig sind.

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)}$

- Da g und h stetig sind, gilt:
  $\lim\limits_{x \to x_0}(g(x)) = g(x_0) = 0,\ \lim\limits_{x \to x_0}(h(x)) = h(x_0) = 0$
  Daher gilt auch: $g(x) = g(x) - g(x_0)$, $h(x) = h(x) - h(x_0)$

$f(x) = \frac{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}}$

- Zähler und Nenner werden jeweils mit $\frac{1}{x - x_0}$ erweitert.

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0}\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)}{\lim\limits_{x \to x_0}\left(\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{g'(x_0)}{h'(x_0)} = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{g'(x)}{h'(x)}\right)$$

- Bei der Ermittlung des Grenzwerts dürfen Zähler und Nenner getrennt ausgewertet werden (Grenzwertsätze).

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) = g'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0}(f(x)) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{g'(x)}{h'(x)}\right)$$

Für obiges Beispiel gilt:

$g(x) = 1 - \cos(x) \Rightarrow g'(x) = \sin(x)$

$h(x) = \sin(x) \Rightarrow h'(x) = \cos(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0}(f(x)) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{g'(x)}{h'(x)}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

1. Regel von de l'Hospital

Sind die Funktionen g(x) und h(x) an der Stelle x_0 differenzierbar und ist $\lim\limits_{x \to x_0}(g(x)) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0}(h(x)) = 0$ sowie $\lim\limits_{x \to x_0}(h'(x)) \neq 0$, kann der Grenzwert der Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ an der Stelle x_0 wie folgt berechnet werden:

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{g'(x)}{h'(x)}\right)$$

2. Regel von de l'Hospital

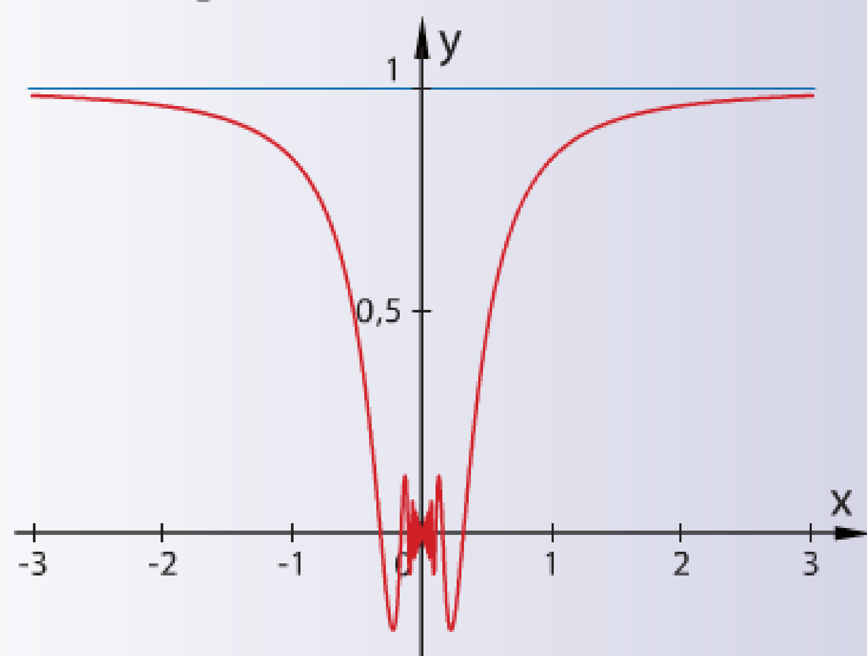
Ist $\lim\limits_{x \to \infty}(g(x)) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty}(h(x)) = 0$, sowie $\lim\limits_{x \to \infty}(h'(x)) \neq 0$, so kann man den Grenzwert der Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ für $x \to \infty$ mit $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{g'(x)}{h'(x)}\right)$ berechnen.

Die beiden Regeln gelten auch für $\lim\limits_{x \to x_0}(g(x)) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0}(h(x)) = \pm\infty$.

- Die 2. Regel von de l'Hospital resultiert aus der ersten für $x_0 = \pm\infty$ und ist hier ohne Beweis angegeben.
- Um die Regeln von de l'Hospital anwenden zu können, muss eine Funktion gegebenenfalls in einen Bruchterm umgewandelt werden.
- Man kann die Regeln von de l'Hospital auch mehrmals hintereinander anwenden, um zu einem Ergebnis für den Grenzwert zu kommen.
- Auch durch das Anwenden der Regel von de l'Hospital kann der Grenzwert nicht immer ermittelt werden.

3.210 Stelle die Funktion $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ grafisch dar. Gib eine Vermutung für den Grenzwert für $x \to \infty$ an und bestimme diesen unter Verwendung der Regel von de l'Hospital. **BC**

Lösung:



- Anhand des Graphen lässt sich vermuten, dass sich die Funktionswerte von f(x) für $x \to \infty$ dem Wert 1 nähern.

$$f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

- Um die Regel von de l'Hospital anwenden zu können, wird die Funktion auf einen Bruch umgeformt.

$$\lim_{x \to \infty}(f(x)) = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\right)} = „\frac{\sin(0)}{0}“ = „\frac{0}{0}“$$

- Anwenden der Grenzwertsätze führt auf den Ausdruck „$\frac{0}{0}$“. Es darf daher die Regel von de l'Hospital angewendet werden.

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \cos(0) = 1$$

B **3.211** Berechne den Grenzwert der Funktion $y(t) = \frac{2t^3 + 6t^2 + 6t + 2}{t^2 + 2t + 1}$ an der Stelle $t_0 = -1$.

Lösung:

$\lim_{t \to t_0} (y(t)) = \lim_{t \to -1} \left(\frac{2t^3 + 6t^2 + 6t + 2}{t^2 + 2t + 1}\right) = „\frac{0}{0}“$ ● Die herkömmliche Berechnung führt auf „$\frac{0}{0}$“.

$\lim_{t \to t_0} (y(t)) = \lim_{t \to -1} \left(\frac{6t^2 + 12t + 6}{2t + 2}\right) = „\frac{0}{0}“$ ● Die Anwendung der Regel von de l'Hospital führt ebenfalls auf „$\frac{0}{0}$“.

$\lim_{t \to t_0} (y(t)) = \lim_{t \to -1} \left(\frac{12t + 12}{2}\right) = \frac{0}{2} = 0$ ● Erst die zweite Anwendung der Regel von de l'Hospital führt zu einem Grenzwert.

Aufgaben 3.212 – 3.219: Führe jeweils die Grenzwertberechnung unter Verwendung der Regeln von de l'Hospital durch.

B **3.212** **a)** $\lim_{y \to 0} \left(\frac{3y}{y}\right)$ **b)** $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3}\right)$ **c)** $\lim_{a \to -8} \left(\frac{a^2 + 16a + 64}{a + 8}\right)$

B **3.213** **a)** $\lim_{b \to 4} \left(\frac{3b^2 - 12b}{b - 4}\right)$ **b)** $\lim_{x \to -0,2} \left(\frac{25x^2 + 5x}{5x + 1}\right)$ **c)** $\lim_{x \to -1} \left(\frac{3x^2 + 6x + 3}{x + 1}\right)$

B **3.214** **a)** $\lim_{t \to 1} \left(\frac{t^3 - t^2 - t + 1}{t^2 - 2t + 1}\right)$ **b)** $\lim_{t \to -0,5} \left(\frac{5t^3 + 15t^2 - 20}{4t^2 + 4t + 1}\right)$ **c)** $\lim_{t \to \frac{1}{3}} \left(\frac{9t^3 + 12t^2 - 11t + 2}{9t^2 - 6t + 1}\right)$

B **3.215** **a)** $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{t}{e^t}\right)$ **b)** $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{t^2}{2e^t}\right)$ **c)** $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{e^t}{t^2}\right)$

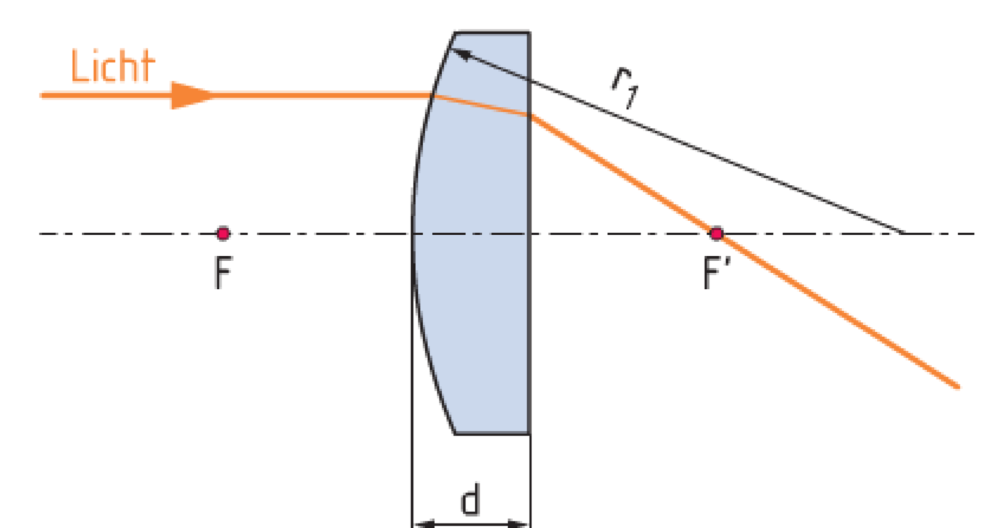
B **3.216** **a)** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}\right)$ **b)** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^3}{\sin^2(x)}\right)$ **c)** $\lim_{x \to 0} (x \cdot \ln(x))$

B **3.217** **a)** $\lim_{x \to \infty} (e^{-x} \cdot x^2)$ **b)** $\lim_{x \to \infty} (x^{-3} \cdot e^x)$ **c)** $\lim_{x \to \infty} (x^{-1} \cdot \ln(x))$

B **3.218** **a)** $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{2^t}{t^2}\right)$ **b)** $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{e^t}{\ln(t)}\right)$ **c)** $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{2e^t}{t^2}\right)$

B **3.219** **a)** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt[5]{x}}\right)$ **b)** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}\right)$ **c)** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\log_a(x)}{\ln(x)}\right)$

ABD **3.220** Ein achsenparallel einfallender Lichtstrahl trifft auf eine von Luft umgebene Linse mit den Krümmungsradien r_1, r_2 und der Scheiteldicke d.
Für die Brennweite f dieser Linse gilt:



$$f = \frac{1}{n - 1} \cdot \frac{n \cdot r_1 \cdot r_2}{(n - 1) \cdot d + (r_2 - r_1) \cdot n}$$

n … Brechzahl der Linse

1) Berechne den Grenzwert der Brennwerte für $r_2 \to \infty$.

2) Ist ein Krümmungsradius einer Linse unendlich groß, so spricht man von einer Planlinse. Was kann man aufgrund der Berechnung in ***1)*** über die Brennwerte einer Planlinse aussagen?

3.10 Ableitungen von Kurven in Parameterdarstellung und in Polarkoordinaten

In vielen Maschinen befinden sich drehbare Teile, die aneinander abrollen. Um Gehäuse zu dimensionieren oder Kräfteübertragungen berechnen zu können, ist es wichtig, solche Bewegungsabläufe zu beschreiben. Diese Beschreibung erfordert oft die Darstellung von Kurven in **Parameterdarstellung** oder mithilfe von **Polarkoordinaten**.



3.10.1 Ableitungen von Kurven in Parameterdarstellung

3.221 Ein Fensterputzer erhält den Auftrag, eine Glaswand zu reinigen. Dazu lehnt er eine 6 m lange Leiter im Winkel $\varphi = 60°$ an die senkrecht stehende Glaswand. Als er auf einer bestimmten Sprosse ankommt, beginnt die Leiter abzurutschen. Vor Schreck erstarrt der Fensterputzer und klammert sich an der Leiter fest. ABD

1) Zeichne den Bewegungsverlauf des Fußpunkts des Fensterputzers einerseits für den Fall, dass er sich genau in der Mitte der Leiter befindet, andererseits für den Fall, dass er nur 2 Meter auf der Leiter zurückgelegt hat.

2) Überlege, wie man die Abrutschgeschwindigkeit des Fensterputzers auf der Kurve darstellen könnte.

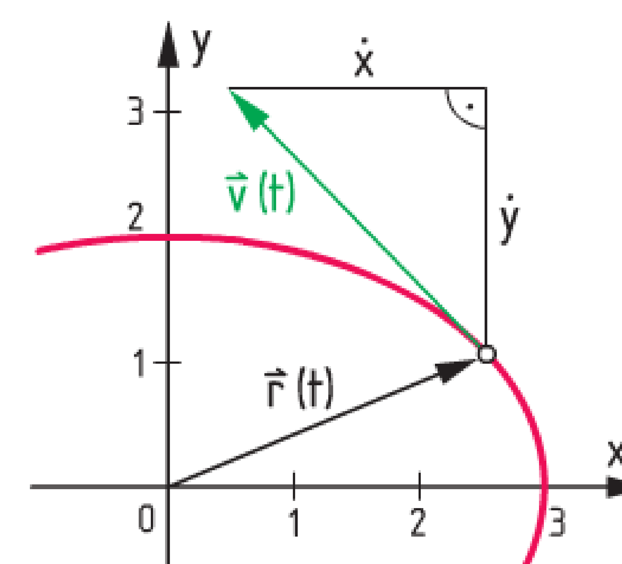
ZB: Ein Körper bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\,s^{-1}$ auf einer elliptischen Bahn um einen massereicheren Körper, ähnlich wie sich der Mond um die Erde bewegt. Die Parameterdarstellung seiner Bahnkurve abhängig von der Zeit t in Sekunden lautet:

$x(t) = 3\text{ cm} \cdot \cos(2\text{ s}^{-1} \cdot t)$
$y(t) = 2\text{ m} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t)$

Man kann diese Bahnkurve in Vektorschreibweise angeben: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(2t) \\ 2 \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}$

Die **Momentangeschwindigkeit** $v(t)$ ist der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$.

Der Geschwindigkeitsvektor verläuft tangential an die Bahnkurve. Seine Komponenten $\dot{x}$ und $\dot{y}$ erhält man durch Ableiten von $x(t)$ und $y(t)$ nach der Zeit t.



$\dot{x} = -6 \cdot \sin(2t)$
$\dot{y} = 4 \cdot \cos(2t)$
$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot \sin(2t) \\ 4 \cdot \cos(2t) \end{pmatrix}$

Der Betrag des Vektors wird mithilfe des Satzes von Phytagoras ermittelt.

$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(-6 \cdot \sin(2t))^2 + (4 \cdot \cos(2t))^2} = \sqrt{(36 \cdot \sin^2(2t) + 16 \cdot \cos^2(2t)}$

Der Körper hat zum Beispiel zum Zeitpunkt t = 0,5 s folgende Momentangeschwindigkeit:

$v(0{,}5\text{ s}) = \sqrt{(36 \cdot \sin^2(2 \cdot 0{,}5) + 16 \cdot \cos^2(2 \cdot 0{,}5)}\ \frac{m}{s} \approx 5{,}492\ \frac{m}{s}$

Differentialrechnung

Betrachtet man die Parameterdarstellung der Ellipse nicht als physikalische Funktion, so kann der vorher berechnete Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ als Tangente an die Kurve interpretiert werden. Seine Komponenten $\dot{x}$ und $\dot{y}$ bilden die Katheten des Steigungsdreiecks. Die Steigung k der Tangenten kann als Quotient der beiden Komponenten $\dot{x}$ und $\dot{y}$ berechnet werden. In Anlehnung an die übliche Schreibweise wird sie y′ genannt.

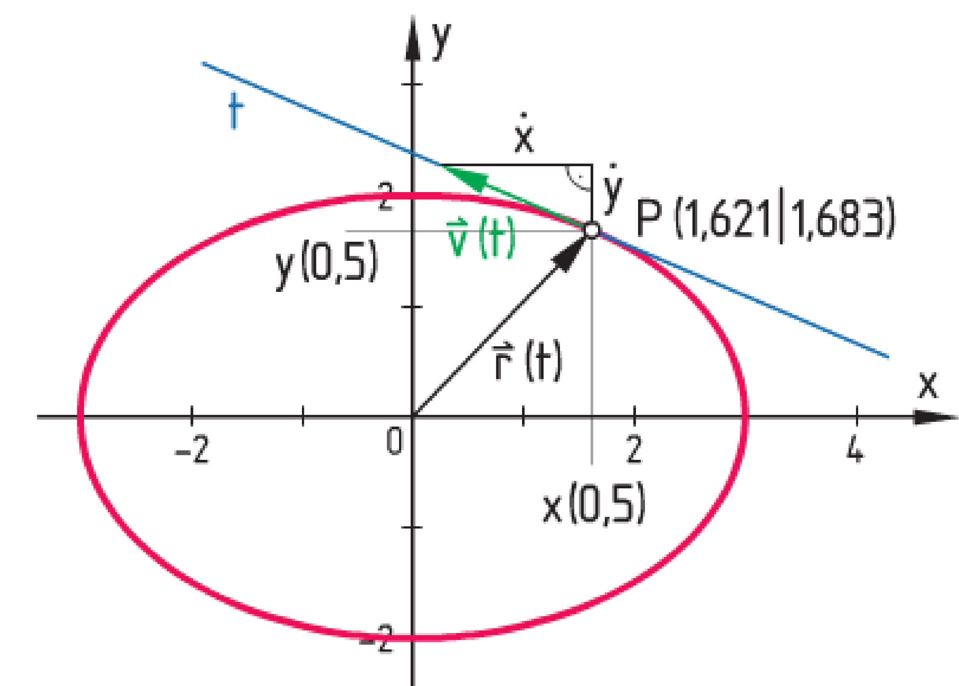
$$k = y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{4 \cdot \cos(2t)}{6 \cdot \sin(2t)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\tan(2t)}$$

- Da x(t) und y(t) vom Parameter t abhängen, hängt auch y′ von t ab.

Bei der Ableitung von Kurven in Parameterdarstellung ist es üblich, die Punktschreibweise zu verwenden, obwohl es sich nicht immer um Ableitungen nach der Zeit handelt. Um die Gleichung der Tangente an der Stelle t = 0,5 s zu ermitteln, zeigen wir zwei Möglichkeiten:

- Parameterdarstellung: $\overrightarrow{OX} = \vec{r}(t) + \lambda \cdot \vec{v}(t)$

$$t: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x(0,5) \\ y(0,5) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(0,5) \\ \dot{y}(0,5) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,621 \\ 1,683 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5,049 \\ 2,161 \end{pmatrix}$$



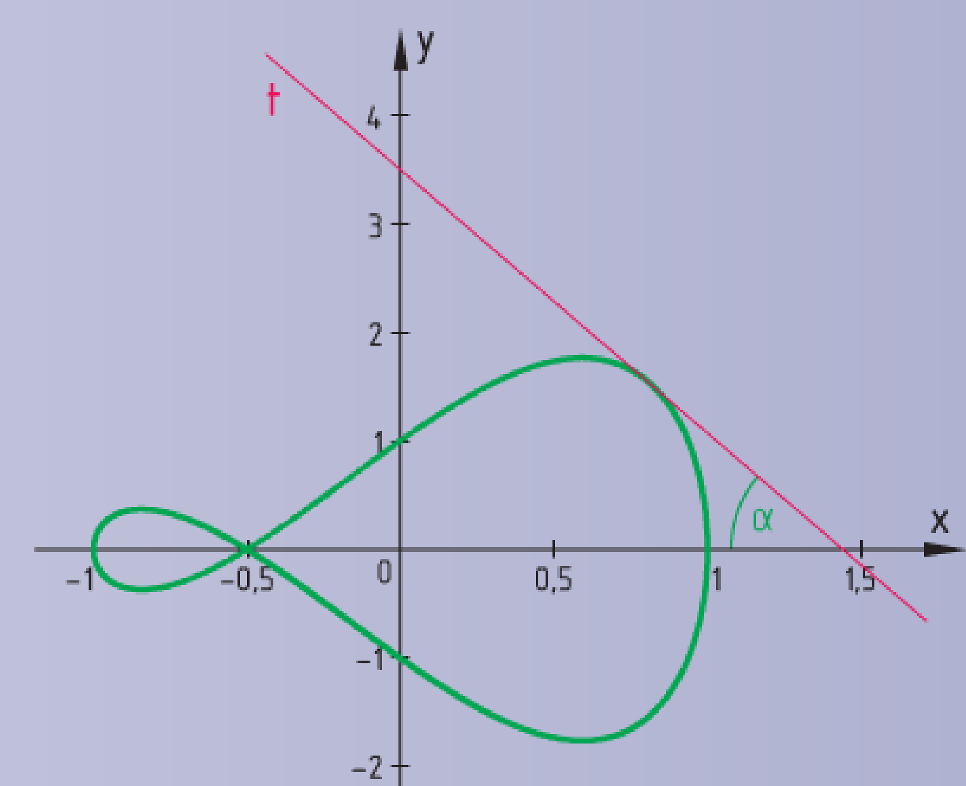
- Normalform der Geradengleichung: y = k · x + d
  k = y′(0,5) = −0,428...; durch Einsetzen von P erhält man: d = 2,376...
  Die Gleichung der Tangente für den Parameter t = 0,5 s lautet t: y = −0,428 · x + 2,377.

Bei der Ableitung einer Kurve in Parameterdarstellung werden die Komponenten x(t) und y(t) einzeln differenziert.

Tangentensteigung: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Handelt es sich um eine Weg-Zeit-Funktion, berechnet man die **Momentangeschwindigkeit** mit $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

B **3.222** Für die Projektion einer Schwingung auf eine Ebene gelten die Gleichungen:
x(t) = cos(t), y(t) = sin(t) + sin(2t).
1) Bestimme die Gleichung der Tangente für den Parameter $t = \frac{\pi}{5}$.
2) Berechne deren Schnittwinkel mit der x-Achse.



Lösung:

1) $\dot{x} = -\sin(t)$
$\dot{y} = \cos(t) + 2 \cdot \cos(2t)$
$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\cos(t) + 2 \cdot \cos(2t)}{\sin(t)}$
$y'\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2,427...$
$y\left(\frac{\pi}{5}\right) = y'\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot x\left(\frac{\pi}{5}\right) + d$
d = 3,503...
y = −2,428 · x + 3,503

- Ableiten von x(t) und y(t)
- Berechnen des y-Achsenabschnitts d mithilfe der Normalform der Geradengleichung

2) α = −arctan(−2,428) =
= 1,18... rad ≈ 67,61°

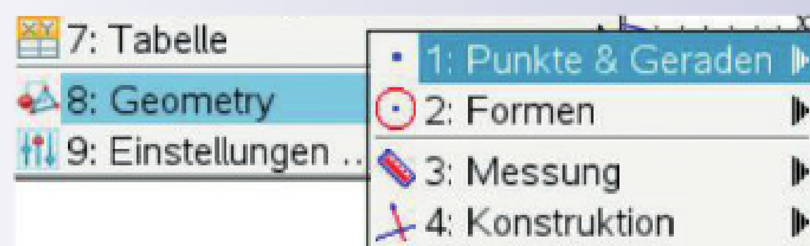
- Berechnen des Winkels α

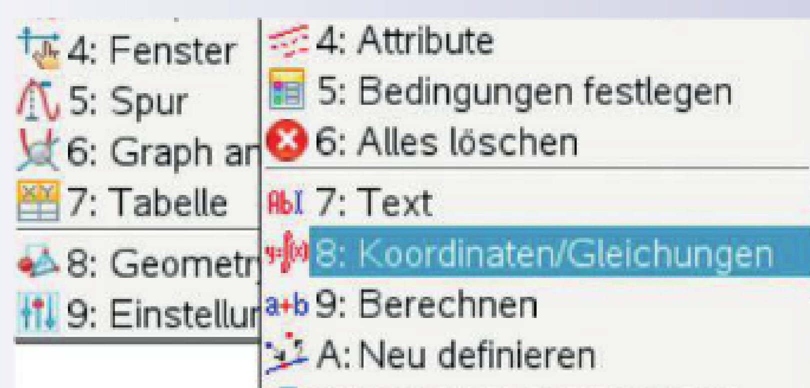
3.223 Eine Astroide wird durch $x(t) = 2 \cdot \cos^3(t)$, $y(t) = 2 \cdot \sin^3(t)$ beschrieben. Stelle die Kurve grafisch dar und bestimme die Gleichung der Tangente für $t = \frac{\pi}{4}$.

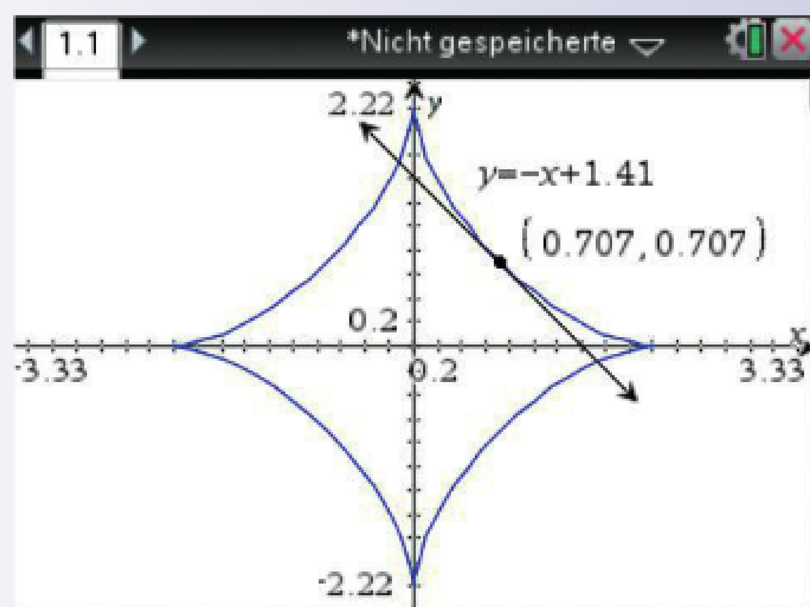
B

Lösung mit TI-Nspire:

$x1(t) = 2(\cos(t))^3$
$y1(t) = 2(\sin(t))^3$
$0 \le t \le 6.28$ tstep=0.13







- In der Applikation **Graphs** stellt man auf Parameterdarstellung um: Menü, **3: Graph-Eingabe/Bearbeitung, 3: Parametrisch**.
- Die Tangente erhält man über das Menü, **8: Geometry, 1: Punkte & Geraden, 7: Tangente** und positioniert diese vorerst beliebig.
- Mit dem Menü **1: Aktionen, 8: Koordinaten/Gleichungen** können die Koordinaten des Berührpunkts sowie die Gleichung der Tangente angezeigt werden.
- Man verschiebt den Berührpunkt bis zur gesuchten Stelle.

Die gesuchte Tangentengleichung lautet:
t: $y = -x + 1{,}41$

3.224 Am Rand einer Kreisscheibe rollt eine kleinere Kreisscheibe ab. Wählt man für den Parameter t den Drehwinkel am größeren Kreis, so gilt für die Bewegung eines Punkts am Rand der kleineren Kreisscheibe:

AB

$x(t) = 5 \cdot \cos(t) - \cos(5t)$, $y(t) = 5 \cdot \sin(t) - \sin(5t)$

1) Berechne die Komponenten $\dot{x}$ und $\dot{y}$ der Geschwindigkeit.
2) Berechne die Komponenten $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ der Beschleunigung.
3) Ermittle die Gleichungen der Tangenten für die Parameter $t = \frac{\pi}{4}$ und $t = \frac{3\pi}{4}$.
4) Gib den Schnittwinkel der beiden Tangenten an.

Lösung:

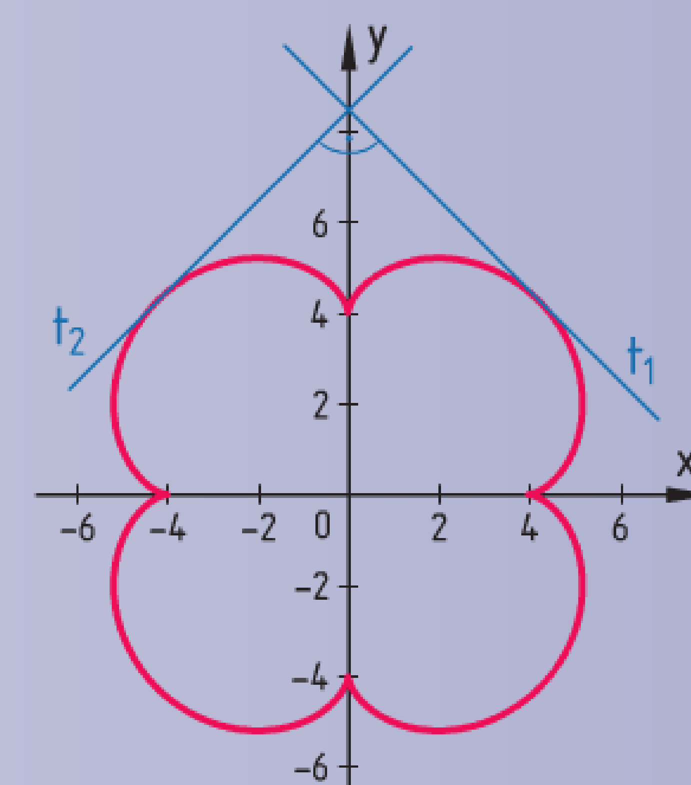
1) $\dot{x} = -5 \cdot \sin(t) + 5 \cdot \sin(5t)$, $\dot{y} = 5 \cdot \cos(t) - 5 \cdot \cos(5t)$
2) $\ddot{x} = -5 \cdot \cos(t) + 25 \cdot \cos(5t)$, $\ddot{y} = -5 \cdot \sin(t) + 25 \cdot \sin(5t)$
3) $y' = \frac{5 \cdot (\cos(t) - \cos(5t))}{5 \cdot (\sin(5t) - \sin(t))} = \frac{\cos(t) - \cos(5t)}{\sin(5t) - \sin(t)}$

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \;\Rightarrow\; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot x\left(\frac{\pi}{4}\right) + d \;\Rightarrow\; d = 6 \cdot \sqrt{2}$

1. Tangente: $y = -x + 6 \cdot \sqrt{2}$

$y'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 \;\Rightarrow\; y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot x\left(\frac{3\pi}{4}\right) + d \;\Rightarrow\; d = 6 \cdot \sqrt{2}$

2. Tangente: $y = x + 6 \cdot \sqrt{2}$



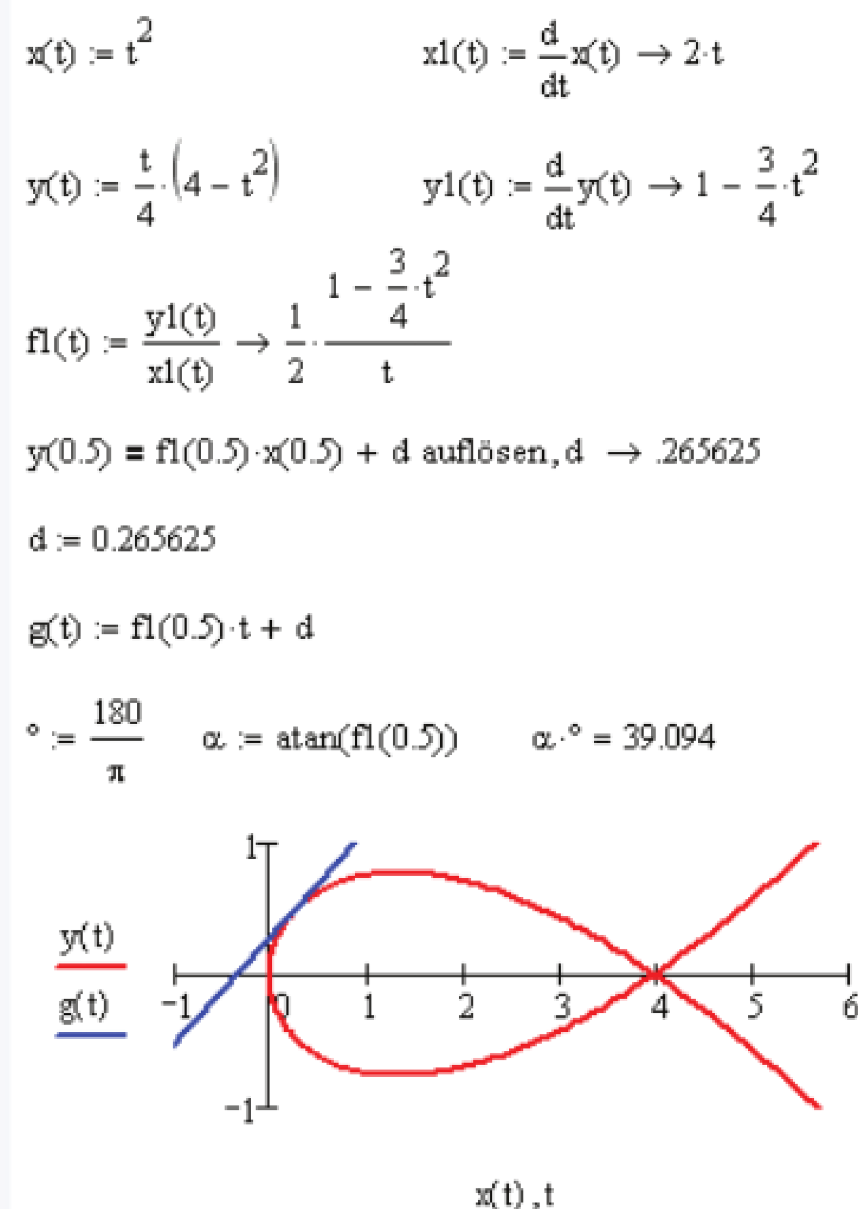
4) Da die Tangenten die Steigungen $k_1 = 1$ und $k_2 = -1$ haben, beträgt der Schnittwinkel 90°.

B **3.225** Die Kurve $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t}{4} \cdot (4 - t^2)$ wird Parabola nodata („verknotete Parabel“) genannt.



1) Bestimme die Gleichung der Tangente für $t = 0{,}5$.
2) Bestimme den Winkel in Grad, den diese Tangente mit der x-Achse einschließt.
3) Stelle die Kurve und ihre Tangente grafisch dar.

Lösung mit Mathcad:



- Definieren der Gleichungen x(t) und y(t) und bilden der ersten Ableitungen x1(t) und y1(t)
- Berechnen der Steigung der Tangente f1(t) als Quotient von y1(t) und x1(t)
- Aufstellen der Geradengleichung, für $t = 0{,}5$ einsetzen und nach d lösen
- Definieren der Tangente g(t)
- Definieren der Einheit Grad und berechnen des Steigungswinkels α
- Anfertigen der Grafik der Kurve und ihrer Tangente

Aufgaben 3.226 – 3.227: Bestimme jeweils die erste Ableitung der gegebenen Kurve und gib die Gleichung der Tangente für den Parameter $t = 1$ an.

B **3.226**
a) $x(t) = t$, $y(t) = t^2 - 2$
b) $x(t) = t^2$, $y(t) = 2t + 1$
c) $x(t) = 2t^2$, $y(t) = t^3$
d) $x(t) = t + 1$, $y(t) = 0{,}5t^2$

B **3.227**
a) $x(t) = \frac{1}{t+3}$, $y(t) = t - 1$
b) $x(t) = t^2 + 2$, $y(t) = \frac{1}{t^2}$
c) $x(t) = 4t$, $y(t) = \frac{1}{t^3 + 4}$
d) $x(t) = \frac{t}{4 - t^2}$, $y(t) = 2t$

B **3.228** Bestimme die Tangente an die gegebene Lissajous-Figur für den Parameter $t = \frac{\pi}{4}$. Berechne den Winkel, den die Tangente mit der waagrechten Achse einschließt.
a) $x(t) = 4 \cdot \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$
b) $x(t) = 4 \cdot \sin(2t)$, $y(t) = 2 \cdot \cos(3t)$
c) $x(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, $y(t) = 2 \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$
d) $x(t) = 6 \cdot \sin(t)$, $y(t) = 3 \cdot \cos(2t)$

B **3.229** Ein Industriekabel wird so von einer Kabeltrommel mit dem Radius $r = 1{,}5$ m abgewickelt, dass die Trommel fest bleibt und das Kabel immer gespannt ist. Die Kurve, die das freie Ende des Kabels beschreibt, nennt man Kreisevolvente. Ihre Parameterdarstellung lautet:
$x(t) = r \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t))$
$y(t) = r \cdot (\sin(t) - t \cdot \cos(t))$
a) Bestimme die Gleichung der Tangente an die Evolvente für den Parameter $t = 2$.
b) An welchem Punkt der Evolvente gibt es eine Tangente mit einem Steigungswinkel von 45°?

3.230 Zum Anbringen von Fahrbahnmarkierungen benutzt man eine Walze mit dem Radius r, an deren Rand eine Farbdüse angebracht ist, die beim Abrollen in gleich bleibenden Abständen Farbtupfer auf die Fahrbahn sprüht. Die Bahnkurve dieser Düse kann als gespitzte Zykloide dargestellt werden: AB

$x(t) = r \cdot (t - \sin(t)),\ y(t) = r \cdot (1 - \cos(t))$

1) Berechne den Winkel, den die Zykloide bei einem Walzendurchmesser von d = 0,4 m im Ursprung eines Koordinatensystems mit der waagrechten Achse einschließt.

2) Berechne jene Punkte mit $t \in [0; 5\pi]$, deren Tangenten die Steigung k = 0 haben.

3.231 Eine Wasserflasche rollt auf einem ebenen Tisch mit der Höhe $h_0 = 1{,}2$ m mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 2\,\frac{m}{s}$ gegen die Kante. Die anschließende Fallbewegung der Flasche kann in Parameterdarstellung angegeben werden: AB

$x(t) = v_0 \cdot t,\ y(t) = h_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2\ (g \approx 10\,\frac{m}{s^2})$

1) Berechne, in welcher waagrechten Entfernung von der Tischkante die Flasche auf dem Boden aufprallt.

2) Berechne, mit welcher Geschwindigkeit sie aufschlägt.

3) Berechne, in welchem Winkel sie aufschlägt.

3.232 Aus einem Wasserspeier fließt Regenwasser mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 0{,}8\,\frac{m}{s}$ unter einem Winkel von 75° gegenüber der Vertikalen ab. Er befindet sich in einer Höhe $h_0 = 40$ m über den Boden und ragt $x_0 = 50$ cm über die Gebäudemauer. AB



1) Stelle die Parameterdarstellung der Bahnkurve auf $(g \approx 10\,\frac{m}{s^2})$.

Hinweis: v_0 ist der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v_0}$. Ermittle zuerst die x- und die y-Komponente von $\vec{v_0}$.

2) Berechne, in welcher waagrechten Entfernung von der Gebäudemauer der Wasserstrahl auf den Boden auftrifft.

3) Berechne, mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel der Strahl auftrifft.

3.233 Die Parameterdarstellung einer logarithmischen Spirale lautet: B TE

$x(t) = 2 \cdot e^{0{,}5 \cdot t} \cdot \cos(4t),\ y(t) = 2 \cdot e^{0{,}5 \cdot t} \cdot \sin(4t)$

1) Stelle die Kurve für t aus dem Intervall $[0; 2\pi]$ grafisch dar.

2) Berechne die Gleichung der Tangente an die Kurve für den Parameter t = 0,5 und bestimme den Winkel, den sie mit der waagrechten Achse einschließt.

3.234 Zeichne die beiden in Parameterdarstellung gegebenen Kurven für t aus dem Intervall $[0; 2\pi]$ und berechne ihre Schnittpunkte und Schnittwinkel. B TE

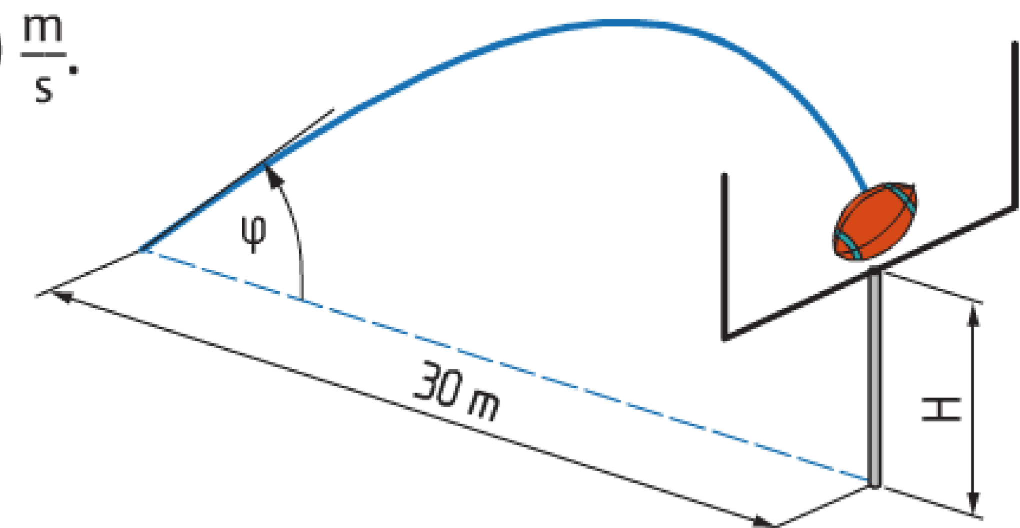
a) $x_1(t) = 2 \cdot \cos(t),\ y_1(t) = 3 \cdot \sin(t)$
$x_2(t) = 3 \cdot \cos(t),\ y_2(t) = 2 \cdot \sin(t)$

b) $x_1(t) = \frac{3}{\cos(t)},\ y_1(t) = \tan(t)$
$x_2(t) = 5 \cdot \cos(t),\ y_2(t) = 3 \cdot \sin(t)$

B **3.235** Eine Nephroide („Kaffeehäferlkurve") ist durch die Parameterdarstellung
$x(t) = \frac{3}{4} \cdot \cos(t) - \frac{1}{4} \cdot \cos(3t)$, $y(t) = \frac{3}{4} \cdot \sin(t) - \frac{1}{4} \cdot \sin(3t)$ gegeben.
Stelle die Nephroide im Intervall $[0; 2\pi]$ grafisch dar und berechne jenen Winkel, den die Tangenten für die Parameter $t_1 = \frac{\pi}{3}$ und $t_2 = \frac{2\pi}{3}$ miteinander einschließen.

AB **3.236** Beim American Football hat die angreifende Mannschaft nach Erreichen eines „Touchdowns" die Möglichkeit, einen Zusatzpunkt zu erzielen, indem sie den Ball durch das „Field Goal" kickt. Dabei wird der Ball über eine horizontale Torlatte zwischen zwei senkrechten Stäben geschossen, die in einer Höhe von H = 3,05 m angebracht ist. Der Ball befindet sich in einer waagrechten Entfernung von 30 m zum „Field Goal". Durch den Tritt eines Spielers erhält der Ball einen Steigungswinkel von $\varphi = 35°$ und eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 20\ \frac{m}{s}$. Die Schussbahn des Footballs kann in Parameterdarstellung beschrieben werden:





$x(t) = v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t$, $y(t) = v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

$g \approx 10\ \frac{m}{s^2}$, t in Sekunden, x(t) und y(t) in Meter

1) Berechne, in welcher Höhe der Football die Torlatte überquert.

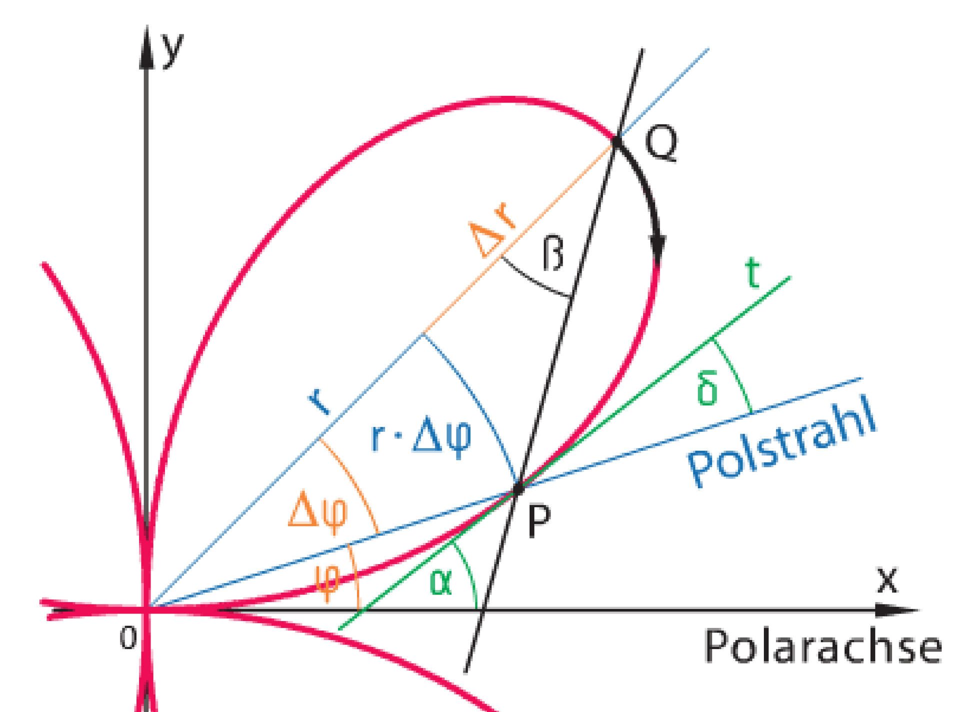
2) Berechne, mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel zur Waagrechten er die Torlatte überquert.

3.10.2 Ableitungen von Kurven in Polarkoordinaten

Ist eine Kurve in Polarkoordinaten, also durch eine Gleichung der Form $r = r(\varphi)$ angegeben, so kann der Steigungswinkel der Kurve mihilfe der Tangente ermittelt werden. Die Vorgangsweise wird anhand eines Beispiels gezeigt. Die Gleichung einer Rosenkurve in Polarform lautet $r(\varphi) = \sin(2\varphi)$. Leitet man diese Funktion ab und geht man dabei genauso vor wie bei der Ableitung einer Funktion in kartesischen Koordinaten, so erhält man:

$$r'(\varphi) = \frac{dr}{d\varphi} = 2 \cdot \cos(2\varphi)$$

Diese Funktion beschreibt allerdings geometrisch nicht die Steigungen der Tangenten an die Kurve.



Zwischen dem Punkt $P(r|\varphi)$ und dem Punkt $Q(r + \Delta r|\varphi + \Delta\varphi)$ überstreicht der Polstrahl den Winkel $\Delta\varphi$.

Geht $\Delta\varphi \to 0$, nähert sich der Punkt Q immer mehr dem Punkt P. Die Sekante PQ nähert sich der Tangente t im Punkt P.

Ebenso geht Δr gegen null und der Winkel β nähert sich dem Winkel δ. Es entsteht ein „unendlich kleines", rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $r \cdot \Delta\varphi$ und Δr.

$\tan(\beta) \approx \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta r}$ bzw. für $\Delta\varphi \to 0$: $\tan(\delta) = \frac{r \cdot d\varphi}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}$

Für die so genannte **polare Steigung** $\tan(\delta)$ gilt somit: $\tan(\delta) = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}$

Für die gegebene Rosenkurve $r(\varphi) = \sin(2\varphi)$ erhält man damit: $\tan(\delta) = \frac{\sin(2\varphi)}{2 \cdot \cos(2\varphi)} = \frac{1}{2} \cdot \tan(2\varphi)$

Für den Winkel α, den die Tangente mit der Polarachse einschließt, gilt: $\alpha = \varphi + \delta$

Nun kann eine Formel entwickelt werden, mit der die Tangentensteigung – ohne vorherige Berechnung der polaren Steigung – ermittelt werden kann.

$$\alpha = \varphi + \delta$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\varphi + \delta)$$

$$\tan(\varphi + \delta) = \frac{\tan(\varphi) + \tan(\delta)}{1 - \tan(\varphi) \cdot \tan(\delta)} =$$ ● Summensatz für den Tangens

$$= \frac{\tan(\varphi) + \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}}{1 - \tan(\varphi) \cdot \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}} = \frac{r'(\varphi) \cdot \tan(\varphi) + r(\varphi)}{r'(\varphi) - r(\varphi) \cdot \tan(\varphi)}$$ ● Einsetzen für $\tan(\delta) = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}$

In Kurzform: $\tan(\alpha) = \frac{r' \cdot \tan(\varphi) + r}{r' - r \cdot \tan(\varphi)}$

Der Schnittwinkel zwischen dem Polstrahl und der Tangente an eine Kurve $r = r(\varphi)$ kann mit $\tan(\delta) = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}$ für jeden beliebigen Winkel φ berechnet werden.

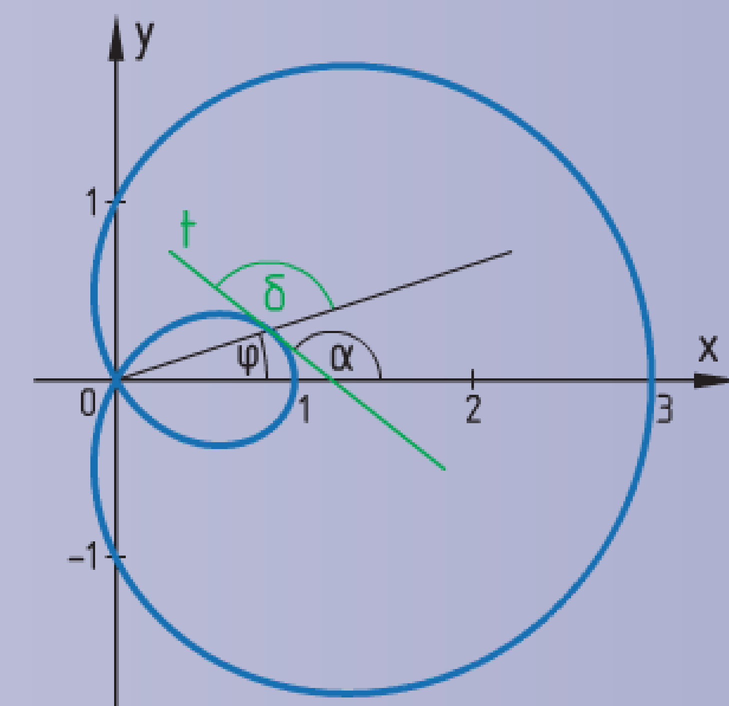
Dieser Ausdruck wird **polare Steigung** genannt.

Für den **Steigungswinkel** α einer Tangente an die Kurve gilt: $\tan(\alpha) = \frac{r' \cdot \tan(\varphi) + r}{r' - r \cdot \tan(\varphi)}$

3.237 Die Polarform einer Pascal'sche Schnecke lautet: $r(\varphi) = 2 \cdot \cos(\varphi) + 1$ AB

1) Stelle eine Formel für die polare Steigung auf.

2) Gib die Steigung der Tangente an die Kurve allgemein an.



Lösung:

1) $r'(\varphi) = -2 \cdot \sin(\varphi)$ ● Ableiten von $r(\varphi)$

$\tan(\delta) = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)} = -\frac{2 \cdot \cos(\varphi) + 1}{2 \cdot \sin(\varphi)}$ ● Einsetzen in $\tan(\delta)$

2) $\tan(\alpha) = \frac{-2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \tan(\varphi) + 2 \cdot \cos(\varphi) + 1}{-4 \cdot \sin(\varphi) - \tan(\varphi)}$ ● Einsetzen in $\tan(\alpha)$

Aufgaben 3.238 – 3.239: Stelle für die gegebenen Kurven eine Formel für die polare Steigung und die Steigung der Tangente auf.

3.238 ***a)*** $r(\varphi) = 2\varphi^2$ ***b)*** $r(\varphi) = 3\varphi$ ***c)*** $r(\varphi) = 0{,}5 \cdot \cos(\varphi)$ ***d)*** $r(\varphi) = 5 \cdot \sqrt{\varphi}$ AB

3.239 ***a)*** $r(\varphi) = \cos^2(\varphi)$ ***b)*** $r(\varphi) = \sqrt{\cos(\varphi)}$ ***c)*** $r(\varphi) = \frac{3}{\sin(\varphi)}$ ***d)*** $r(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$ AB

3.240 Berechne für die gegebene Kurve alle waagrechten Tangenten. Stelle die Kurve sowie die Tangenten mit Technologieeinsatz dar. B



a) $r(\varphi) = 2\varphi$ ***b)*** $r(\varphi) = e^{\varphi}$

Differentialrechnung

Zusammenfassung

Differenzenquotient

Der Differenzenquotient gibt die **mittlere Änderungsrate** einer Funktion $y = f(x)$ in einem Intervall $[x_0; x_1]$ an und beschreibt die **Steigung einer Sekante** des Funktionsgraphen von f.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Differentialquotient

Der Differentialquotient gibt die **momentane Änderungsrate** einer Funktion $y = f(x)$ an und beschreibt die **Steigung der Tangente** an den Funktionsgraphen. Die Ableitung $y' = f'(x)$ ist eine Funktion, die die momentane Änderungsrate der Funktion $y = f(x)$ für jeden beliebigen Wert x aus der Definitionsmenge von f beschreibt.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$$

Steigungswinkel α einer Funktion an der Stelle x_0: $\tan(\alpha) = f'(x_0)$

Für **Weg-Zeit-Funktion** gilt:

Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$

Momentangeschwindigkeit: $v(t) = \frac{ds}{dt}$

Beschleunigung: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

Ableitungen wichtiger Funktionen

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ mit $x \neq (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$f(x) = \arcsin(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \lvert x \rvert < 1$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \lvert x \rvert < 1$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$
$f(x) = \sinh(x)$	$f'(x) = \cosh(x)$
$f(x) = \cosh(x)$	$f'(x) = \sinh(x)$
$f(x) = \tanh(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

Ableitungsregeln

Faktorregel: $y = a \cdot f(x) \Rightarrow y' = a \cdot f'(x), a \in \mathbb{R}$

Summenregel: $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$

Produktregel: $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel: $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel: $y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ bzw. $y' = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Implizites Differenzieren

Darunter versteht man das Ableiten einer in der Form $F(x, y) = 0$ gegebenen Funktion. Dabei ist $y = y(x)$ und die Ableitung y' ist zu berücksichtigen.

Logarithmisches Differenzieren

Sind sowohl Basis als auch Exponent einer Funktion von der Variablen abhängig, so muss die Funktion vor dem Differenzieren logarithmiert werden.

Differentiale dx, dy

Änderung dy der Funktionswerte der Tangente an der Stelle x_0 bei Änderung des x-Werts um $dx = \Delta x$: $dy = y'(x_0) \cdot dx$

Linearisieren einer Funktion – näherungsweises Ersetzen durch die Tangente an der Stelle x_0

Für kleine Werte von $\Delta x = dx$ gilt: $\Delta y \approx dy$, also $\Delta y \approx y'(x_0) \cdot dx$

Regel von de l'Hospital

Führt ein Grenzwert auf eine unbestimmte Form, so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \text{ bzw. } \lim_{x \to \infty} \left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{g'(x)}{h'(x)}\right)$$

Ableitung von Kurven in Parameterdarstellung

Steigung einer durch $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gegebenen Funktion: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Ableitung von Kurven in Polarkoordinaten

Schnittwinkel zwischen Polstrahl und Tangente: $\tan(\delta) = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}$

Für den **Steigungswinkel** α einer Tangente an die Kurve gilt: $\tan(\alpha) = \frac{r' \cdot \tan(\varphi) + r}{r' - r \cdot \tan(\varphi)}$

Weitere Aufgaben

Mittlere und momentane Änderungsraten

3.241 Berechne die mittlere Änderungsrate im gegebenen Intervall. B

a) $y = 4x^2 + 3x$; $[-2; 1]$ **b)** $y = \frac{1}{x^2 + 2}$; $[0; 1]$ **c)** $y = -\frac{2x + 1}{x}$; $[-4; -2]$

3.242 Berechne für die Weg-Zeit-Funktion s die Momentangeschwindigkeit v zum angegebenen Zeitpunkt t_0. B

a) $s(t) = 3\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, $t_0 = 10$ s **b)** $s(t) = 2\,\frac{m}{s} \cdot t$, $t_0 = 5$ s **c)** $s(t) = 0{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$, $t_0 = 1$ s

C **3.243** Ordne den gegebenen Funktionen jeweils die erste Ableitung nach der Zeit zu.

a)

1	Arbeit	
2	Geschwindigkeit	

A	Beschleunigung
B	Kraft
C	Leistung
D	Weg

b)

1	Drehimpuls	
2	Ladung	

A	Winkelgeschwindigkeit
B	Wärmestrom
C	Stromstärke
D	Drehmoment

AB **3.244** Eine Viehtränke hat die Form eines ℓ = 175 cm langen, liegenden Prismas, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Öffnungswinkel von α = 100° ist. Die obere Breite beträgt a = 70 cm. Durch ein Rohr fließen bei geschlossenem Abfluss 0,15 Liter Wasser pro Sekunde zu.
Bestimme die Funktion der Änderung des Wasserstands h(t) in Abhängigkeit von der Zeit t.

Grafisches Differenzieren

Aufgaben 3.245 – 3.246: Zeichne den Funktionsgraphen und ermittle die erste Ableitung grafisch.

BC **3.245**

a) $f(x) = \begin{cases} -2 & -4 \leq x < -2 \\ x & -2 \leq x \leq 3 \\ 3 & 3 < x \leq 4 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 6 & -5 \leq x < -2{,}5 \\ |x - 1| & -2{,}5 \leq x \leq 2 \\ -2x + 5 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & -4 \leq x < -1{,}5 \\ -2 & -1{,}5 \leq x \leq 1 \\ 3x - 5 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 4x + 8 & -5 \leq x < -3 \\ -|2x + 2| & -3 \leq x \leq 2 \\ -5x + 4 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$

BC **3.246** **a)** $y = x^2 - 2x - 3$ **b)** $f(x) = -2x^2 + x - 4$ **c)** $g(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}25x - 4$

Ableitungen von Funktionen

B **3.247** Ermittle y′.

a) $y = x^{23}$ **c)** $y = \sqrt[4]{x^3}$ **e)** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **g)** $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$

b) $y = \sqrt[5]{x}$ **d)** $y = \frac{1}{x^4}$ **f)** $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$ **h)** $y = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

B **3.248** Ermittle die erste Ableitung der Funktion y = f(x).

1) $y = a \cdot x + b$ **3)** $y = \frac{x}{b} - a$ **5)** $y = a \cdot (1 + bx)$

2) $y = \frac{x}{a} + b$ **4)** $y = \frac{a - x}{b}$ **6)** $y = \frac{a}{b} \cdot (1 - x)$

B **3.249** Ermittle die erste Ableitung.

a) $y = 2 \cdot \tan(x)$ **b)** $s(t) = 4 \cdot e^t$ **c)** $f(x) = 3 \cdot \ln(x)$

B **3.250** Ermittle die erste und die zweite Ableitung.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ **c)** $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ **e)** $f(t) = 3 \cdot \sin(t) - 4t$

b) $s(t) = 5t^3 + 7t^2 - 4t + 6$ **d)** $f(x) = 2 \cdot \ln(2) - 3 \cdot \ln(x)$ **f)** $f(x) = 3 \cdot e^x - 4 \cdot e$

3.251 Ermittle die Steigung der Kurve an der Stelle x_0. B
a) $y = 3x^2 - x + 2,\ x_0 = 3$ **b)** $y = 1 - \frac{x^3}{4},\ x_0 = -1$ **c)** $y = \frac{1}{3} \cdot (x^4 - x^2),\ x_0 = 2$

3.252 Gib die Gleichung der Tangente an der angegebenen Stelle an. B
a) $y = 2x^2 - 12x + 13,\ x_0 = 2{,}5$ **b)** $y = \frac{1}{2} \cdot e^x - 1,\ x_0 = 0$ **c)** $y = 2x - \sin(x),\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

3.253 Ermittle die erste und die zweite Ableitung. B
a) $y = 3 \cdot \left(\sin(x) - 4\right)$ **b)** $y = 2 \cdot \left(\ln(x) - 3\right)$ **c)** $f(x) = 3 \cdot \left(e^x - 4\right)$

Aufgaben 3.254 – 3.256: Gib jeweils die erste Ableitung an.

3.254 **a)** $y = 3x \cdot \sin(x)$ **b)** $f(x) = x^4 \cdot \cos(x)$ **c)** $f(t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$ **d)** $y = \sin(x) \cdot \tan(x)$ B

3.255 **a)** $f(t) = a \cdot (1 - e^{-t})$ **b)** $f(t) = a \cdot t \cdot (1 - e^{-\frac{t}{2}})$ **c)** $f(t) = a \cdot t - e^{-\frac{t}{2a}}$ B

3.256 **a)** $y = 3x \cdot e^x$ **b)** $y = (x^3 + 2x) \cdot e^x$ **c)** $y = (e^x + 1) \cdot 4x^2$ **d)** $y = (x + e^x) \cdot (1 - e^x)$ B

3.257 Berechne, an welchen Stellen x die Funktion die angegebene Steigung k hat. B
a) $f(x) = 2x^3 - x,\ k = 0{,}5$ **b)** $f(x) = 0{,}1x^2 + 2,\ k = 1$ **c)** $f(x) = x^2 - 0{,}8x,\ k = -2$

3.258 Berechne, an welchen Stellen t die Funktion den angegebenen Steigungswinkel α hat. B
a) $y(t) = 4t^2,\ \alpha = 45°$ **b)** $y(t) = 3t^3,\ \alpha = 60°$ **c)** $y(t) = t^2,\ \alpha = 30°$

Aufgaben 3.259 – 3.262: Ermittle $f'(x)$. Vereinfache die Ergebnisse, wenn möglich.

3.259 **a)** $f(x) = \frac{x^2}{3x - 5}$ **b)** $f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{3x^3 - 5}$ **c)** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x - 1}$ **d)** $f(x) = \frac{7x^2}{\sqrt{x} - 3}$ B

3.260 **a)** $f(x) = \frac{2x}{3 \cdot \sin(x) + 1}$ **b)** $f(x) = \frac{x + \sin(x)}{\cos(x)}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{\sin(x) + 2 \cdot \cos(x)}$ **d)** $f(x) = \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)}$ B

3.261 **a)** $f(x) = \frac{x + 1}{e^x}$ **b)** $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{e^x + 1}$ **c)** $f(x) = \frac{2 \cdot \sin(x)}{e^x}$ **d)** $f(x) = \frac{e^x}{\sin(x) + \cos(x)}$ B

3.262 **a)** $f(x) = (x^2 + 5)^6$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{8x - 1}$ **e)** $f(x) = e^{3x^2}$ **g)** $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$ B
b) $f(x) = \sin(5x)$ **d)** $f(x) = \cos(2x^2)$ **f)** $f(x) = \sin^3(x)$ **h)** $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$ B

Aufgaben 3.263 – 3.265: Ermittle jeweils y'.

3.263 **a)** $y = x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ **b)** $y = 3x^2 \cdot e^x \cdot \sin(x)$ **c)** $y = \sqrt{3x} \cdot 2^x \cdot \sin(x)$ B

3.264 **a)** $y = \frac{x \cdot e^x}{x^2 + 1}$ **b)** $y = \frac{e^x + 1}{\sqrt{x} \cdot (1 - e^x)}$ **c)** $y = \frac{3x^2 \cdot (e^x + 1)}{1 - \sqrt{x}}$ B

3.265 **a)** $y = \frac{x^2 + \cos(5x)}{x^2 - \sin(5x)}$ **b)** $y = \frac{\sin(2x) - \cos(2x)}{\sin(3x)}$ **c)** $y = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(2x)}$ B

3.266 Ermittle die Ableitung mithilfe der Formel $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$ B
a) $y = \sqrt{\sin(x) + 0{,}5}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ **c)** $y = \sqrt{\frac{x + 1}{1 - x}}$

Differentialrechnung

D **3.267** Welche Lösungen sind falsch? Begründe jeweils deine Entscheidung.

a) $y = x^2 \cdot e^{3x}$

A) $y' = 2x \cdot 3e^{3x}$ **B)** $y' = x \cdot e^{3x} \cdot (2 + 3x)$

b) $y = 5 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x)$

A) $y' = -5 \cdot \sin(x) - \sin(x) + x \cdot \cos(x)$ **B)** $y' = -5 \cdot \sin(x) - \sin(x) - x \cdot \cos(x)$

Aufgaben 3.268 – 3.269: Ermittle alle angegebenen Ableitungen.

B **3.268** $z = a \cdot b^c + f$; $\frac{dz}{da} = ?$, $\frac{dz}{db} = ?$, $\frac{dz}{dc} = ?$, $\frac{dz}{df} = ?$

B **3.269** $f = \frac{A \cdot e^B + C}{S}$; $\frac{df}{dA} = ?$, $\frac{df}{dB} = ?$, $\frac{df}{dC} = ?$, $\frac{df}{dS} = ?$, $\frac{df}{dt} = ?$

B **3.270** Gib y' an.

a) $y = \sqrt{e^{-\frac{x}{3}} + 1}$ **b)** $y = \sin^2(x^2)$ **c)** $y = \frac{1}{\tan(2x)}$ **d)** $y = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} + 1\right)$

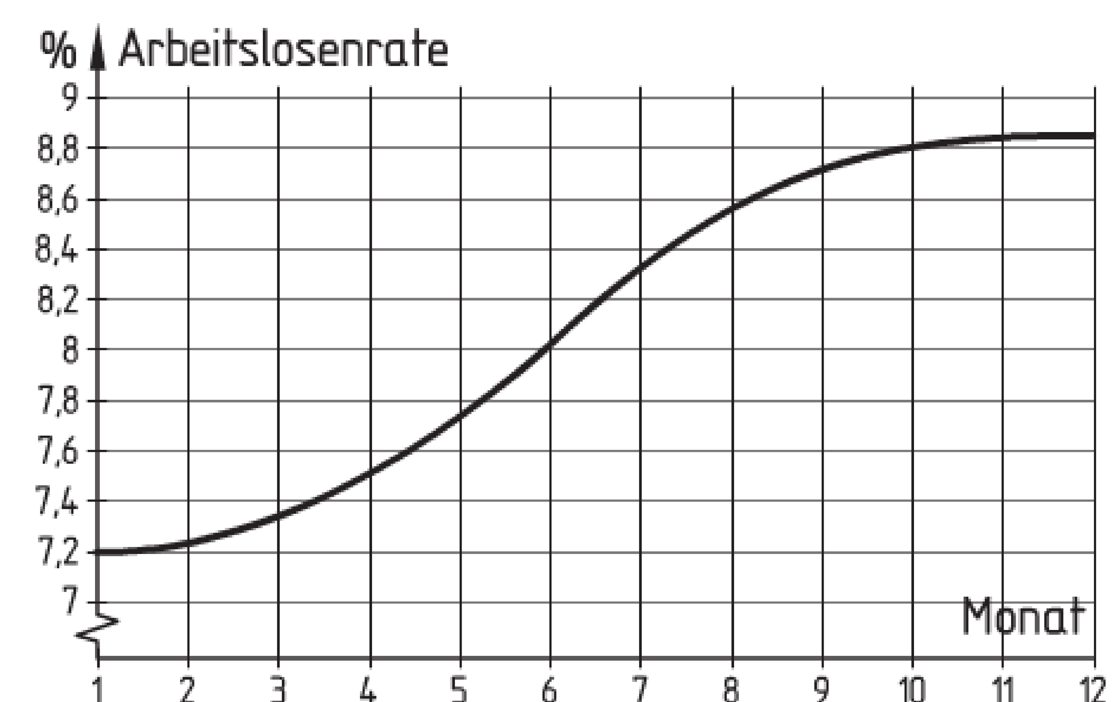
Aufgaben 3.271 – 3.272: Welche Ableitungen sind richtig? Erkläre, warum die anderen es nicht sein können.

D **3.271** $z = 2 \cdot \ln\left(\frac{x}{x - 1}\right)$ **A)** $\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{x \cdot (x - 1)}$ **B)** $\frac{dz}{dx} = 2 \cdot \frac{x - 1}{x}$ **C)** $\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} \cdot \left(1 - \frac{x}{x - 1}\right)$

D **3.272** $f(t) = \sin^2(\omega t)$ **A)** $f'(t) = 2 \cdot \cos(\omega t)$ **B)** $f'(t) = 2\omega \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t)$

Textaufgaben

AD **3.273** Ein Politiker präsentiert eine Grafik, die die Entwicklung der Arbeitslosenzahlen im Verlauf eines Jahrs zeigt. Die Opposition betont die steigenden Arbeitslosenzahlen. Ein Politiker der Regierungspartei weist hingegen auf den Rückgang der Steigerungsrate hin. Begründe mithilfe des Ableitungsbegriffs, warum beide Aussagen richtig sind.



AB **3.274** Ein Ball wird senkrecht nach oben geworfen. Seine Höhe kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$h(t) = 5 + 12t - 5t^2$

h ... Höhe in Meter, t ... Zeit in Sekunden

1) Gib den Geschwindigkeitsverlauf als Funktion an.

2) Stelle h und v grafisch dar.

AB **3.275** Formel-1-Wagen können auf einer geradlinigen Strecke eine Beschleunigung von $a = 11{,}11\ \frac{m}{s^2}$ aufweisen. Bei einem Grand Prix wurde bei einigen Rennwagen eine Höchstgeschwindigkeit von $320\ \frac{km}{h}$ gemessen.

1) Bestimme die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v eines Formel-1-Wagens, wenn für die Weg-Zeit-Funktion $s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$ gilt.

2) Berechne, nach wie viel Sekunden ein Rennwagen die angegebene Höchstgeschwindigkeit auf einer geradlinigen Strecke erreichen kann.

3) Berechne, welche Entfernung dabei zurückgelegt wird.

3.276 Eine Schirennläuferin fährt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 30\,\frac{m}{s}$ auf einem waagrechten Streckenabschnitt auf eine scharfe Kante im Streckenverlauf (bei x = 0 m) zu. Ab dort hat die Abfahrt ein mittleres Gefälle von 10 %. An der Kante hebt die Läuferin ab. Dieser „Sprung" kann durch die Funktion f beschrieben werden. AB TE

$f(x) = 10\,m - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$; $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, f … Höhe in m, x … Entfernung zur Kante in m

1) Beschreibe den Streckenverlauf nach der Kante als lineare Funktion mit dem y-Achsenabschnitt d = 10 m.
2) Stelle den Streckenverlauf und f(x) in einem Koordinatensystem grafisch dar.
3) Berechne, in welcher Entfernung in x-Richtung von der Kante die Rennläuferin wieder auf der Strecke aufkommt.
4) Berechne, welchen Weg sie ohne Sprung auf der Strecke zurückgelegt hätte.
5) Berechne, in welchem Winkel sie wieder auf der Strecke aufkommt.

Implizites Differenzieren, Regel von de l'Hospital, Linearisierung

3.277 Differenziere implizit und gib y′ an. B

a) $x \cdot y + 2x + 2y = 5$ **b)** $\sin(x \cdot y) + \sin(x) \cdot \cos(y) = 1$ **c)** $y \cdot e^x - x \cdot e^y = x \cdot y$

Aufgaben 3.278 – 3.280: Führe jeweils die Grenzwertberechnung durch.

3.278 a) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{c \cdot x^3 + 1}{x - 3}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{k \cdot x^2 - 5}{x - 5}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x^4}{x^2 + 2x - 1}\right)$ B

3.279 a) $\lim\limits_{\varphi \to 0}\left(\frac{\sin(\varphi)}{\varphi}\right)$ **b)** $\lim\limits_{\alpha \to 0}\left(\frac{\cos(\alpha)}{\alpha}\right)$ **c)** $\lim\limits_{\beta \to 0}\left(\frac{\tan(\beta)}{\beta}\right)$ B

3.280 a) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{x - 1}{2} \cdot \ln(x - 1)\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin(5x)}{3x}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{e^{3x}}\right)$ B

3.281 **1)** Stelle die Kurve grafisch dar. BD
2) Ermittle die Gleichung der Tangente in $P(x_0|y > 0)$.
3) Erkläre, wie man jene Stellen ermittelt, an denen die Kurve waagrechte bzw. senkrechte Tangenten hat.

a) $x^2 + y^2 = 169$, $x_0 = 12$ **b)** $25x^2 + 36y^2 = 900$, $x_0 = 3$

3.282 **1)** Linearisiere die Funktion $y = 3 \cdot (1 - e^{-\frac{x}{5}})$ an der Stelle $x_0 = 0$. BC
2) Vergleiche Δy mit dem Differential dy für Δx = 0,1 und Δx = 0,5. Gib die Abweichung in Prozent an.

Kurven in Parameterdarstellung und in Polarkoordinaten

3.283 Bestimme jeweils die erste Ableitung der in Parameterform gegebenen Kurven und gib die Gleichung der Tangenten für $t_0 = 1$ an. B

a) $x(t) = t$, $y(t) = t^3$ **b)** $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{1}{t^2}$ **c)** $x(t) = 2t^2$, $y(t) = t^2 - 2$ **d)** $x(t) = \frac{1}{t + 3}$, $y(t) = t^2$

3.284 Die Parameterdarstellung einer Hypozykloide lautet: AB TE
$x(t) = 3 \cdot \cos(t) + \cos(3t)$, $y(t) = 3 \cdot \sin(t) - \sin(3t)$
Ermittle die Steigung für t = 0,3. In welchen Punkten hat die Kurve waagrechte Tangenten?

3.285 Stelle für die gegebenen Kurven eine Formel für die polare Steigung und die Steigung der Tangente auf. B

a) $r(\varphi) = 3\varphi^2$ **b)** $r(\varphi) = 5\varphi$ **c)** $r(\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi)$ **d)** $r(\varphi) = 0{,}5 \cdot \sin^2(\varphi)$

Differentialrechnung

Aufgaben in englischer Sprache

acceleration	Beschleunigung	difference quotient	Differenzenquotient
angle of elevation	Steigungswinkel	differentiate	ableiten
average speed	mittlere Geschwindigkeit	rate of change	Änderungsrate
chain rule	Kettenregel	slope	Steigung
deducible, derivable, differentiable	differenzierbar	speed	Betrag der Geschwindigkeit
derivative	Differentialquotient	velocity	Geschwindigkeit

Sprechweisen:

y' … y prime $\qquad \frac{dy}{dx}$ … derivative of y with respect to x

y'' … y double prime $\qquad \frac{d^2y}{dx^2}$ … d squared y over dx squared

B **3.286** Find the slope of the tangent to the curve at the indicated point in each of the following functions.
a) $y = x^3 + 2x^2 - 5$ at $(1|y)$ **b)** $y = 2x^3 - x + 11$ at $(-2|y)$

B **3.287** Find the first and second derivative for the following equations.
a) $y = e^{3x}$ **b)** $y = \ln(3x - 2)$ **c)** $y = \sin^2(5x)$ **d)** $y = B \cdot (1 - e^{-2x})$

B **3.288** For each of the following functions list the values of x for which the slope of the tangent has the given value.
a) $y = 2x^2 - 5x - 3$; $k = 3$ **b)** $y = -x^2 + 3x - 1$; $k = -3$ **c)** $y = x^3 - 7x + 2$; $k = 5$

B **3.289** Differentiate $x^2 \cdot \tan(x)$ with respect to x.

AB **3.290** A cheetah moves in a straight line so that its distance s (in meters) from a fixed point is given by
$s(t) = -t^3 + 27t + 10$; $t \in [0\text{ s}; 3\text{ s}]$.
1) Find the velocity after two seconds.
2) Find the initial velocity.
3) Find the acceleration after two seconds.



AB **3.291** The radius of a circle is increasing at the rate of $1\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. At what rate is the area of the circle increasing when r = 6 cm?

AB **3.292** Find the equation of the tangent to the curve $x^2 = 4y$ at $(x|9)$.

AB **3.293** A butterfly moves along a line away from a fixed point p according to the law
$s(t) = 0{,}3 \cdot (t^3 - 9t^2 + 22t)$,
where s represents the distance travelled in meters and t represents the time in seconds.
Find the distance the butterfly has moved from p, when
1) the velocity is zero,
2) the acceleration is zero.



AB **3.294** A spherical balloon is inflated with gas at the rate of 8 m^3 per minute. How fast is the radius of the balloon increasing when the radius is 0,5 m?

Wissens-Check

		gelöst
1	Die mittlere Geschwindigkeit wird mithilfe des ______________ (Differenzenquotienten / Differentialquotienten) berechnet. Geometrisch entspricht dieser der Steigung der zugehörigen ______________ (Sekante des / Tangente an den) Funktionsgraphen.	
2	Die Momentangeschwindigkeit wird mithilfe des ______________ (Differenzenquotienten / Differentialquotienten) berechnet. Geometrisch entspricht dieser der Steigung der zugehörigen ______________ (Sekante des / Tangente an den) Funktionsgraphen.	
3	Der Steigungswinkel der Tangente wird mithilfe des ______________ (Sinus / Cosinus / Tangens) im Steigungsdreieck berechnet.	
4	Gib die mittlere Änderungsrate von $\frac{x}{4 - x^2}$ im Intervall [0; 1] an.	
5	Gib für $f(x) = 3x^2 - 5x$ die momentane Änderungsrate für $x = x_0$ an.	
6	Die erste Ableitung von $y = (5 - 3x)^2$ lässt sich unter anderem auf folgende Arten ermitteln: A) $y = 25 - 30x + 9x^2$ $y' = -30 + 18x$ B) $y = (5 - 3x) \cdot (5 - 3x)$ $y' = (-3) \cdot (5 - 3x) + (5 - 3x) \cdot (-3) = (-6) \cdot (5 - 3x) = -30 + 18x$ C) $y' = 2 \cdot (5 - 3x) \cdot (-3) = (-6) \cdot (5 - 3x) = -30 + 18x$ Welche Regeln wurden jeweils angewendet?	
7	Nenne eine Funktion, deren erste Ableitung mit der fünften Ableitung übereinstimmt.	
8	Wie lautet die 1. Ableitung von $y = x^e$? Welche Regel wird dabei verwendet?	
9	Wie oft ist die Funktion $y = \sin^2(2x^2 + \sqrt{3})$ verkettet?	
10	Welche erste Ableitung von $y = \sqrt{\cos(4x^2)}$ ist richtig? A) $-\frac{1}{2}\sin(8x)$ B) $-2 \cdot \sin(2x)$ C) $-\frac{4x \cdot \sin(4x^2)}{\sqrt{\cos(4x^2)}}$	

Lösung:
1) Differenzenquotienten, Sekante des; 2) Differentialquotienten, Tangente an den; 3) Tangens; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $f'(x_0) = 6x_0 - 5$; 6) A) vor dem Differenzieren wurde eine binomische Formel angewendet; dann Summen-, Faktor- und Potenzregel; B) Produktregel für $y = (5 - 3x) \cdot (5 - 3x)$ mit $u = (5 - 3x)$ und $v = (5 - 3x)$; für u′ bzw. v′ jeweils Summen-, Faktor- und Potenzregel, C) Kettenregel; für die innere Ableitung Summen-, Faktor- und Potenzregel; 7) $y = e^x$; $y = \sin(x)$; $y = \cos(x)$; $y = \sinh(x)$; $y = \cosh(x)$; 8) $y' = e \cdot x^{e-1}$; Potenzregel 9) 3-mal; 10) C

4 Anwendungen der Differentialrechnung

Die bisher erlernten Methoden der Differentialrechnung ermöglichen das mathematische Erfassen von Vorgängen, bei denen die Änderungsrate einer Größe von Bedeutung ist. Die Differentialrechnung findet in vielen Gebieten der Naturwissenschaft, der Technik und der Wirtschaft Anwendung. Zu diesen Anwendungen zählen zum Beispiel das Ermitteln von größten bzw. kleinsten Werten einer Funktion sowie das Untersuchen des Verlaufs einer Kurve.



4.1 Extremwertaufgaben

4.1.1 Extremwerte von Funktionen

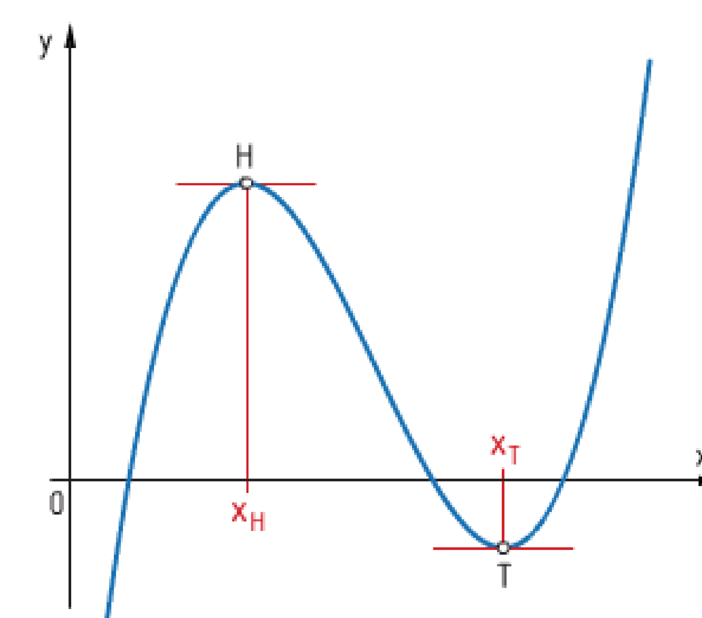
Viele Problemstellungen haben das Maximieren oder Minimieren von Größen zum Ziel. Dabei kann es sich zum Beispiel um das Aufsuchen eines maximalen Gewinns oder eines möglichst geringen Materialverbrauchs handeln. Die mathematische Formulierung eines solchen Problems nennt man **Extremwertaufgabe**. Ziel dabei ist es zu ermitteln, welchen Wert die unabhängige Variable annehmen muss, damit die davon abhängige Größe maximal oder minimal wird.

BCD **4.1** Ein Ball wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20\ \frac{m}{s}$ zum Zeitpunkt t = 0 s senkrecht nach oben geworfen. Die Höhe h (in Meter) zum Zeitpunkt t (in Sekunden) ist gegeben durch:
$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit $g = 10\ \frac{m}{s^2}$

1) Stelle die Funktion grafisch dar.
2) Gib jenen Zeitpunkt an, zu dem der Ball die maximale Höhe erreicht. Ermittle die Steigung der Tangente zu diesem Zeitpunkt. Erkläre deren physikalische Bedeutung.
3) Beschreibe das Monotonieverhalten der Funktion vor und nach dieser Stelle.

Bereits in Band 2, Abschnitt 1.2, wurde gezeigt, wie das lokale Maximum bzw. das lokale Minimum einer Funktion aus dem Funktionsgraphen abgelesen werden kann. Nun soll dies rechnerisch mithilfe der Differentialrechnung durchgeführt werden, indem man die erste Ableitung einer Funktion untersucht.

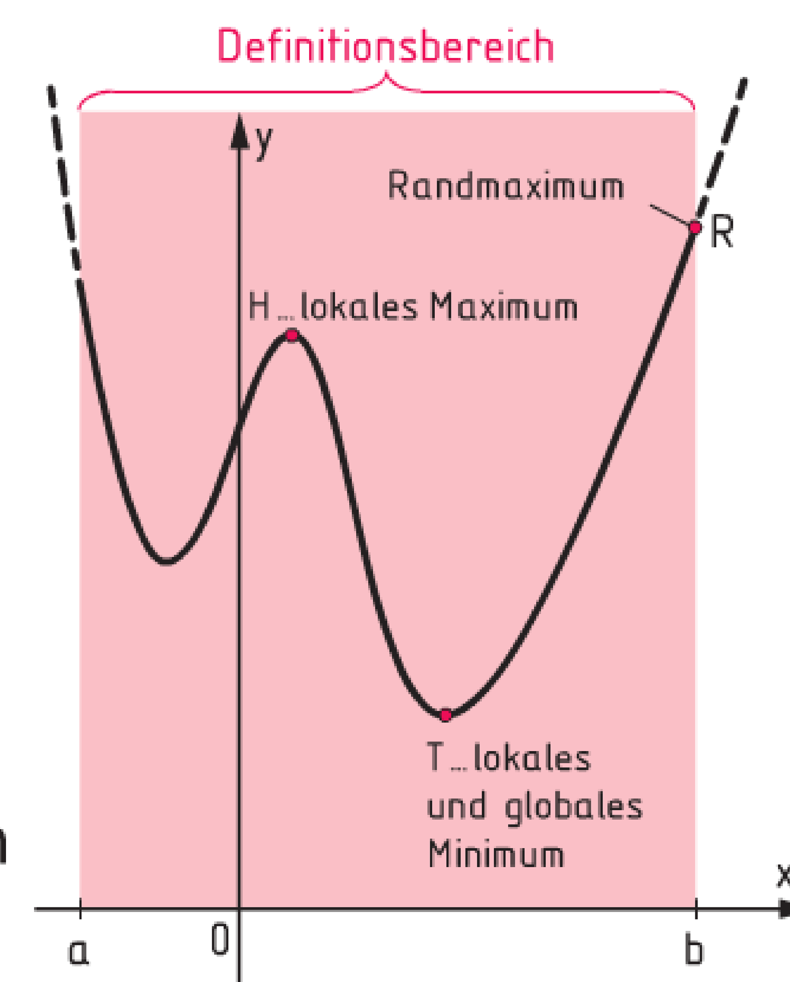
- Der mit $H(x_H|f(x_H))$ bezeichnete Punkt ist der **höchste Punkt** des Funktionsgraphen in seiner Umgebung. Für alle Punkte $P(x|f(x))$ in der unmittelbaren Umgebung von H gilt $f(x) < f(x_H)$. Einen solchen Punkt nennt man **lokales Maximum** oder **Hochpunkt**. Ist die Funktion differenzierbar, liegt im Hochpunkt eine waagrechte Tangente mit der Steigung k = 0 vor und es gilt: $f'(x_H) = 0$



- Der mit $T(x_T|f(x_T))$ bezeichnete Punkt ist der **tiefste Punkt** des Funktionsgraphen in seiner Umgebung. Für alle Punkte $Q(x|f(x))$ in der unmittelbaren Umgebung von T gilt $f(x) > f(x_T)$. Einen solchen Punkt nennt man **lokales Minimum** oder **Tiefpunkt**. Ist die Funktion differenzierbar, liegt im Tiefpunkt eine waagrechte Tangente mit der Steigung k = 0 vor und es gilt: $f'(x_T) = 0$

Damit erhält man für differenzierbare Funktionen ein **notwendiges Kriterium** für das Auftreten eines **lokalen Extrempunkts**. Sucht man das lokale Maximum bzw. Minimum einer Funktion, muss daher die **erste Ableitung gleich null** gesetzt werden. Ist die Funktion nicht an jeder Stelle differenzierbar, müssen Extremwerte gegebenenfalls anders bestimmt werden.

- Ist der Punkt T nicht nur der tiefste Punkt in seiner Umgebung, sondern der tiefste Punkt im gesamten Definitionsbereich, so wird er als **globales Minimum** bezeichnet. Analoges gilt für den höchsten Punkt im gesamten Definitionsbereich. Er wird als **globales Maximum** bezeichnet.



- Ist der Definitionsbereich ein abgeschlossenes Intervall [a; b], so kann ein Extrempunkt auch am Rand des Intervalls liegen. Wird die abgebildete Funktion zum Beispiel auf das farbig markierte Intervall eingeschränkt, so liegt der größte Wert in R. Man spricht in diesem Fall von einem **Randmaximum** bzw. bei einem kleinsten Wert von einem **Randminimum**. An dieser Stelle liegt im Allgemeinen keine waagrechte Tangente vor.

- Häufig werden folgende Bezeichnungen verwendet:
  - **Extremstelle** für die Stelle, an der der Funktionswert maximal bzw. minimal ist. Dieser Wert wird auch **Extremwert** genannt.
  - **Extremum** (Mehrzahl: Extrema) für einen Extrempunkt

Den in seiner Umgebung höchsten Punkt des Graphen einer Funktion f bezeichnet man als **lokales Maximum** oder **Hochpunkt**. Den in seiner Umgebung tiefsten Punkt bezeichnet man als **lokales Minimum** oder **Tiefpunkt**. Hochpunkte und Tiefpunkte sind lokale **Extrempunkte**. Ist die Funktion differenzierbar, verläuft die Tangente in diesen Punkten waagrecht und es gilt:

$$f'(x) = 0$$

Den höchsten bzw. tiefsten Punkt des gesamten Definitionsbereichs nennt man **globalen Extrempunkt**. Liegt der höchste bzw. tiefste Punkt der Funktion am Rand des Definitionsbereichs, wird er als **Randextremum** bezeichnet.

4.2 Die Kosten K für die Herstellung und der Erlös E für den Verkauf eines Produkts lassen sich durch folgende Funktionen beschreiben: **AB**

$K(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}2x^2 + 13{,}33x + 50$; $E(x) = -0{,}16x^2 + 16x$

x … Menge in Mengeneinheiten (ME), K und E in Geldeinheiten (GE)

1) Ermittle, in welchem Bereich Gewinn erzielt wird. Runde auf ganze ME.

2) Berechne, bei wie vielen Mengeneinheiten der Gewinn maximal ist.

Lösung:

1) $G(x) = E(x) - K(x)$ — • Ermitteln der Gewinnfunktion

$G(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}04x^2 + 2{,}67x - 50$

$-0{,}001x^3 + 0{,}04x^2 + 2{,}67x - 50 = 0$ — • Ermittlung der Nullstellen der Gewinnfunktion

$x_1 \approx -44{,}72$ $x_2 \approx 16{,}36$ $x_3 \approx 68{,}36$

Ein Gewinn wird von 17 ME bis 68 ME erzielt.

2) $G(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}04x^2 + 2{,}67x - 50$

$G'(x) = -0{,}003x^2 + 0{,}08x + 2{,}67$ — • Ermitteln der ersten Ableitung

$-0{,}003x^2 + 0{,}08x + 2{,}67 = 0$ — • Berechnung des Extremwerts: $G'(x) = 0$

$(x_1 \approx -19{,}34)$ $x_2 \approx 46{,}01$ — • Der negative Wert ist nicht möglich.

Der maximale Gewinn wird bei 46 ME erzielt.



BC **4.3** Stelle die Funktion $y = f(x)$ im angegebenen Intervall grafisch dar. Lies aus der Zeichnung lokale Extrempunkte bzw. Randextrema ab.

a) $y = e^x$, $[0; 2]$ **b)** $y = 0{,}5 \cdot (x^3 - 6x + 8)$, $[-1{,}5; 6{,}5]$

BC **4.4** Stelle die angegebene Funktion grafisch dar. Gib die lokalen Extrempunkte an und zeige rechnerisch, dass an den Extremstellen $f'(x) = 0$ gilt.

a) $f(x) = (x - 1)^2$ **b)** $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$, $0 \leq x < 2\pi$

BC **4.5** Stelle die Funktion $y = 4x^3 - 3{,}6x + 1$ grafisch dar. Berechne, an welchen Stellen die Steigung $k = 0$ beträgt und zeichne die zugehörigen Punkte ein. Beschreibe den Verlauf des Funktionsgraphen mit eigenen Worten.

BCD **4.6** Zeichne jeweils die Funktionen $f(x) = \frac{x^2}{4}$ und $g(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Vergleiche die Lage der Extremstellen. Erkläre die Veränderung.

1) $g(x) = 2 \cdot f(x)$ **2)** $g(x) = f(x) - 2$ **3)** $g(x) = [f(x)]^2$ **4)** $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

BC **4.7** Der Gewinn G (in Geldeinheiten) einer Firma lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$G(x) = -x^2 + 80x - 100$

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten

1) Ermittle jenen Bereich, in dem die Firma Gewinn erzielt.

2) Berechne, bei wie vielen verkauften Mengeneinheiten die Firma den maximalen Gewinn erzielt und gib diesen an.



C **4.8** Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen, wird seine Höhe h zum Zeitpunkt t durch folgende Funktion beschrieben:

$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$

Ordne den folgenden Gleichungen **1)** – **3)** die richtige(n) Bedeutung(en) **A)** – **D)** zu:

1) $h'(t) = 0$ **2)** $h(0) = h_0$ **3)** $h(t) = 0$

A) Zeitpunkt, zu dem der Körper wieder auf dem Boden aufkommt

B) Zeitpunkt, zu dem der Körper die maximale Höhe erreicht

C) Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit des Körpers null ist

D) Starthöhe

C **4.9** Die Funktion $f = f(x)$ stellt den Gewinn eines Unternehmens im Laufe eines Jahrs dar, mit x ... Monat in Zahlen, z.B. 1 ... Jänner, 2 ... Februar, ...; f ... Gewinn in Millionen Euro. Ordne den Aussagen **1)** – **4)** die Bedeutungen **A)** – **D)** richtig zu:

1) x-Wert des Hochpunkts	**A)** Gewinn im Monat Juni
2) $f'(x) = 2$	**B)** Gewinnzuwachs von 2 Millionen Euro
3) $f(6)$	**C)** größter erzielter Gewinn im Jahr
4) Funktionswert des Hochpunkts	**D)** der Monat mit dem höchsten Gewinn

BC **4.10** Ein Ball wird mit einer Abwurfgeschwindigkeit von $v_0 = 40\ \frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geworfen. Die Höhe h (in m) zum Zeitpunkt t (in s) ist gegeben durch:

$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit $g = 10\ \frac{m}{s^2}$

1) Berechne, nach welcher Zeit der Ball wieder auf dem Boden auftrifft.

2) Gib den Zeitpunkt an, zu dem der Ball seine maximale Höhe erreicht.

3) Zeige, dass die Abwurfgeschwindigkeit gleich der Aufprallgeschwindigkeit ist.

4.11 Die Kosten K für die Herstellung und der Erlös E für den Verkauf eines Produkts lassen sich durch folgende Funktionen beschreiben: ABCD



$K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}3x^2 + 3x + 6,\ \ E(x) = -1{,}5x^2 + 15x$

x … Menge in Mengeneinheiten, K und E in Geldeinheiten

1) Stelle die Kostenfunktion und die Erlösfunktion in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar.

2) Erkläre anhand der Grafik, in welchem Bereich die Firma Gewinn erzielt, wenn der Gewinn G durch G = E – K berechnet werden kann.

3) Bei wie vielen Mengeneinheiten wird der maximale Gewinn erzielt und wie hoch ist dieser?

4.12 Die Geschwindigkeit v (in $\frac{m}{min}$) eines Heißluftballons während einer 90 minütigen Fahrt wird durch folgende Funktion beschrieben: ABCD





$v(t) = -\frac{7}{5\,400}t^3 + \frac{7}{60}t^2$ t … Zeit in Minuten

1) Stelle das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm und das Beschleunigung-Zeit-Diagramm grafisch dar.

2) Gib an, zu welchem Zeitpunkt der Ballon die maximale Geschwindigkeit erreicht hat.

3) Wie hoch ist die Beschleunigung zu dem Zeitpunkt, zu dem der Ballon die maximale Geschwindigkeit erreicht hat?

4.13 Einem Patienten wird zur Behandlung einer Krankheit ein Medikament verabreicht. Die Konzentration des Medikaments im Blut (in $\frac{mg}{dL}$) in Abhängigkeit von der Zeit t (Zeit nach der Verabreichung in Stunden) lässt sich durch folgende Funktion beschreiben: AB



$y(t) = 15\,\frac{mg}{dL} \cdot \left(e^{-0{,}2 \cdot \frac{t}{h}} - e^{-0{,}8 \cdot \frac{t}{h}}\right)$ mit $t \geqslant 0$ h y … Menge des Medikaments im Blut in $\frac{mg}{dL}$

1) Berechne, nach welcher Zeit ab der Verabreichung des Medikaments die Konzentration im Blut maximal ist.

2) Gib an, nach welcher Zeit die Konzentration auf 3 $\frac{mg}{dL}$ gesunken ist.

4.14 Ein Federpendel wird zum Schwingen angeregt. Die Auslenkung des Pendels wird durch folgende Funktion beschrieben: ABC



$y(t) = 5\text{ cm} \cdot e^{-0{,}4s^{-1} \cdot t} \cdot \sin(2s^{-1} \cdot t)$ t … Zeit in Sekunden, y … Auslenkung in cm

1) Stelle die Funktion im Intervall [0 s; 6 s] grafisch dar.

2) Lies aus dem Graphen ab, zu welchen Zeitpunkten die Auslenkung in diesem Intervall lokale Maxima bzw. Minima hat. Gib das globale Maximum an.

3) Gib an, wie groß die Geschwindigkeiten an den lokalen Maxima sind.

4.15 Ein Golfball wird auf einer waagrechten Ebene unter einem Winkel von 45° mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 30\ \frac{m}{s}$ abgeschlagen. Die Flugbahn des Balls lässt sich durch die Funktion y beschreiben: ABC

$y(x) = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}$

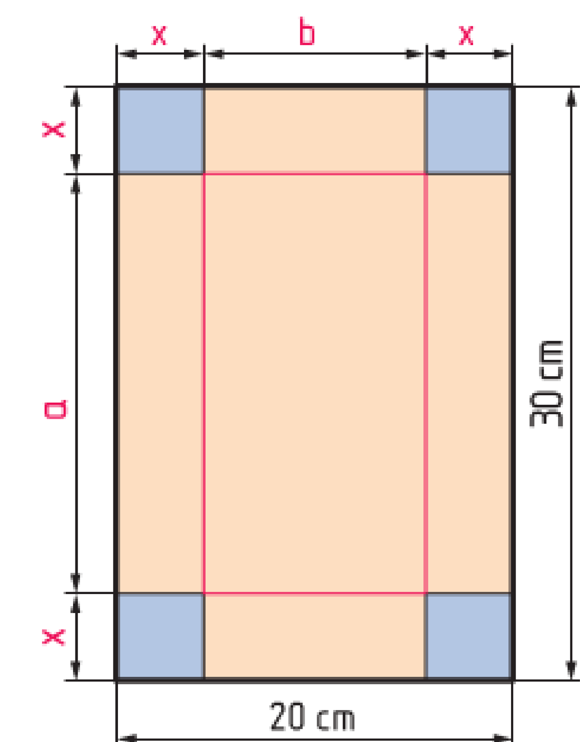
x … waagrechte Entfernung in Meter, y … Höhe in Meter, $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$, α … Abschlagwinkel

1) Gib den Winkel an, unter dem der Ball auf dem Boden auftrifft und vergleiche diesen mit dem Abschlagwinkel.

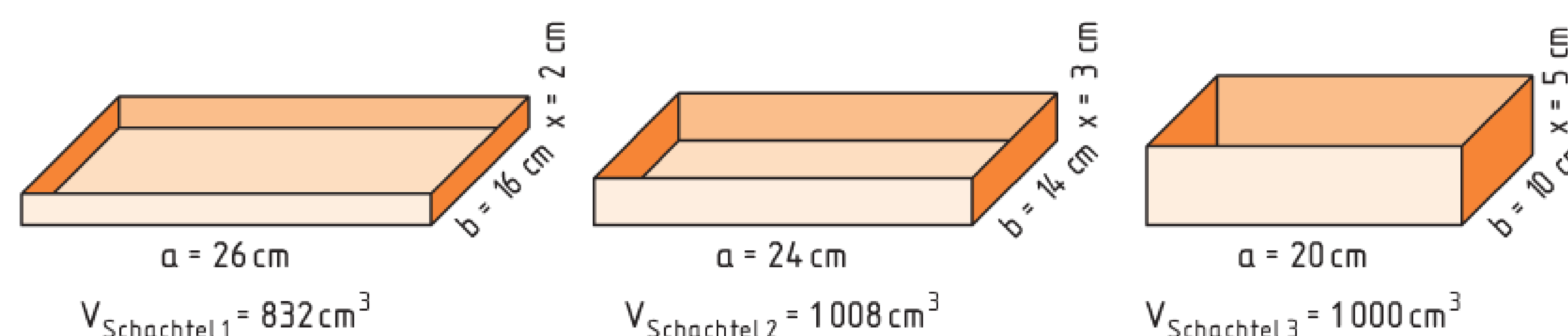
2) In welcher waagrechten Entfernung vom Abschlag erreicht der Ball seine maximale Höhe?

4.1.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Bisher wurden Extremwerte von Funktionen in einer Variablen berechnet. Bei den meisten Extremwertaufgaben handelt es sich jedoch um Aufgaben, in denen eine Größe, die von mehreren Variablen abhängt, wie zum Beispiel ein Volumen oder eine Oberfläche, maximal oder minimal werden soll. Um die gesuchte Größe als Funktion in einer Variablen angeben zu können, müssen zusätzliche Bedingungen angegeben werden, die **Nebenbedingungen** genannt werden.

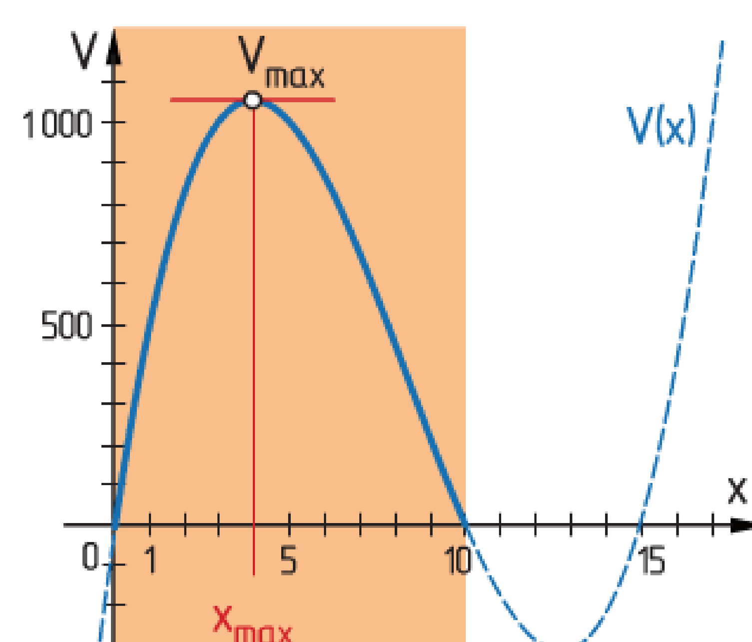


ZB: Aus einem rechteckigen Stück Karton mit der Größe 20 cm x 30 cm soll eine oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu schneidet man an den Ecken Quadrate aus und faltet die Seitenwände nach oben.
Wählt man für die Seitenlängen der weggeschnittenen Quadrate zum Beispiel x = 2 cm, x = 3 cm und x = 5 cm, so erhält man drei unterschiedliche Schachteln mit unterschiedlichen Volumen:



Die Größe des Volumens hängt also von der Seitenlänge x der herausgeschnittenen Quadrate ab. Es soll nun jener Wert für x ermittelt werden, der auf das größtmögliche Volumen führt.

V_{Quader} = Länge · Breite · Höhe = $a \cdot b \cdot x$	● Volumenformel für den Quader
Länge: $a = 30\text{ cm} - 2x$ Breite: $b = 20\text{ cm} - 2x$	● Die Zusammenhänge (Nebenbedingungen) werden aus der Skizze abgelesen.
Höhe: x mit $0\text{ cm} < x < 10\text{ cm}$	● Da der Karton 20 cm breit ist, muss die Länge x kleiner als 10 cm sein.
$V(x) = (30 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x$	● Nun kann das Volumen als Funktion von x angegeben werden.
$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$	● Vereinfachen der Funktion



Aus dem Funktionsverlauf erkennt man: Die Funktion hat im Definitionsbereich]0; 10[an der Stelle x_{max} ein Maximum. Das bedeutet, dass das Volumen der Schachtel am größten ist, wenn Quadrate der Seitenlänge x_{max} ausgeschnitten werden.

Um das Maximum rechnerisch zu ermitteln, wird die erste Ableitung gebildet und null gesetzt.

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 200x + 600$$

$$12x^2 - 200x + 600 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 3{,}9\text{ cm}; \ (x_2 \approx 12{,}7\text{ cm} > 10\text{ cm})$$

Man erhält das maximale Volumen $V \approx 1\,056{,}31\text{ cm}^3$, wenn die ausgeschnittenen Quadrate eine Seitenlänge von rund 3,9 cm haben.

Extremwertaufgaben sind Optimierungsaufgaben, bei denen der größtmögliche bzw. kleinstmögliche Wert einer Größe ermittelt wird. Es kann sich dabei um einen **Hochpunkt** bzw. einen **Tiefpunkt** oder ein **Randextremum** der Funktion, die diese Größe beschreibt, handeln. Die Funktion, die ein Maximum oder Minimum annehmen soll, wird **Hauptbedingung** (=**Zielfunktion**) genannt. Zusammenhänge, die das Aufstellen der Zielfunktion in einer Variablen ermöglichen, werden **Nebenbedingungen** genannt.

Im Folgenden werden die rechnerischen Schritte zur Lösung einer Extremwertaufgabe anhand eines Beispiels erläutert.

ZB: Die Zahl 100 soll so in zwei positive Summanden zerlegt werden, dass deren Produkt möglichst groß wird.

x, y ... Summanden

Zielfunktion (ZF):

$P(x, y) = x \cdot y \rightarrow$ Maximum

- Durch Angeben einer Formel für die Größe, die maximal oder minimal werden soll, erhält man die **Zielfunktion** (ZF), auch **Hauptbedingung** (HB) genannt.

Nebenbedingung (NB):
$x + y = 100$
$\Rightarrow y = 100 - x$

- Die Zielfunktion ist hier eine Funktion in zwei Variablen.
  Nun muss mithilfe sachlicher bzw. mathematischer Zusammenhänge eine Gleichung formuliert werden, die es ermöglicht, die **Zielfunktion als Funktion in nur einer Variablen** anzugeben. Diese Gleichung nennt man **Nebenbedingung** (NB).

$P(x) = x \cdot (100 - x)$

- Durch Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung erhält man die Zielfunktion in Abhängigkeit von einer Variablen.

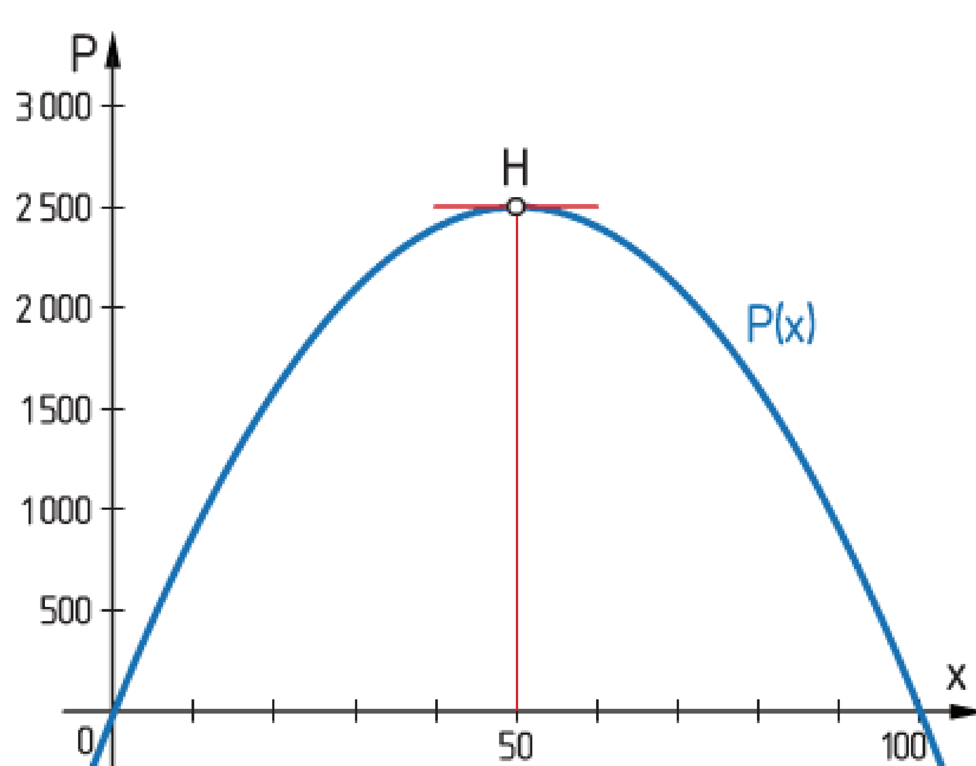
Definitionsbereich: $0 \leqslant x \leqslant 100$
$P(x) = 100x - x^2$

- Der Definitionsbereich muss festgelegt werden.
- Die Zielfunktion wird in möglichst einfacher Form angegeben.

$\frac{dP}{dx} = 100 - 2x$

$100 - 2x = 0$
$\Rightarrow x = 50; \quad y = 100 - x = 50$

- Im Maximum der Funktion hat deren erste Ableitung den Wert null. Man ermittelt also jene Werte der Funktion P, für die gilt: $\frac{dP}{dx} = 0$



- Stellt man die Zielfunktion grafisch dar, so sieht man, dass das Maximum der Funktion P im angegebenen Definitionsbereich bei 50 liegt.

Das Produkt der Summanden ist am größten, wenn jeder Summand den Wert 50 hat.

Bemerkungen:

- Bei Ermittlung der Extremstellen sind folgende Vereinfachungen der Zielfunktion möglich, da sie die Lage der Extremstellen nicht verändern (siehe Aufgabe 4.6):
  – Konstante Faktoren können weggelassen werden.
  – Die Zielfunktion darf quadriert werden.
- Bei der Beschreibung der Realität durch mathematische Modelle werden in den meisten Fällen Vereinfachungen vorgenommen, damit der Rechenaufwand bewältigt werden kann.
- Beachte, dass die Zielfunktion das vorliegende Problem im Allgemeinen nur in einem gewissen Bereich beschreibt. Die Angabe eines sinnvollen Definitionsbereichs ist daher nötig.

Grundaufgaben und Aufgaben aus der Geometrie

Viele Extremwertaufgaben lassen sich mithilfe von geometrischen Kenntnissen, wie zum Beispiel dem Satz des Pythagoras, dem Strahlensatz oder der Kenntnis von Kurvengleichungen lösen.

ABD **4.16** Ein Getränk soll in zylinderförmigen Dosen mit einer Füllmenge von 0,75 Liter angeboten werden. Aus produktionstechnischen Gründen ist ein Leerraum von 50 cm^3 vorzusehen. Ermittle, bei welchen Abmessungen der Materialverbrauch für eine Dose am geringsten ist. Erkläre, wie Radius und Höhe zusammenhängen und um welchen besonderen Zylinder es sich dabei handelt.

Lösung:

Zylinder mit Radius r und Höhe h

- Festlegen der Bezeichnungen

Zielfunktion:
Der Materialverbrauch soll minimal werden, das bedeutet, dass die Oberfläche ein Minimum sein muss.

- Zielgröße angeben

$O(r, h) = 2r^2\pi + 2r\pi h \rightarrow$ Minimum

- Zielfunktion als Formel angeben

Nebenbedingung:
$V_{ges} = 750\ cm^3 + 50\ cm^3 = 800\ cm^3$

- Nebenbedingung mathematisch formulieren

$V_{ges} = r^2\pi h \Rightarrow 800 = r^2\pi h \Rightarrow h = \frac{800}{r^2\pi}$

- Ausdrücken einer Variablen

$O(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{800}{r^2\pi}$ mit $r > 0$ cm

- Angabe der Zielfunktion in einer Variablen

$O(r) = 2 \cdot \left(r^2\pi + \frac{800}{r}\right) \Rightarrow$

$\overline{O}(r) = r^2\pi + \frac{800}{r}$

- Herausheben des konstanten Faktors 2; durch Weglassen dieses Faktors erhält man eine vereinfachte Ersatzfunktion $\overline{O}$.

$\frac{d\overline{O}}{dr} = 2r\pi - \frac{800}{r^2}$

- Differenzieren der Ersatzfunktion

$2r\pi - \frac{800}{r^2} = 0 \Rightarrow 2r^3\pi = 800$

- Null setzen der ersten Ableitung und Lösen der Gleichung

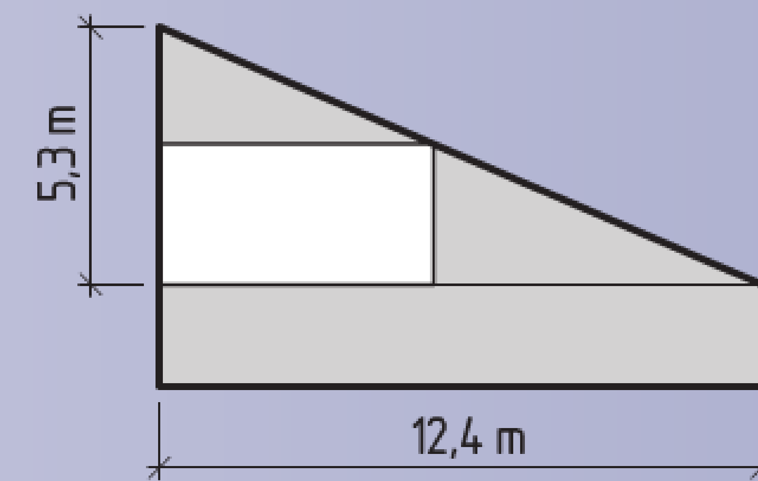
$r = 5{,}03...\ cm \approx 5\ cm$;

$h = \frac{800\ cm^3}{r^2\pi} = 10{,}06...\ cm \approx 10\ cm$

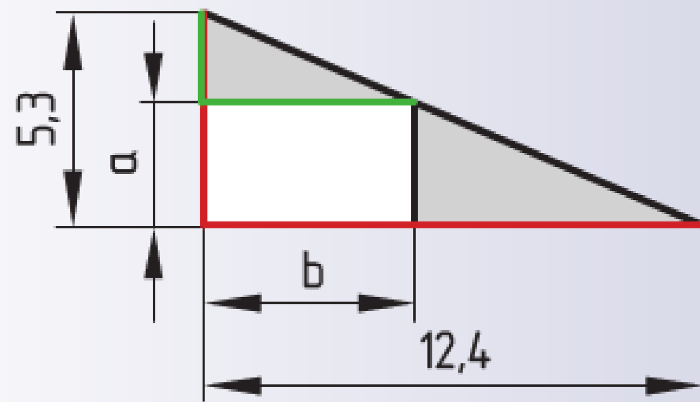
Bei einem Radius von r = 5 cm und einer Höhe von h = 10 cm ist der Materialverbrauch am geringsten. Die Höhe entspricht dem Durchmesser. Es handelt sich also um einen gleichseitigen Zylinder.

4.17 Aus der in der Abbildung dargestellten Hausmauer soll ein rechteckiges Fenster ausgebrochen werden. Welche maximale Fensterfläche kann erzielt werden?

AB



Lösung:



Zielfunktion:
$A(a, b) = a \cdot b \to$ Maximum
Nebenbedingung:
$5,3 : 12,4 = (5,3 - a) : b$
$5,3 \cdot b = 12,4 \cdot (5,3 - a)$
$b = \frac{12,4 \cdot (5,3 - a)}{5,3}$

● Anwenden des Strahlensatzes

$A(a) = a \cdot \frac{12,4 \cdot (5,3 - a)}{5,3} = \frac{12,4}{5,3} \cdot (5,3 \cdot a - a^2)$ mit $0 < a < 5,3$

● Der konstante Faktor kann weggelassen werden.

$\bar{A}(a) = 5,3a - a^2$

$\frac{d\bar{A}}{da} = 5,3 - 2a$

$5,3 - 2a = 0$

$a = 2,65$ m, $b = 6,2$ m

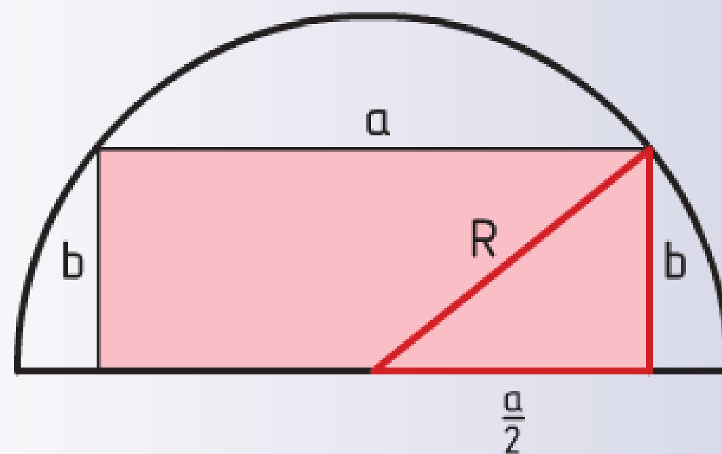
$A = 2,65 \text{ m} \cdot 6,2 \text{ m} = 16,43 \text{ m}^2$

Es kann eine maximal Fensterfläche von $16,43 \text{ m}^2$ erzielt werden.

4.18 Ein halbkreisförmiges Fenster einer Auslage mit dem Radius R soll mit einem rechteckigen Plakat beklebt werden. Bei welchem Seitenverhältnis ist dessen Flächeninhalt am größten?

ABC

Lösung:



Zielfunktion: $A(a, b) = a \cdot b \to$ Maximum

Nebenbedingung: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = R^2 \Rightarrow b = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$

$A(a) = a \cdot \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2R^2 - \frac{a^4}{4}}$ mit $0 < a < 2R$

$\bar{A}(a) = a^2R^2 - \frac{a^4}{4}$

● Zielfunktion durch Quadrieren vereinfachen

$\frac{d\bar{A}}{da} = 2a \cdot R^2 - a^3$

$2a \cdot R^2 - a^3 = 0 \Rightarrow$

$a_1 = 0, a_2 = R \cdot \sqrt{2}, a_3 = -R \cdot \sqrt{2}$

$\Rightarrow a = R \cdot \sqrt{2}$

● Da $0 < a < 2R$ gelten muss, kommt nur a_2 als Lösung in Frage.

$b = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

$a : b = R\sqrt{2} : \frac{R\sqrt{2}}{2} = 2 : 1$

Das Plakat hat den größten Flächeninhalt, wenn sich seine Seitenlängen wie 2 : 1 verhalten.

4.19 Zerlege die Zahl 40 so in zwei natürliche Summanden, dass die Summe ihrer Quadrate minimal wird.

AB

4.20 Zerlege die reelle Zahl z so in zwei Faktoren, dass deren Summe ein Minimum wird.

AB

Anwendungen der Differentialrechnung

ABC **4.21** Aus einem 40 cm langen Drahtstück soll ein Rechteck gebogen werden.

1) Gib jeweils die Länge der Seite b und den Flächeninhalt A des entstehenden Rechtecks an, wenn für die Seitenlänge $\ell_1 = 2$ cm, $\ell_2 = 4$ cm bzw. $\ell_3 = 6$ cm gewählt wird.

2) Gib eine Formel an, die den Flächeninhalt A als Funktion der Seitenlänge ℓ angibt. Wähle einen sinnvollen Definitionsbereich für die Variable ℓ und stelle die Funktion $A(\ell)$ grafisch dar. Ermittle, für welchen Wert von ℓ die Funktion $A(\ell)$ ihren größten Wert annimmt.

D **4.22** Thomas möchte mit einem 6 m langen Rollzaun ein rechteckiges Blumenbeet mit einem möglichst großen Flächeninhalt einfassen.

1) Argumentiere, welcher der folgenden Ansätze diesen Sachverhalt beschreibt und begründe, warum die anderen nicht zutreffen.

A) ZF: $u(x, y) = 2x + 2y$ soll ein Maximum werden; NB: $6 = 2x + 2y$

B) ZF: $A(x, y) = x \cdot y$ soll ein Maximum werden; NB: $6 = 2x + 2y$

C) ZF: $A(x, y) = x \cdot y$ soll ein Maximum werden; NB: $u(x, y) = 2x + 2y$

D) ZF: $u(x, y) = 2x + 2y$ soll ein Maximum werden; NB: $u = 6$

2) Gib an, welche der Funktionen eine geeignete Zielfunktion zur Ermittlung des gesuchten Maximums darstellt. Begründe deine Antwort.

A) $A(y) = 2y - 6y^2$ ***B)*** $A(y) = 3y - y^2$ ***C)*** $A(y) = (6 - y) \cdot y$ ***D)*** $A(x) = 6x - x^2$

ABC **4.23** Ein rechteckiges Plakat soll eine bedruckbare Fläche von 1,5 m^2 haben. Aus drucktechnischen Gründen muss oben und unten jeweils ein Rand von 3 cm unbedruckt bleiben, ebenso links und rechts ein Rand von jeweils 2 cm.

1) Berechne, bei welchen Maßen des Plakats der Papierverbrauch am geringsten ist.

2) Zeige anhand einer Grafik, dass das berechnete Extremum ein Minimum ist.

3) Wähle zwei beliebige andere Plakatgrößen, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen und zeige, dass der Papierverbrauch größer als der aus ***1)*** ist.

ABC **4.24** Aus einem A4- und einem A3-Blatt soll jeweils eine oben offene Schachtel durch Herausschneiden von Quadraten der Länge x an den Ecken und anschließendem Nachobenfalten der Seitenwände hergestellt werden.

1) Ermittle die Länge x jeweils so, dass das Volumen der entstehenden Schachtel maximal wird.

2) Gib an, in welchem Verhältnis die beiden maximalen Volumen stehen.

3) Wie verändert sich das Volumen der kleineren Schachtel, wenn ***A)*** die längere Seite des Blatts verdoppelt wird, ***B)*** die kürzere Seite des Blatts verdoppelt wird oder ***C)*** beide Seiten des Blatts verdoppelt werden?

AB **4.25** Ein Gebrauchtwagenhändler will einen rechteckigen Parkplatz mit Maschendrahtzaun einzäunen. Berechne, bei welchen Abmessungen der Flächeninhalt maximal wird, wenn 60 Laufmeter Maschendrahtzaun zur Verfügung stehen und der Parkplatz

a) an zwei Seiten von Mauern begrenzt ist. **b)** an eine Mauer angrenzt.





ABC **4.26** Eine 25 cm hohe quaderförmige Holzkiste ***a)*** mit Deckel ***b)*** ohne Deckel soll ein Volumen von 0,5 m^3 haben.



1) Ermittle, bei welchen Abmessungen der Materialverbrauch am geringsten ist.

2) Zeige anhand einer Grafik, dass das berechnete Extremum ein Minimum ist.

Anwendungen der Differentialrechnung

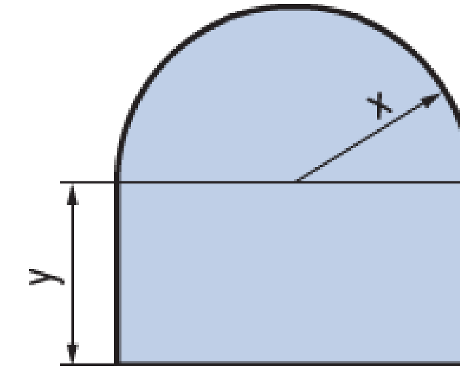
4.27 Aus einem 144 cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche zusammengesetzt werden. ABC

1) Wie sind die Abmessungen des Quaders zu wählen, damit sein Volumen möglichst groß wird? Berechne das Volumen.

2) Wähle einige beliebige, aber passende Abmessungen für den Quader. Berechne jeweils das Volumen und vergleiche die Ergebnisse mit dem aus ***1)***.

4.28 Der Querschnitt eines Abwasserkanals soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben. AB

Wie müssen die Abmessungen des Kanals gewählt werden, damit die Fläche maximal wird, wenn ein Gesamtumfang von 12 m zugelassen ist?

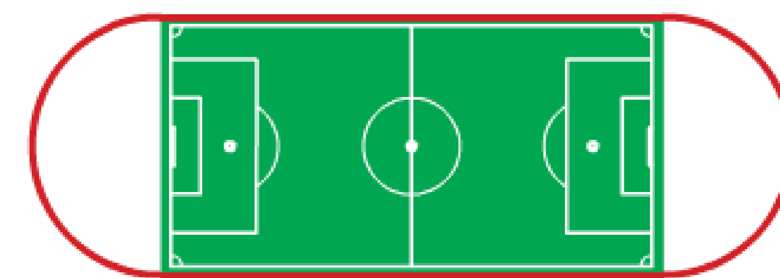


4.29 Ein acht Meter langes Stück Draht soll in zwei Teile geteilt werden. Aus einem Teil wird ein Quadrat gebogen, aus dem anderen ein gleichseitiges Dreieck. ABD

1) Berechne, wie lang die Teilstücke sein müssen, damit die Summe der Flächeninhalte von Quadrat und Dreieck ein Extremum wird.

2) Argumentiere, ob es sich dabei um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

4.30 Ein Fußballfeld muss laut offiziellem Regelwerk eine Länge zwischen 90 m und 120 m und eine Breite zwischen 45 m und 90 m aufweisen. Rund um den Sportplatz des FC Wald soll eine Laufbahn mit einer Innenbahnlänge von 500 m angelegt werden. Sie soll direkt an den Seitenlinien des Fußballfelds anliegen und an den beiden Torlinien jeweils die Form eines Halbkreises annehmen. AB



Ermittle, bei welchen Abmessungen das Fußballfeld den größtmöglichen Flächeninhalt hat, ***1)*** wenn eine Seitenlänge beliebig gewählt wird, ***2)*** wenn die angegebenen Regeln beachtet werden.

4.31 Ein Bauer hat nachts in seinem Weizenfeld einen Kornkreis abgemäht. Der Kreis hat einen Radius von 50 m. Im Inneren hat er den Weizen auf einer möglichst großen Fläche in Form eines gleichschenkligen Dreiecks nicht abgemäht. Um welchen Betrag hätte er den abgemähten Weizen verkaufen können, wenn der Ertrag 80 $\frac{\text{kg}}{\text{Ar}}$ beträgt und eine Tonne um 175,00 € verkauft werden kann? AB



4.32 Aus einer Kugel mit dem Radius R soll ein möglichst großer gerader Kreiszylinder ausgesägt werden. Gib an, wie viel Prozent des Materials der Kugel dadurch wegfallen. AB

4.33 Eine neue Käsekreation soll auf einer Messe in Käseglocken präsentiert werden, die die Form einer Halbkugel mit einem Durchmesser von 20 cm haben. Der Käselaib soll in einer annähernd zylindrischen Form produziert werden. Damit der Käse an der Käseglocke nicht anstößt, soll zwischen dem Käse und der Glocke ein Freiraum von 1 cm bleiben. Welchen Durchmesser und welche Höhe muss der Käselaib haben, damit ein möglichst großes Stück untergebracht werden kann? AB



4.34 Ein Getreidesilo aus Aluminium soll die Form eines unten geschlossenen Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel haben und 45 m^3 Getreide fassen. ABC

Gib an, in welchem Verhältnis Radius und Höhe stehen müssen, wenn der Materialverbrauch an Aluminium möglichst gering sein soll.

ABC **4.35** Eine Geschenkverpackung für Bonbons aus Kunststoff soll die Form eines Zylinders mit zwei aufgesetzten Halbkugeln haben. Ermittle, bei welchen Abmessungen der Materialverbrauch für die Verpackung am geringsten ist, wenn die Verpackung ein Volumen von $V = 480\ cm^3$ haben soll. Interpretiere das Ergebnis.



ABD **4.36** Eine zylinderförmige Dose soll ein Volumen von $75\ cm^3$ fassen.

1) Das Material für Boden und Deckel kostet pro cm^2 um 25 % mehr als jenes für den Mantel. Ermittle, bei welchen Abmessungen der Dose die Materialkosten am geringsten sind.

2) Argumentiere, ob sich die Kosten verdoppeln, wenn die Abmessungen aus ***1)*** verdoppelt werden.

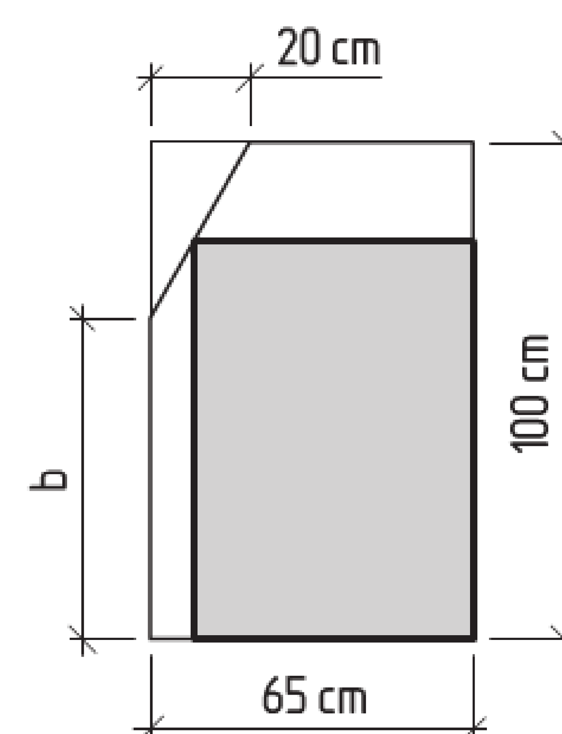
ABC **4.37** Zwei Baumeister eines Pharaos stritten um die Abmessungen einer geraden quadratischen Pyramide. Aufgrund des zur Verfügung stehenden Materials für die Verkleidung durfte die Mantelfläche maximal $85\,000\ m^2$ betragen.



1) Wie wurden die Abmessungen gewählt, um den größten Rauminhalt zu erzielen?

2) Recherchiere die Abmessungen der Pyramiden von Gizeh und vergleiche diese mit den in ***1)*** ermittelten Abmessungen.

ABC **4.38** Beim Zuschneiden einer Granitplatte ist eine Ecke abgebrochen. Aus dem verbleibenden Stück soll eine rechteckige Platte mit möglichst großem Flächeninhalt ausgeschnitten werden.

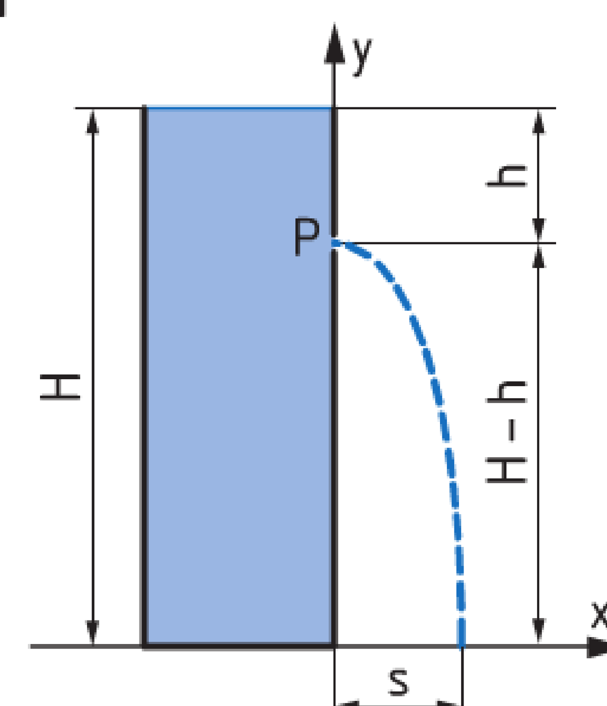


1) Gib an, wie groß die maximale Fläche der verbleibenden rechteckigen Platte ist, wenn b = 62 cm ist.

2) Wie verändert sich die Fläche, wenn $b_1 = 19$ cm bzw. $b_2 = 41$ cm gewählt wird?

3) Für welche Werte von b erhält man ein Randextremum? Wie muss die Platte dann zugeschnitten werden, damit die verbleibende rechteckige Platte möglichst groß ist?

ABC **4.39** Ein zylinderförmiges Gefäß der Höhe H wird fortlaufend mit Wasser befüllt, sodass der Wasserstand immer gleich bleibt. Gleichzeitig fließt durch eine kleine Öffnung am Rand Wasser ab. Die Geschwindigkeit v des durch die Öffnung P waagrecht strömenden Wasserstrahls lässt sich durch das Gesetz von Evangelista Torricelli (italienischer Physiker und Mathematiker, 1608 – 1647) mithilfe folgender Formel beschreiben:



$v_0(h) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ mit $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

Ermittle, in welcher Höhe des Gefäßes die Öffnung P angebracht werden muss, damit der seitlich austretende Wasserstrahl in maximaler Weite s auf den Boden auftrifft.
Hinweis: Die Form des Wasserstrahls entspricht der eines waagrechten Wurfs:

$y(x) = H - h - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2}$

ABC

TE

4.40 Auf einer Wüstensafari hat der Jeep einer Reisegruppe eine Panne in R. Der Standort E eines Ersatzfahrzeugs liegt mitten in der Wüste, 65 km von R entfernt. Der direkte Weg führt durch Wüstensand. Das Fahrzeug kommt dort mit einer mittleren Geschwindigkeit von 40 $\frac{km}{h}$ voran. In 25 km Entfernung vom Standort E gibt es eine gerade Straße zum Ziel, auf der der Ersatzwagen eine mittlere Geschwindigkeit von 60 $\frac{km}{h}$ erreicht.

1) Vergleiche, welche Zeiten für den Weg zur Gruppe benötigt werden, wenn ***A)*** der direkte Weg von E nach R genommen wird, ***B)*** der Weg von E über N nach R führt oder ***C)*** der Weg von E über die halbe Strecke NR nach R führt.

2) Ermittle, auf welchem Weg der Ersatzwagen die Gruppe in der kürzesten Zeit erreicht.

3) Welcher Weg wäre der schnellste, wenn die mittlere Geschwindigkeit auf der Straße wegen eines Wüstensturms nur 43 $\frac{km}{h}$ betragen kann?

Lösung:

1)



A) $t = \frac{65\text{ km}}{40\ \frac{km}{h}} = 1{,}625\text{ h}$ • direkter Weg von E nach R

$s = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v}$

B) $\overline{NR} = \sqrt{65^2 - 25^2}\text{ km} = 60\text{ km}$ • Weg von E über N nach R

$t = \frac{25\text{ km}}{40\ \frac{km}{h}} + \frac{60\text{ km}}{60\ \frac{km}{h}} = 1{,}625\text{ h}$

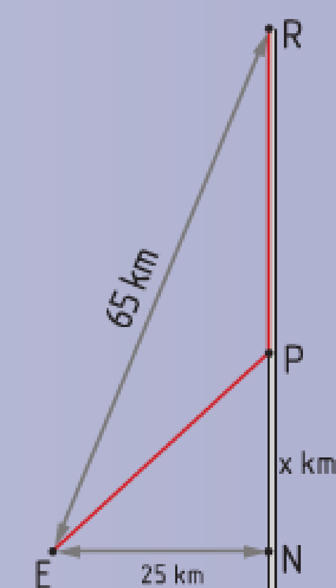
C) $y = \sqrt{25^2 + 30^2}\text{ km} = 39{,}05\text{ km}$ • Weg y über Halbierungspunkt H von NR

$t = \frac{39{,}05\text{ km}}{40\ \frac{km}{h}} + \frac{30\text{ km}}{60\ \frac{km}{h}} \approx 1{,}48\text{ h}$

Die kürzeste Fahrzeit entsteht, wenn man im Halbierungspunkt H auf die Straße auffährt.

2) Zielfunktion: $t = t_1 + t_2 \to$ Minimum

t_1 … Fahrzeit für die Strecke EP, t_2 … Fahrzeit für die Strecke PR



Nebenbedingung: $\overline{EP} = \sqrt{25^2 + x^2}\text{ km} \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{25^2 + x^2}\text{ km}}{40\ \frac{km}{h}} = \frac{\sqrt{25^2 + x^2}}{40}\text{ h}$

$\overline{PR} = (60 - x)\text{ km} \Rightarrow t_2 = \frac{(60 - x)\text{ km}}{60\ \frac{km}{h}} = \frac{(60 - x)}{60}\text{ h}$

$t(x) = \frac{\sqrt{25^2 + x^2}}{40} + \frac{(60 - x)}{60}$ mit $0 \leqslant x \leqslant 60$

• Bei der Berechnung werden die Einheiten weggelassen

1.1 1.2 *Nicht gespeicherte

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{25^2+x^2}}{40}+\frac{60-x}{60}\right)=0,x\right)$

x=22.3607

• Ableiten der Zielfunktion mit $\frac{d}{dx}$ und Berechnen des Extremwerts mit **solve(**.

$\overline{NR} - x \approx 37{,}64\text{ km}$

Der Ersatzwagen ist am schnellsten, wenn er rund 37,64 km von der Reisegruppe entfernt auf die Straße auffährt.

3) $t(x) = \frac{\sqrt{25^2 + x^2}}{40} + \frac{(60 - x)}{43}$

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{25^2+x^2}}{40}+\frac{60-x}{43}\right)=0,x\right)$

x=63.3724

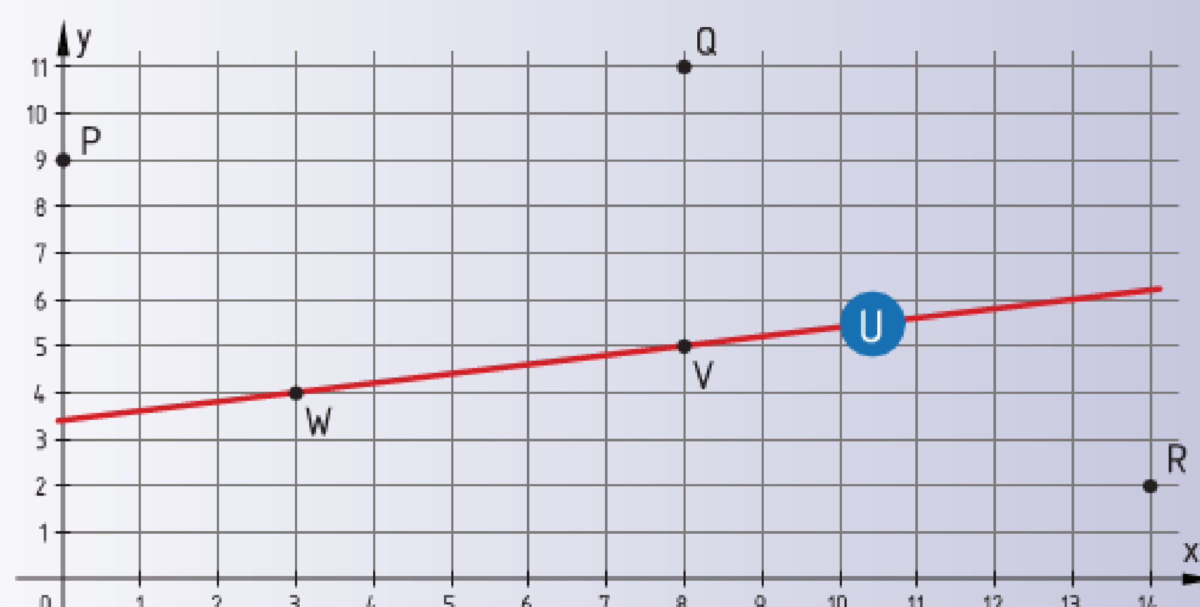
$x = 63{,}37\ldots\text{ km} > 60\text{ km}$

Der direkte Weg ist in diesem Fall am schnellsten. Die Lösung ist ein Randminimum.

ABC TE

4.41 Im Einzugsgebiet einer Großstadt liegen die Orte P, Q und R mit den Koordinaten P(0|9), Q(8|11) und R(14|2). An der geradlinig durch die Orte W(3|4) und V(8|5) verlaufenden U-Bahnlinie wird eine neue Haltestelle errichtet. Sie soll so liegen, dass die Summe der Anfahrtswege der Pendler möglichst gering ist. Wo ist die Station zu errichten, wenn aus P 35, aus Q 70 und aus R 80 Fahrgäste zu berücksichtigen sind?

Lösung mit TI-Nspire:



- Skizze

  U ... geplante Haltestelle

Zielfunktion:
$s = 35 \cdot \overline{PU} + 70 \cdot \overline{QU} + 80 \cdot \overline{RU} \quad \rightarrow \quad$ Minimum

- Zurückgelegte Gesamtstrecke: Die Abstände der Orte werden mit der Anzahl der Pendler multipliziert.

Nebenbedingung:
U liegt auf der Geraden g[W, V]
Gleichung der Geraden durch die Punkte W und V:

1.1 *Nicht gespeicherte

$\frac{5-4}{8-3}=\frac{5-y}{8-x}$ $\qquad \frac{1}{5}=\frac{y-5}{x-8}$

$\text{solve}\left(\frac{1}{5}=\frac{y-5}{x-8},y\right)$ $\qquad y=\frac{x}{5}+\frac{17}{5}$

- Geradengleichung: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y}{x_2 - x}$
- y explizit ausdrücken

Berechnung der Länge der Strecken $\overline{PU}$, $\overline{QU}$ und $\overline{RU}$:

1.1 *Nicht gespeicherte

$\sqrt{(xu-0)^2+(yu-9)^2}\,|yu=\frac{xu}{5}+\frac{17}{5} \rightarrow p(xu)$ *Fertig*

$\sqrt{(xu-8)^2+(yu-11)^2}\,|yu=\frac{xu}{5}+\frac{17}{5} \rightarrow q(xu)$ *Fertig*

$\sqrt{(xu-14)^2+(yu-2)^2}\,|yu=\frac{xu}{5}+\frac{17}{5} \rightarrow r(xu)$

- Der Abstand wird jeweils mithilfe des Satzes von Pythagoras ermittelt, dabei wird yu aus der Geradengleichung ausgedrückt und eingesetzt.

$35\cdot p(xu)+70\cdot q(xu)+80\cdot r(xu) \rightarrow s(xu)$ *Fertig*

- Zielfunktion s(xu)

$\text{nSolve}\left(\frac{d}{dxu}(s(xu))=0,xu\right)$ $\qquad 10.4177$

- Extremwert berechnen: Lösen der Gleichung zB mit **nsolve(**, da die Gleichung numerisch schneller lösbar ist.

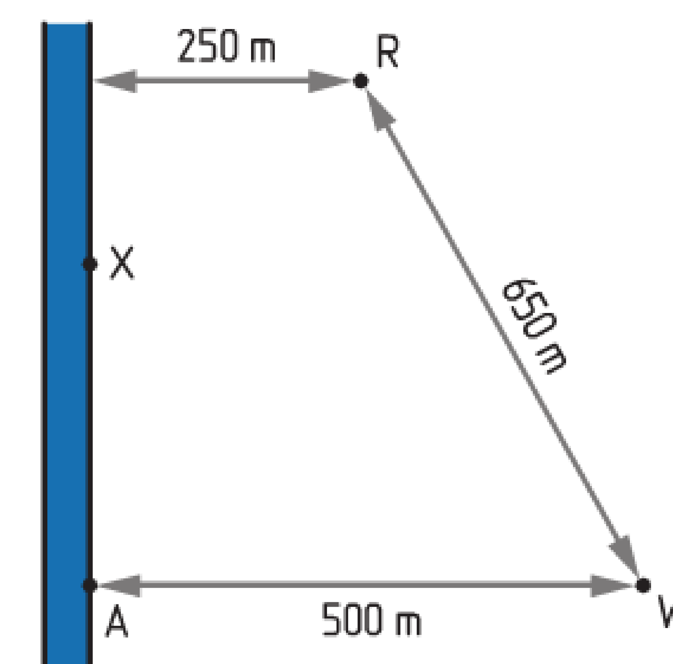
$yu=\frac{xu}{5}+\frac{17}{5}\,|xu=10.4177$ $\qquad yu=5.48354$

Die Haltestelle sollte im Punkt U(10,42|5,48) errichtet werden.

Bemerkung: Numerisches Lösen einer Gleichung bedeutet, dass die Gleichung nicht durch Umformen gelöst wird, sondern nur näherungsweise.

Anwendungen der Differentialrechnung

4.42 Die Fabriken R und W sind 650 m voneinander entfernt (siehe Abbildung). Ihre Abstände vom Ufer eines geradlinigen Kanals betragen 250 m bzw. 500 m. Am Ufer des Kanals soll eine gemeinsame Kläranlage X errichtet werden. ABC



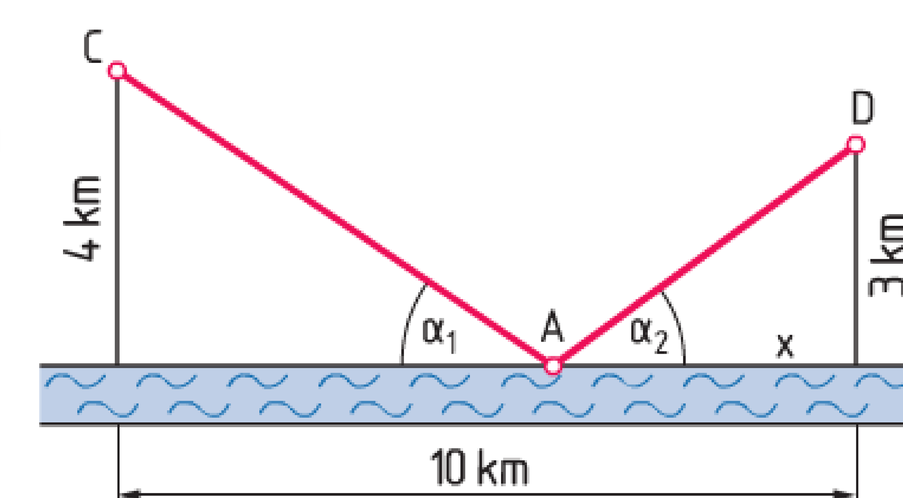
1) In welcher Entfernung von A muss die Kläranlage errichtet werden, damit die Gesamtlänge der von den Fabriken zur Kläranlage führenden Abwasserkanäle möglichst gering wird?

2) Ingenieur Schmalhand behauptet, die gleiche Lösung für X zu erhalten, indem er zunächst den Punkt R am geradlinigen Kanal spiegelt und mit W verbindet. Der Schnittpunkt der Verbindungslinie mit dem Kanal ist der gesuchte Punkt X. Überprüfe, ohne zu rechnen, ob er Recht hat.

4.43 Zwei Orte C und D, die von einem Fluss 4 km bzw. 3 km entfernt sind, sollen eine gemeinsame Schiffsanlegestelle bekommen. ABD

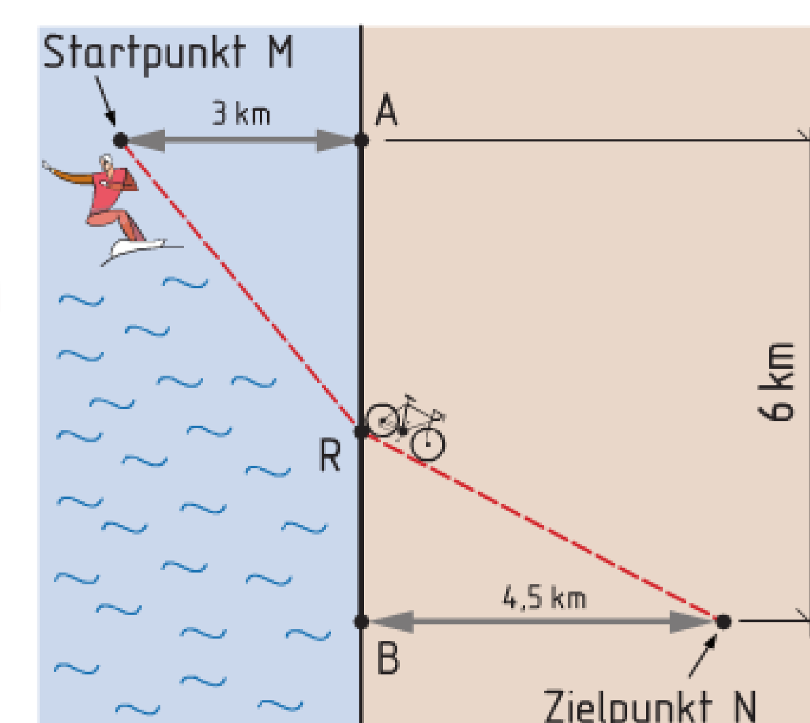
1) Berechne, wo die Anlegestelle A errichtet werden muss, damit die Gesamtlänge der neu zu errichtenden Straßen ein Minimum wird, wenn der horizontale Abstand der beiden Orte 10 km beträgt.

2) Zeige, dass die beiden Winkel, unter denen die beiden Straßen zur Anlegestelle einmünden, gleich groß sind.



4.44 In der Umgebung dreier Orte A, B und C mit den Koordinaten A(1|8), B(6|10) und C(12|4) befindet sich eine geradlinig durch die Orte F(3|6) und G(9|8) verlaufende Straße. An dieser Straße soll ein neuer Supermarkt S errichtet werden. Er soll so liegen, dass die Summe der Anfahrtswege der einzelnen Kunden möglichst gering ist. Wo muss dieser Supermarkt S errichtet werden, wenn aus A 250, aus B 480 und aus C 560 Kunden zu berücksichtigen sind? ABC

4.45 Susi nimmt an einem Surf- und Radfahr-Wettbewerb teil. Vor dem Wettbewerb müssen alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer eine Stelle zwischen den Punkten A und B am Strand wählen, an dem ihr Beachbike bereitgestellt wird. Im Bewerb muss Susi vom Startpunkt M zum Punkt R surfen und von dort nach N radeln. Aufgrund des Trainings kann Susi für das Surfen von einer Geschwindigkeit von 35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und für das Radfahren im Sand von 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ausgehen. ABC

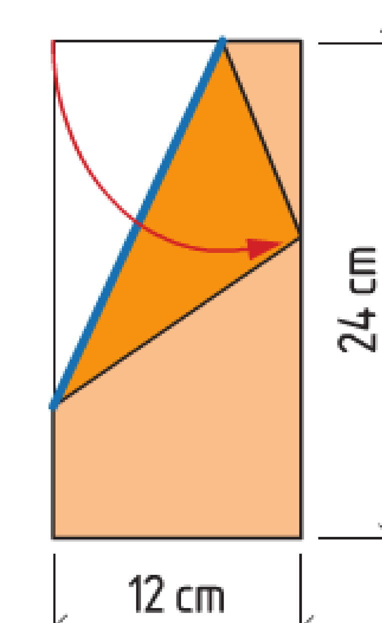


1) Wolfgang hat sein Rad in B positioniert. Er erreicht beim Surfen die gleiche Geschwindigkeit wie Susi und ist beim Radfahren mit 22 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ unterwegs. Berechne, welche Zeit Wolfgang insgesamt benötigt. Arbeite mit den in der Skizze angegebenen Entfernungen.

2) Wo muss Susi ihr Rad optimal positionieren, um am schnellsten am Ziel zu sein?

3) Vergleiche die Zeiten von Susi und Wolfgang und interpretiere das Ergebnis.

4.46 Für eine Tischdekoration soll eine Serviette gefaltet werden. Die linke obere Ecke wird dabei so an den rechten Rand gelegt, dass die dabei entstehende Faltkante möglichst kurz ist. Berechne die Länge dieser Kante. AB

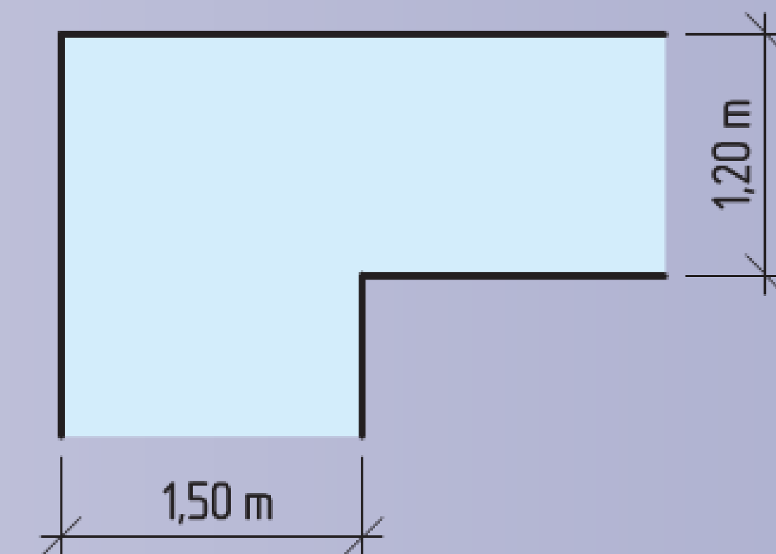


Anwendungen der Differentialrechnung

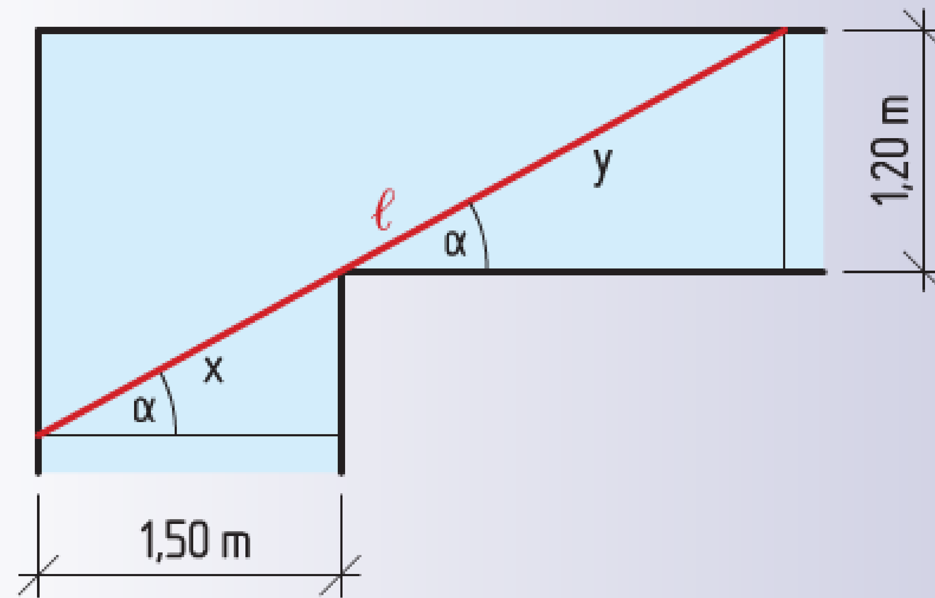
Aufgaben mit Winkelfunktionen

Bei vielen Extremwertaufgaben ist es möglich bzw. sinnvoll, alle in der Zielfunktion vorkommenden Variablen mithilfe eines Winkels auszudrücken.

AB **4.47** In einem Kanalsystem soll ein Balken schwimmend transportiert werden. Wie lang darf er maximal sein, damit er die in der Abbildung dargestellte Ecke schwimmend passieren kann?



Lösung:



Zielfunktion: $\ell(x, y) = x + y \to$ Maximum

Nebenbedingung: $\cos(\alpha) = \frac{1{,}5\text{ m}}{x} \Rightarrow x = \frac{1{,}5\text{ m}}{\cos(\alpha)}$

$\sin(\alpha) = \frac{1{,}2\text{ m}}{y} \Rightarrow y = \frac{1{,}2\text{ m}}{\sin(\alpha)}$

$\ell(\alpha) = \frac{1{,}5}{\cos(\alpha)} + \frac{1{,}2}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \frac{d\ell}{d\alpha} = \frac{1{,}5 \cdot \sin(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2} - \frac{1{,}2 \cdot \cos(\alpha)}{(\sin(\alpha))^2}$

- Da x und y von α abhängen, hängt auch ℓ von α ab.

$1{,}5 \cdot (\sin(\alpha))^3 - 1{,}2 \cdot (\cos(\alpha))^3 = 0$

$1{,}5 \cdot (\sin(\alpha))^3 = 1{,}2 \cdot (\cos(\alpha))^3$

$\frac{(\sin(\alpha))^3}{(\cos(\alpha))^3} = \frac{1{,}2}{1{,}5} \Rightarrow (\tan(\alpha))^3 = \frac{1{,}2}{1{,}5} \Rightarrow \alpha = 42{,}87...°$

$\ell = \frac{1{,}5}{\cos(\alpha)} + \frac{1{,}2}{\sin(\alpha)} = 3{,}810... \approx 3{,}81\text{ m}$

Der Balken darf maximal 3,81 m lang sein.

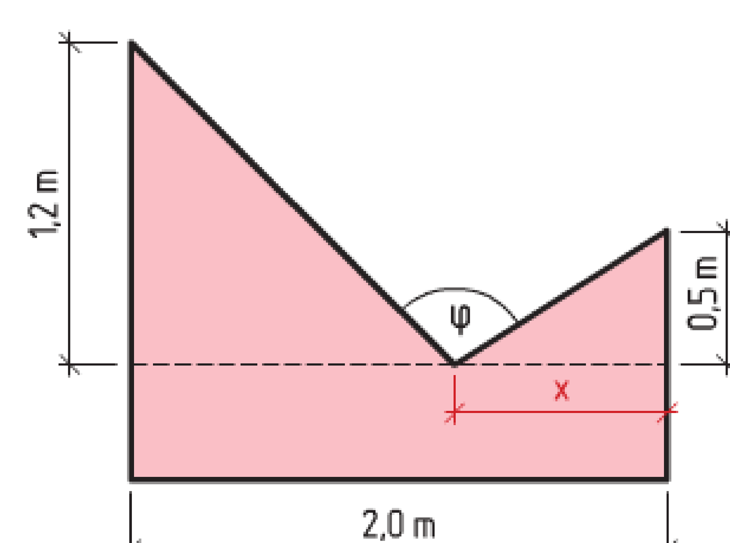
AB **4.48** Eine trapezförmige Abflussrinne mit möglichst großem Querschnitt soll aus gleich breiten Brettern hergestellt werden. Welchen Neigungswinkel müssen die seitlichen Bretter haben, wenn man ***a)*** drei Bretter verwendet? ***b)*** vier Bretter verwendet?

AB **4.49** Schultüten aus Karton haben die Form eines oben offenen Kegels und sollen ein Volumen von 5 dm^3 fassen.
Ermittle, wie der Öffnungswinkel des Kegels gewählt werden muss, damit der Materialverbrauch zur Herstellung des Kegels möglichst gering wird.

AB TE **4.50** Herr Nowak möchte ein Foto der Statue von James Watt machen. In welcher Entfernung vom Denkmal hat er den größten Blickwinkel auf die Figur (ohne Sockel), wenn seine Aughöhe 1,71 m beträgt?

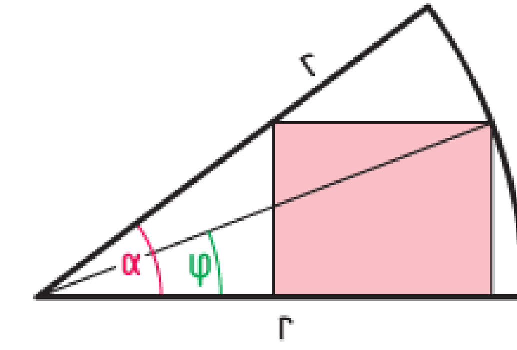


AB TE **4.51** Für eine Fremdenverkehrsgemeinde sollen ähnliche Sitzgelegenheiten wie im Wiener Wasserpark entworfen werden. Wie lang ist im skizzierten Querschnitt die Strecke x zu wählen, wenn der Winkel φ zwischen Sitz- und Liegefläche möglichst groß sein soll?





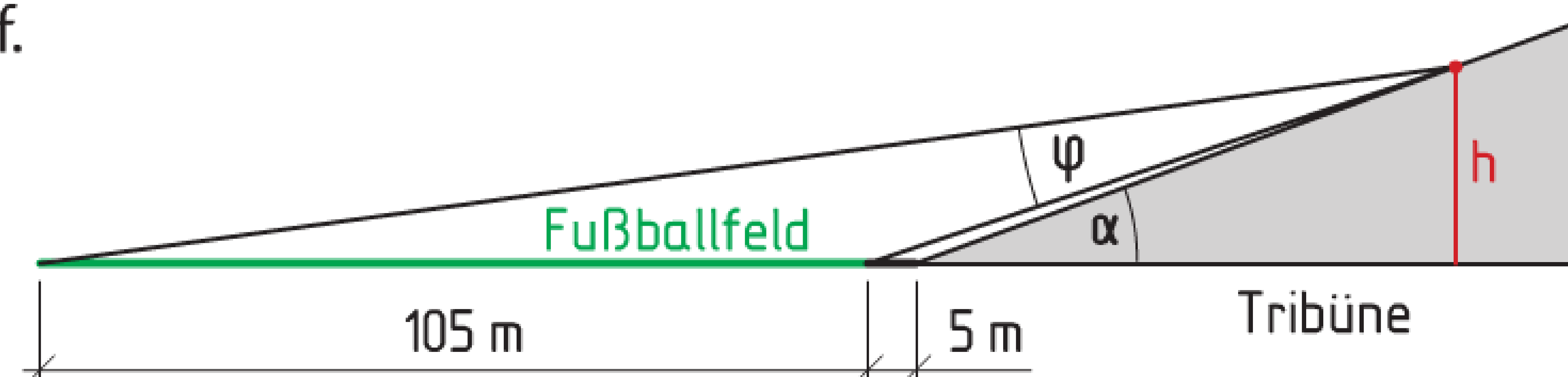
4.52 Einem Kreisausschnitt (r = 5 cm, $\alpha = 60°$) soll ein Rechteck, wie in der Abbildung skizziert, eingeschrieben werden. Wie sind Länge und Breite zu wählen, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks maximal werden soll?



AB TE

4.53 Bei einem Länderspiel muss ein Fußballfeld 105 m lang sein. In einem Stadion beträgt die Entfernung von der Torlinie zum Fußpunkt der Tribüne 5 m. Die Tribüne weist einen Steigungswinkel von $\alpha = 20°$ auf.

AB TE



Berechne, in welcher Höhe h auf der Tribüne der Blickwinkel φ auf das gesamte Feld maximal ist.

4.54 In einem Kaffeehaus wird ein Flatscreen mit einer Höhe von 83 cm montiert. Die Unterkante befindet sich in 1,80 Meter Höhe. In welcher Entfernung hat man den größten Blickwinkel, wenn die Aughöhe im Sitzen 1,20 Meter beträgt?

AB TE

Aufgaben aus Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaft

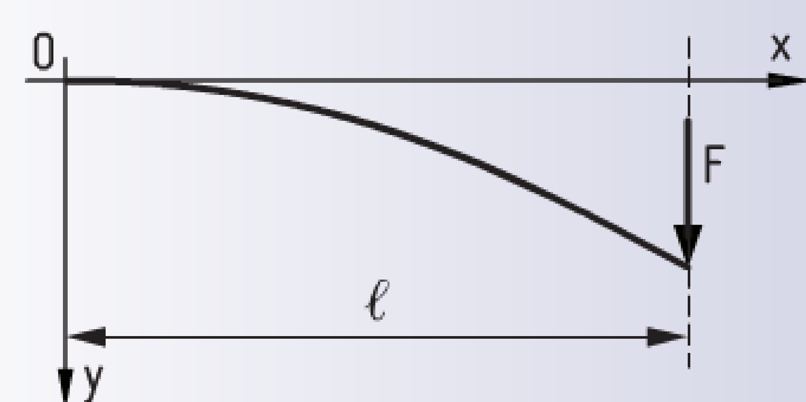
4.55 Wird ein einseitig eingespannter Träger am freien Ende mit einer Kraft F belastet, so lautet die Gleichung der Biegelinie:

ABC

$$y(x) = \frac{F \cdot \ell^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right]$$

E … Elastizitätsmodul, I… Trägheitsmoment, ℓ … Länge des Balkens,
x … Abstand von der Einspannstelle, y … Durchbiegung an der Stelle x
Gib die maximale Durchbiegung des Balkens an. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

Lösung:



Zielfunktion:

$$y(x) = \frac{F \cdot \ell^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right]$$

Da die ZF nur die Variable x enthält, ist keine NB nötig.

mit $0 \leq x \leq \ell$ Definitionsbereich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F \cdot \ell^3}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{1}{\ell} - 3 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ell}\right] = \frac{F \cdot \ell}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(2 \cdot x - \frac{x^2}{\ell}\right)$$

$$2 \cdot x - \frac{x^2}{\ell} = 0$$

$$x \cdot \left(2 - \frac{x}{\ell}\right) = 0$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2\ell$$

x_2 liegt außerhalb des Definitionsbereichs und ist daher keine Lösung.
Es müssen nun die Ränder überprüft werden.

Linker Rand, x = 0: Da y(0) = 0, ist die Durchbiegung minimal.

Rechter Rand, $x = \ell$: $y(\ell) = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I} > 0$

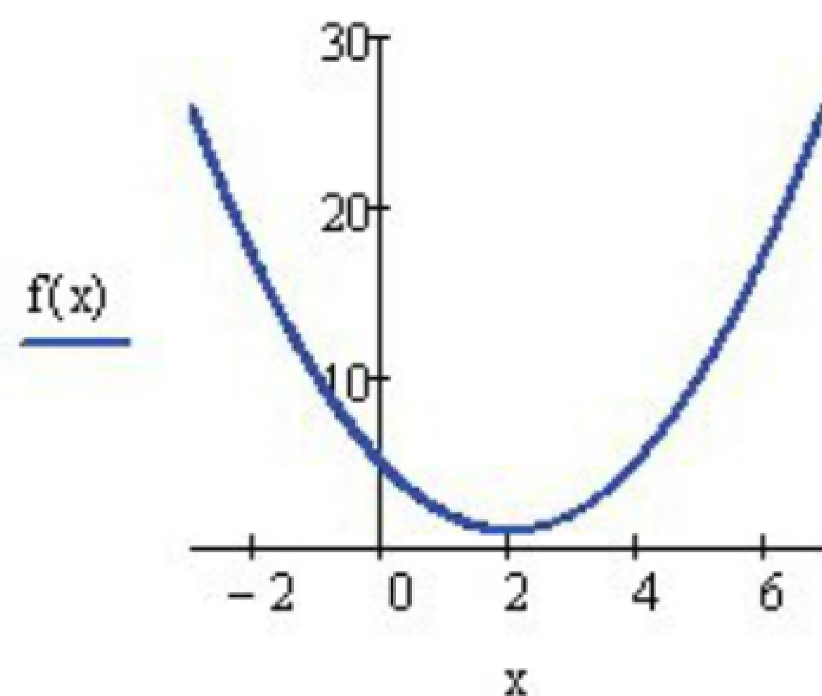
Die maximale Durchbiegung von $\frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I}$ tritt am freien belasteten Ende, also dem rechten Rand des Trägers, auf.

Technologieeinsatz: Extremwertaufgaben



Mathcad

$f(x) := (x-2)^2 + 1$



$x := 1$

$xtief := \text{Minimieren}(f, x) \qquad xtief = 2$

In Mathcad stehen die Funktionen **Maximieren** und **Minimieren** zur Verfügung:

Maximieren(Funktion,Variable)
Minimieren(Funktion,Variable)

Beachte:

- Vor dem Befehlsaufruf muss ein Startwert, zum Beispiel **x := 1**, der in der Nähe der gesuchten Extremstelle liegt, für die Variable angegeben werden.
- Beim Befehl Minimieren bzw. Maximieren wird die Funktion nur mit dem Funktionsnamen angegeben.

ABC



4.56 Eine einsturzgefährdete Hausmauer soll mit einer Strebe abgestützt werden. Vor der Hausmauer steht in 1,2 m Entfernung eine 1,8 m hohe Mauer, über die die Strebe gelegt werden soll. Wie lang muss die Strebe mindestens sein? Ermittle das Minimum der Zielfunktion rechnerisch und überprüfe anhand einer Grafik, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.

Lösung mit Mathcad:

Zielfunktion: Länge f der Strebe ... Minimum
$f = x + y$

Nebenbedingung:

$\cos(\alpha) = \frac{1.2}{x}$ auflösen, x $\rightarrow \frac{1.2}{\cos(\alpha)} \qquad \sin(\alpha) = \frac{1.8}{y}$ auflösen, y $\rightarrow \frac{1.8}{\sin(\alpha)}$

$f(\alpha) := \frac{1.2}{\cos(\alpha)} + \frac{1.8}{\sin(\alpha)} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

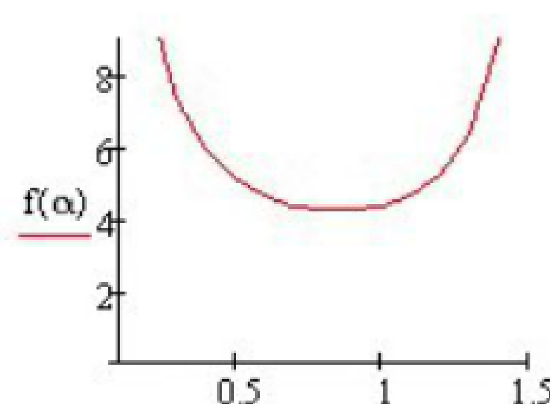
$\frac{d}{d\alpha}f(\alpha) \rightarrow \frac{1.2 \cdot \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2} - \frac{1.8 \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)^2}$

$\alpha := 0.5$

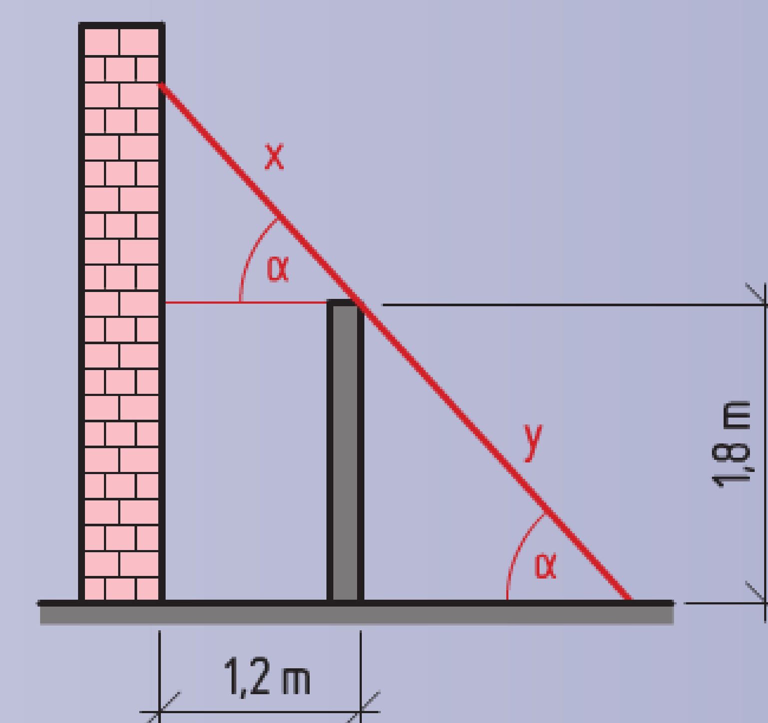
$\alpha m := \text{wurzel}\left(\frac{d}{d\alpha}f(\alpha), \alpha\right) \qquad \alpha m = 0.853 \qquad f(\alpha m) = 4.214$

Die Strebe muss mindestens 4,22 m lang sein.

$\alpha := 0, 0.1 .. 1.5$



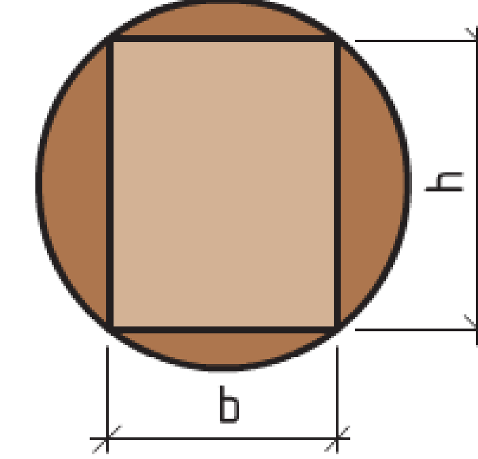
$\alpha := 0.8 \qquad \alpha 1 := \text{Minimieren}(f, \alpha) \qquad \alpha 1 = 0.853$



- Die Gleichung $\frac{df}{dx} = 0$ wird mit dem Befehl **wurzel(Gleichung, Variable)** numerisch gelöst.
  Vor dem Aufruf wird für α der Startwert 0,5 eingegeben. Wird nur ein Term anstelle einer Gleichung angegeben, so wird als rechte Seite der Gleichung automatisch „**=0**" ergänzt.
- Die minimale Länge der Strebe ergibt sich bei einem Winkel von $\alpha = 0{,}853$ rad.

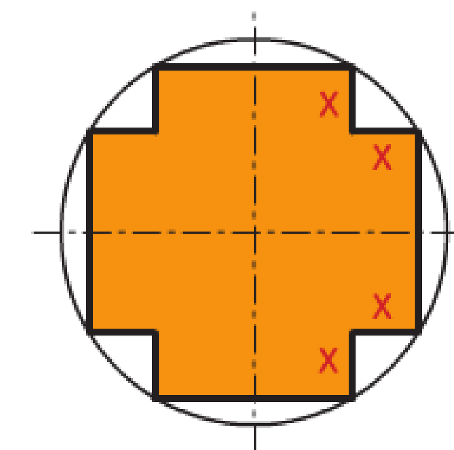
4.57 Die von einer Ziege jährlich produzierte Milchmenge hängt unter anderem von der Futtermenge ab. Ein Bauer hält auf einem Grundstück 50 Milchziegen, die jeweils 800 kg Milch pro Jahr geben. Das Halten jeder weiteren Ziege auf diesem Grundstück führt zu einer Verringerung der Milchmenge um 10 kg pro Jahr und Ziege. Wie viele Ziegen sollte der Bauer zusätzlich anschaffen, um möglichst viel Milch zu erhalten? AB

4.58 Die Tragfähigkeit eines Balkens ist direkt proportional zur Breite b und zum Quadrat der Höhe h. Wie sind b und h zu wählen, damit ein aus einem kreisrunden Baumstamm mit einem Durchmesser von 65 cm herausgeschnittener Balken maximale Tragfähigkeit hat? AB

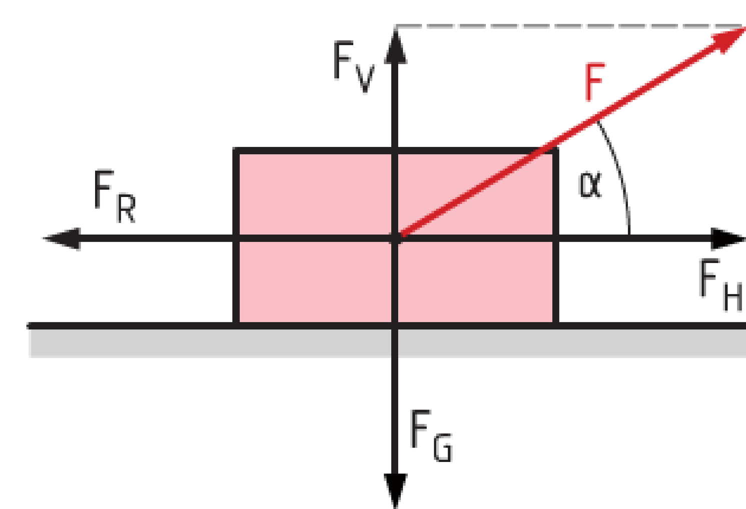


4.59 Zwei Ohm'sche Widerstände R_1 und R_2 ergeben bei Serienschaltung einen Gesamtwiderstand von 270 Ω. Wie sind R_1 und R_2 zu wählen, damit der Gesamtwiderstand bei Parallelschaltung maximal wird? AB

4.60 Eine Transformatorspule mit kreisförmigem Querschnitt soll durch einen kreuzförmigen Eisenkern möglichst flächendeckend ausgefüllt werden (siehe Abbildung). Wie viel Prozent der Kreisfläche können maximal bedeckt werden? AB TE



4.61 Auf einer waagrechten Unterlage liegt ein Körper mit dem Gewicht F_G. Er soll mithilfe eines Seils abgeschleppt werden. In welchem Winkel α muss das Seil angreifen, damit der Kraftaufwand am geringsten ist? AB
Hinweis: $F_H = F_R$; $F_R = \mu \cdot (F_G - F_V)$
F_H … Horizontalkraft, F_V … Vertikalkraft, F_R … Reibungskraft, μ … Reibungskoeffizient



4.62 Empirische Untersuchungen haben ergeben, dass die von einem Artikel verkaufte Stückzahl x vom Preis p in Euro abhängig ist. Der Zusammenhang kann durch die Absatzfunktion $x(p) = -4 \cdot \ln\left(\frac{p}{20\,€}\right)$ beschrieben werden. AB TE
Ermittle, bei welcher Anzahl von verkauften Artikeln der Erlös $E(x) = p(x) \cdot x$ maximal ist.

4.63 Der Querschnitt von drehellipsoidförmigen Osterei-Kerzen ist durch die Gleichung ell: $x^2 + 4y^2 = 9$ gegeben. Aus Restbeständen sollen quaderförmige Kerzen zugeschnitten werden. Berechne die Abmessungen eines Zuschnitts, wenn dessen Volumen maximal werden soll. Fertige eine Skizze an und zeichne den Docht passend ein (Maße in cm). AB

4.64 Zwei Lichtquellen haben voneinander einen Abstand von s Metern. An welchem Punkt zwischen den beiden Lichtquellen ist die Beleuchtungsstärke am geringsten, wenn die eine Lichtquelle dreimal so stark leuchtet wie die andere? AB TE
Hinweis: Die Beleuchtungsstärke ist indirekt proportional zum Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle.

4.65 Eine in der Höhe verstellbare Stehlampe steht am Rand eines Tisches. Ein Buch liegt in einer waagrechten Entfernung von a = 80 cm von der Stehlampe auf dem Tisch. Die Beleuchtungsstärke E ist direkt proportional zum Sinus des Einfallswinkels α und indirekt proportional zum Quadrat des Abstands x von der Lichtquelle zum Objekt. In welcher Höhe muss die Lichtquelle angebracht werden, damit das Buch bestmöglich beleuchtet ist? AB TE

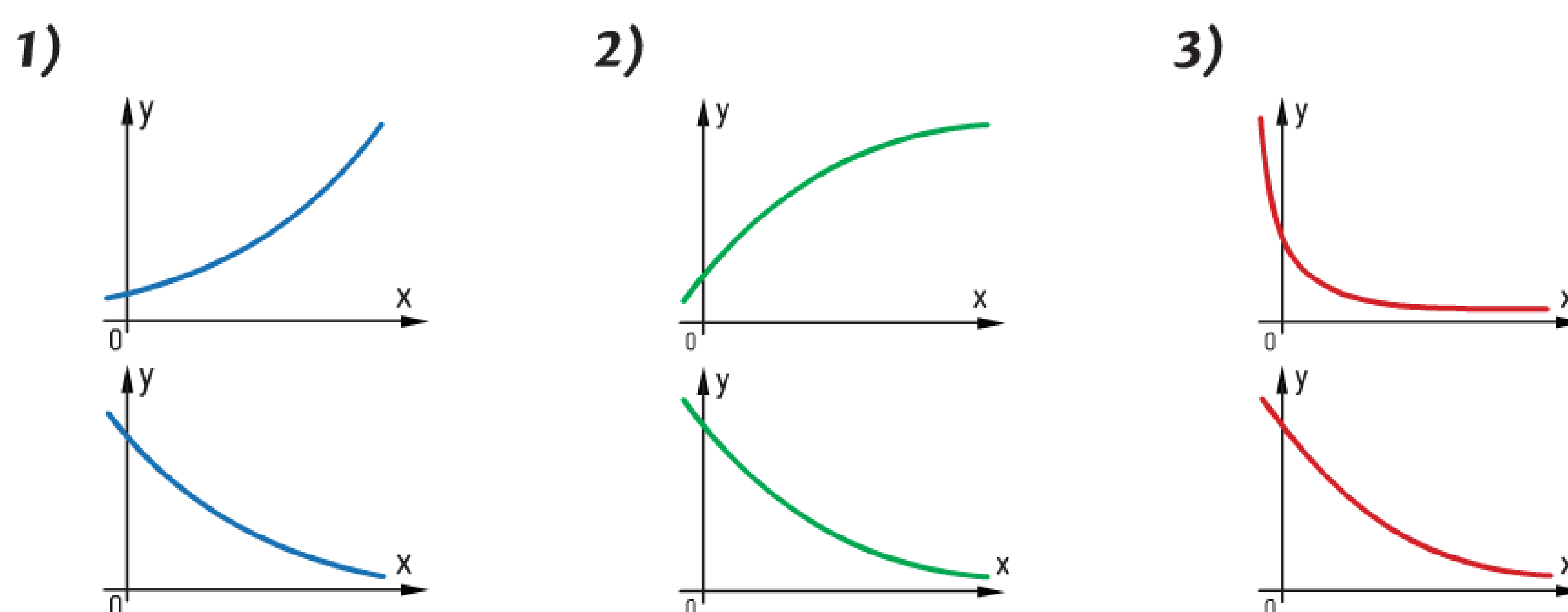
Anwendungen der Differentialrechnung

4.2 Geometrische Bedeutung der Ableitungen



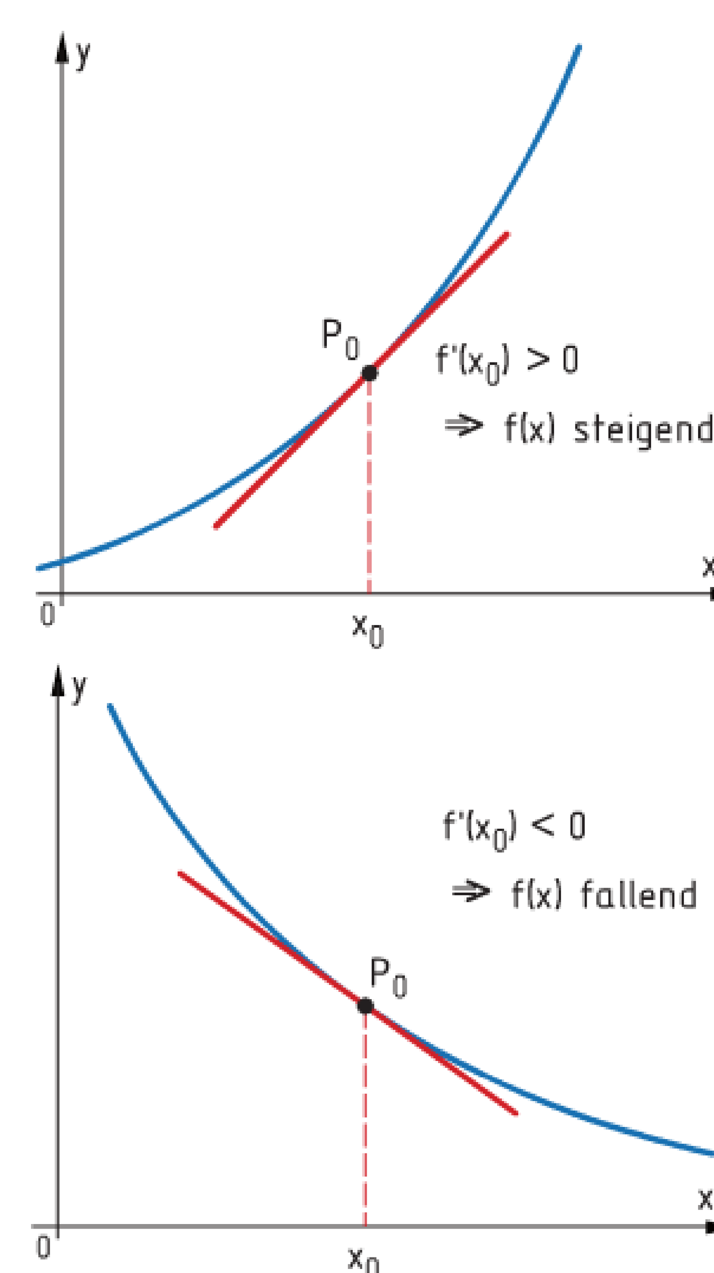
Anhand der ersten und der zweiten Ableitung einer Funktion lassen sich wesentliche Aussagen über den Verlauf bzw. die Eigenschaften des Graphen dieser Funktion treffen. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktion mindestens zweimal differenzierbar ist.

C **4.66** Vergleiche jeweils die beiden Funktionsgraphen gleicher Farbe. Beschreibe den Unterschied im Kurvenverlauf möglichst genau.



Erste Ableitung – Steigungsverhalten

Mithilfe der ersten Ableitung lassen sich Aussagen über das Monotonieverhalten einer Funktion treffen.

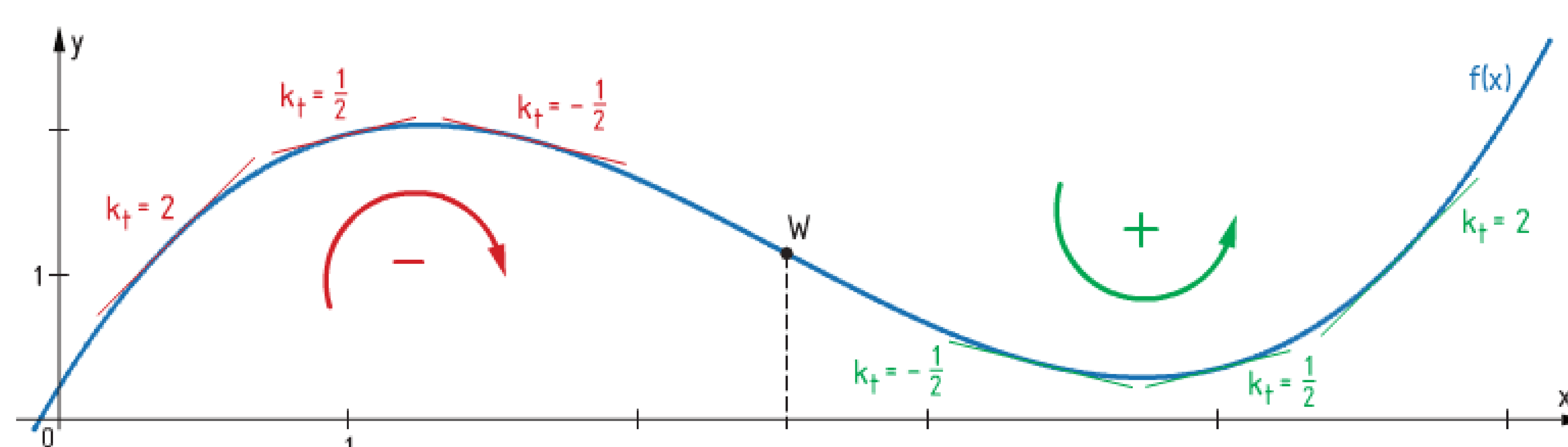


Ist in einem Punkt P_0 einer Funktion f die Steigung der Tangente positiv, also die erste Ableitung $f'(x_0) > 0$, so ist die Funktion f in der unmittelbaren Umgebung von P_0 **streng monoton steigend**.

Ist in einem Punkt P_0 einer Funktion f die Steigung der Tangente negativ, also die erste Ableitung $f'(x_0) < 0$, so ist die Funktion f in der unmittelbaren Umgebung von P_0 **streng monoton fallend**.

Zweite Ableitung – Krümmungsverhalten

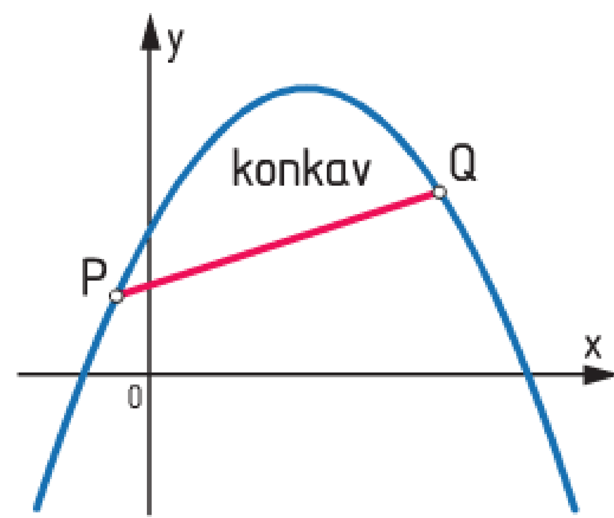
Die zweite Ableitung beschreibt die Änderung der Tangentensteigungen, also das Krümmungsverhalten der Funktion.



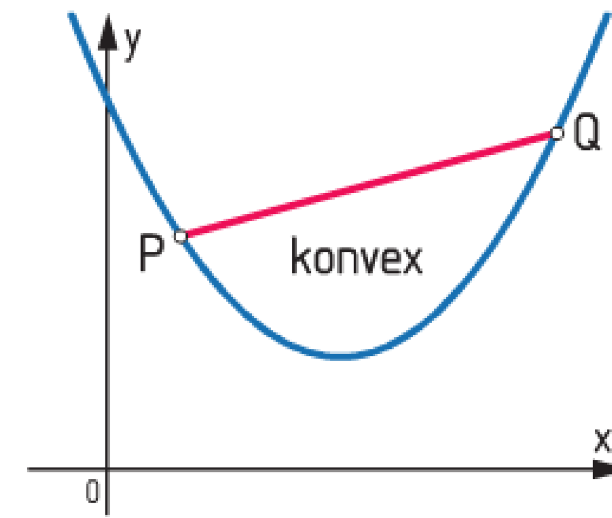
Die Tangenten „drehen“ im Uhrzeigersinn, die Tangentensteigungen werden kleiner. Der Funktionsverlauf entspricht einer Rechtskurve. Man nennt die Funktion in diesem Fall **rechts gekrümmt** oder **negativ gekrümmt**.

Die Tangenten „drehen“ gegen den Uhrzeigersinn, die Tangentensteigungen werden größer. Der Funktionsverlauf entspricht einer Linkskurve. Man nennt die Funktion in diesem Fall **links gekrümmt** oder **negativ gekrümmt**.

Im Punkt W ändert sich das Krümmungsverhalten.



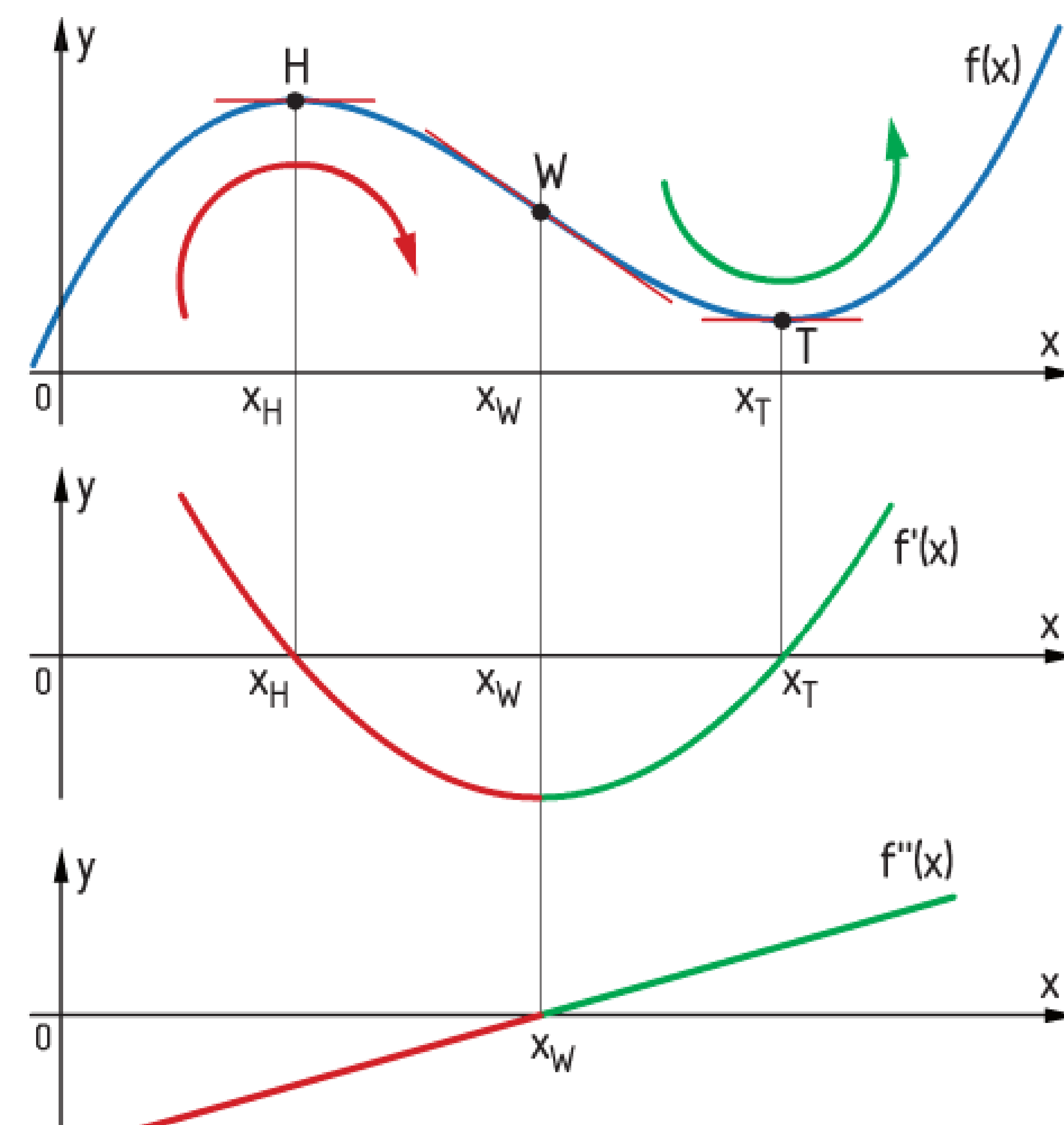
Ist die Krümmung **negativ**, also die Kurve **rechtsgekrümmt**, berühren die Tangenten die Kurve von „oben“. Verläuft der Graph „oberhalb“ einer Strecke zwischen zwei Punkten $P(x_P|f(x_P))$ und $Q(x_Q|f(x_Q))$, bezeichnet man die Funktion im Intervall $[x_P; x_Q]$ als **konkav**.



Ist die Krümmung **positiv**, also die Kurve **linksgekrümmt**, berühren die Tangenten die Kurve von „unten“. Verläuft der Graph „unterhalb“ einer Strecke zwischen zwei Punkten $P(x_P|f(x_P))$ und $Q(x_Q|f(x_Q))$, bezeichnet man die Funktion im Intervall $[x_P; x_Q]$ als **konvex**.

Extrempunkte

Stellt man $f'(x)$ bzw. $f''(x)$ unterhalb der Funktion $f(x)$ dar, erkennt man:



- Ist $f'(x)$ fallend, so ist die Ableitung $f''(x) < 0$. In diesem Bereich ist die Funktion negativ gekrümmt.
- Ist $f'(x)$ steigend, so ist die Ableitung $f''(x) > 0$. In diesem Bereich ist die Funktion positiv gekrümmt.
- Im Extrempunkt H ist die Tangente waagrecht, $f'(x_H) = 0$. Die Funktion ist dort negativ gekrümmt, daher ist der Punkt ein **Hochpunkt**. Es gilt: $f''(x_H) < 0$
- Im Extrempunkt T ist die Tangente waagrecht, $f'(x_T) = 0$. Die Funktion ist dort positiv gekrümmt, daher ist der Punkt ein **Tiefpunkt**. Es gilt: $f''(x_T) > 0$
- Für die Extrempunkte H und T gilt: Beim „Überschreiten“ der Extremstelle wechselt die erste Ableitung $f'(x)$ das Vorzeichen, die Funktion ändert also ihr Monotonieverhalten.
- Ist $f(x)$ differenzierbar, so ist für das Vorliegen eines Hoch- bzw. Tiefpunkts $f'(x) = 0$ eine **notwendige** Bedingung, also eine Voraussetzung, die erfüllt sein muss. Ist zusätzlich $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$, so liegt mit Sicherheit ein Extrempunkt vor, man spricht in diesem Fall von einer **hinreichenden** Bedingung.

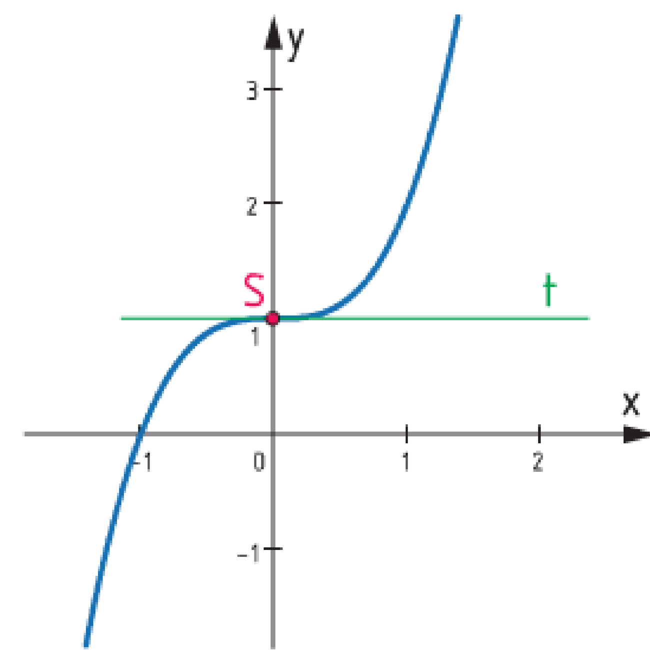
Wendepunkte und Sattelpunkte

- Als **Wendepunkt** bezeichnet man einen Punkt des Funktionsgraphen, in dem sich das **Vorzeichen der Krümmung**, also das Krümmungsverhalten, **ändert**. Der Funktionsgraph in der obigen Abbildung ist links vom Punkt W negativ gekrümmt, $f'(x)$ ist fallend. Rechts von W ist die Kurve positiv gekrümmt, $f'(x)$ ist steigend. Anschaulich gesprochen schließt in einem Wendepunkt an eine Rechtskurve eine Linkskurve an oder umgekehrt.

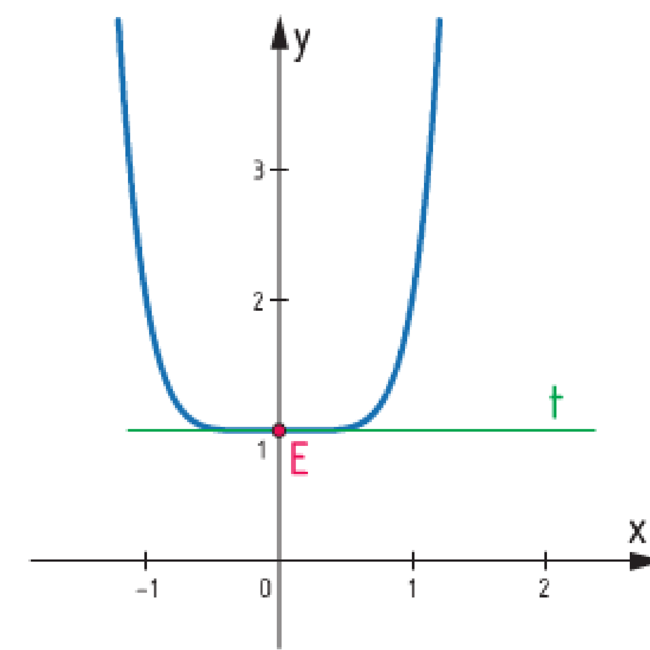
Anwendungen der Differentialrechnung

- $f'(x)$ hat an der Stelle x_W ein lokales Maximum oder Minimum. Die Funktion hat **im Wendepunkt** einen – lokal betrachtet – **maximalen** oder **minimalen Steigungswinkel**. Im Wendepunkt W ist die **Krümmung null**. Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunkts lautet daher: $\mathbf{f''(x) = 0}$

Umgekehrt folgt jedoch aus der Tatsache, dass die Krümmung null ist, nicht zwingend das Vorliegen eines Wendepunkts.
Ist sowohl $\mathbf{f'(x) = 0}$ als auch $\mathbf{f''(x) = 0}$, so handelt es sich um einen Punkt mit waagrechter Tangente und Krümmung null.



Ändert sich das **Monotonieverhalten nicht**, ändert sich aber die Krümmung, so handelt es sich um einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente. So ein Punkt wird als **Sattelpunkt** bezeichnet.



Ändert sich das **Monotonieverhalten** unmittelbar vor und nach dem Punkt mit waagrechter Tangente, so handelt es sich um einen **Extrempunkt**.

Mithilfe der ersten und zweiten Ableitung einer mindestens zweimal differenzierbaren Funktion f lassen sich Aussagen über den Funktionsgraphen treffen.

Monotonieverhalten
Eine Funktion f(x) ist in der Umgebung einer Stelle x_0

streng monoton steigend, wenn gilt:	**streng monoton fallend**, wenn gilt:
$f'(x_0) > 0$	$f'(x_0) < 0$

Krümmungsverhalten
Eine Funktion f(x) ist in der Umgebung einer Stelle x_0

positiv gekrümmt, wenn gilt:	**negativ gekrümmt**, wenn gilt:
$f''(x_0) > 0$	$f''(x_0) < 0$
	

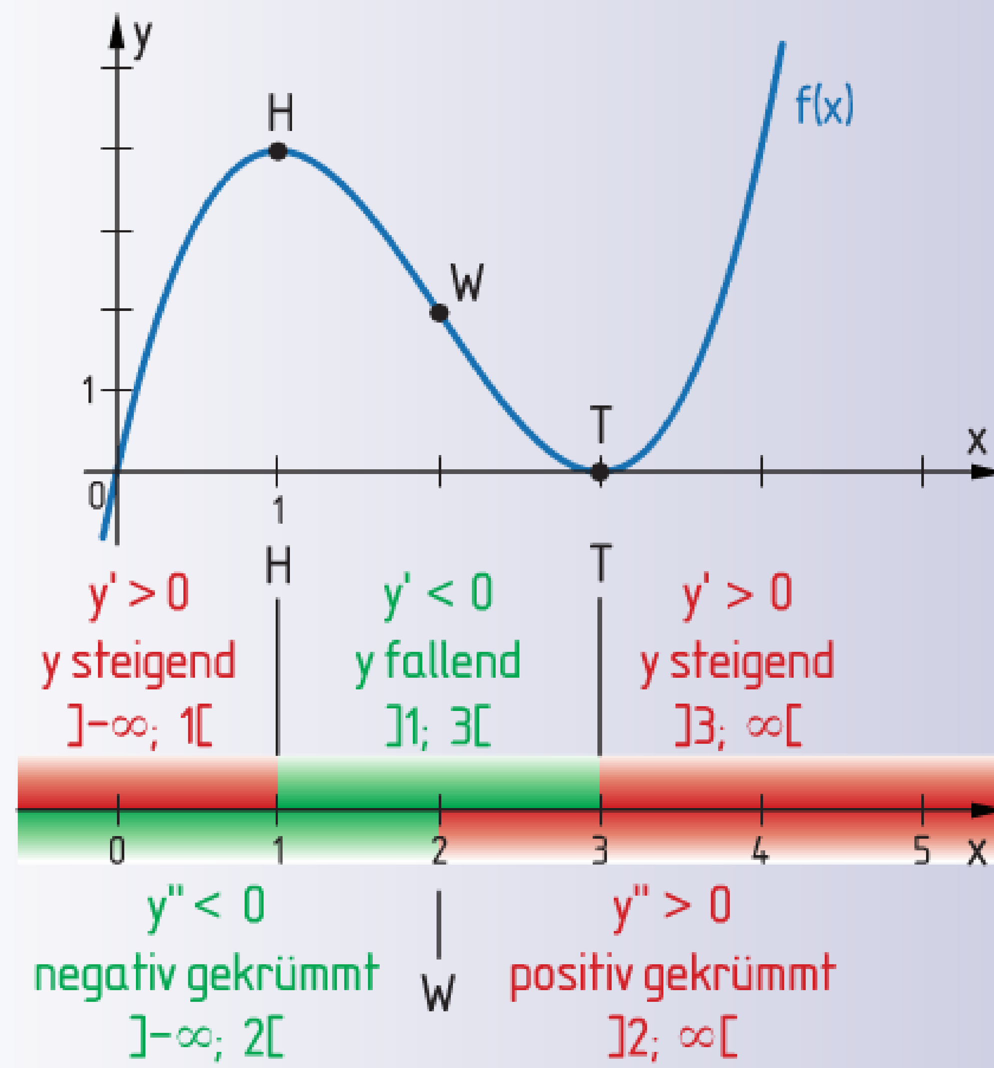
Extrempunkt
Ist $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ und $\mathbf{f''(x_0) < 0}$, so liegt ein **Hochpunkt** (lokales Maximum) vor.
Ist $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ und $\mathbf{f''(x_0) > 0}$, so liegt ein **Tiefpunkt** (lokales Minimum) vor.

Wendepunkt
Im Wendepunkt einer Funktion wechselt die Krümmung das Vorzeichen.
Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Wendepunkts: $\mathbf{f''(x_W) = 0}$
Die Steigung hat hier einen lokalen Extremwert.

Sattelpunkt
Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente: $\mathbf{f'(x_S) = f''(x_S) = 0}$
Das Monotonieverhalten der Funktion ändert sich unmittelbar vor und nach diesem Punkt **nicht**.

4.67 Stelle die Funktion $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ grafisch dar. Untersuche das Monotonie- und das Krümmungsverhalten der Funktion. Veranschauliche die Ergebnisse mithilfe einer Zahlengeraden. BC

Lösung:



$y' = 3x^2 - 12x + 9$
$y'' = 6x - 12$
Monotonieverhalten:
$y' = 0$
$3x^2 - 12x + 9 = 0$
$x_1 = 1, x_2 = 3$ ... Extremstellen

- Erste und zweite Ableitung ermitteln
- Das Monotonieverhalten ändert sich in den Extrempunkten.

Krümmungsverhalten:
$y'' = 0$
$6x - 12 = 0$
$x = 2$ ... Wendestelle

- Das Krümmungsverhalten ändert sich im Wendepunkt.

4.68 Fertige eine Zeichnung des Funktionsgraphen von f an. Untersuche das Monotonie- und das Krümmungsverhalten der Funktion. Veranschauliche die Ergebnisse mithilfe einer Zahlengeraden. ABC

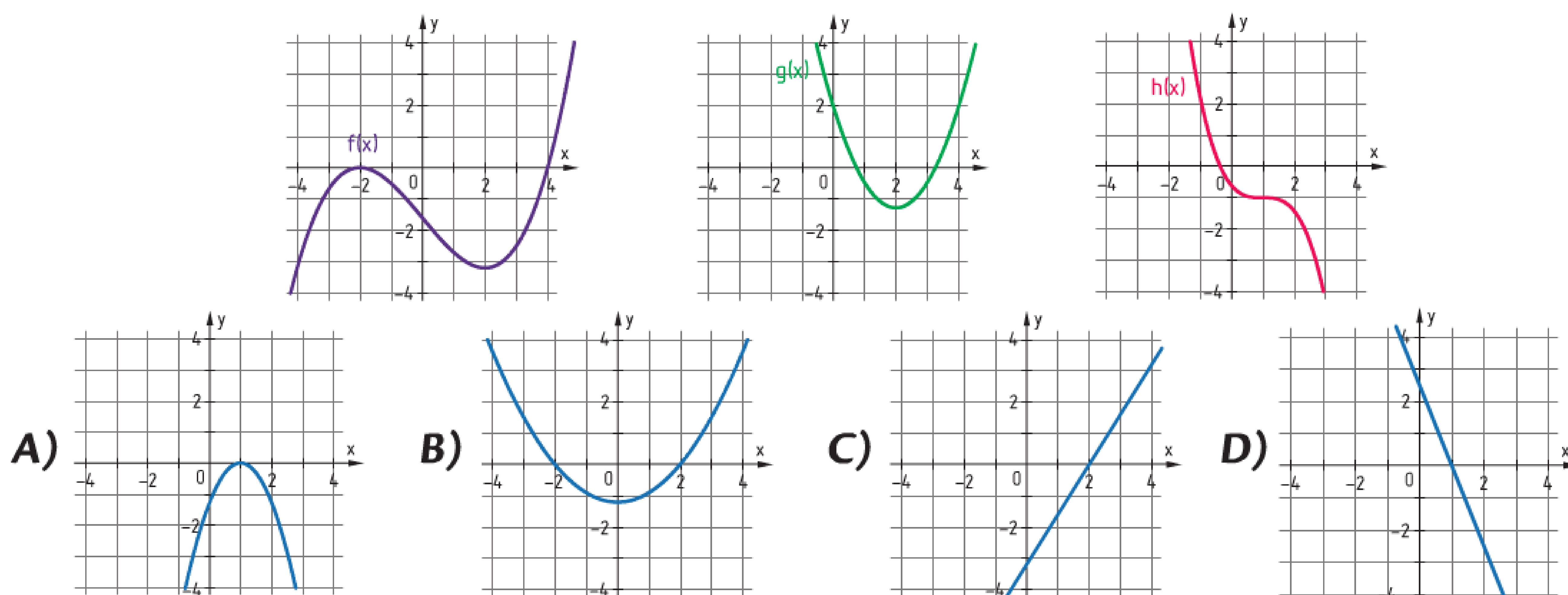
a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 7 + 3x - x^2$ **c)** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ **d)** $f(x) = 4x^3 + 1$

4.69 Stelle die Funktion f und ihre Ableitungen f′ und f″ in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar. BC TE

Lies die Extrempunkte und Wendepunkte aus dem Funktionsgraphen ab und beschreibe die jeweils geltenden Eigenschaften der Ableitungen für diese Punkte mit eigenen Worten.

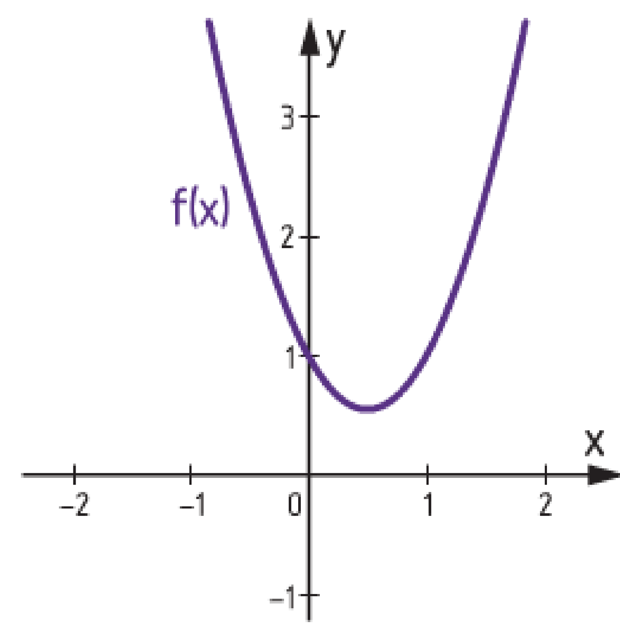
a) $f(x) = 3x - x^3$ **b)** $f(x) = 1 - x^3 - 3x^2$ **c)** $f(x) = \frac{1}{5} \cdot (x^5 - 5x^4 + 5)$

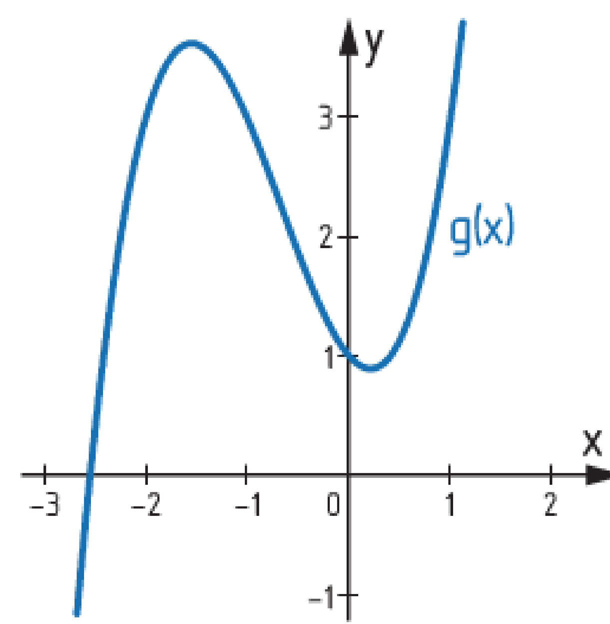
4.70 Ordne den Funktionen f, g und h jeweils die Grafik zu, die ihre erste Ableitung darstellt. Begründe deine Antworten. CD

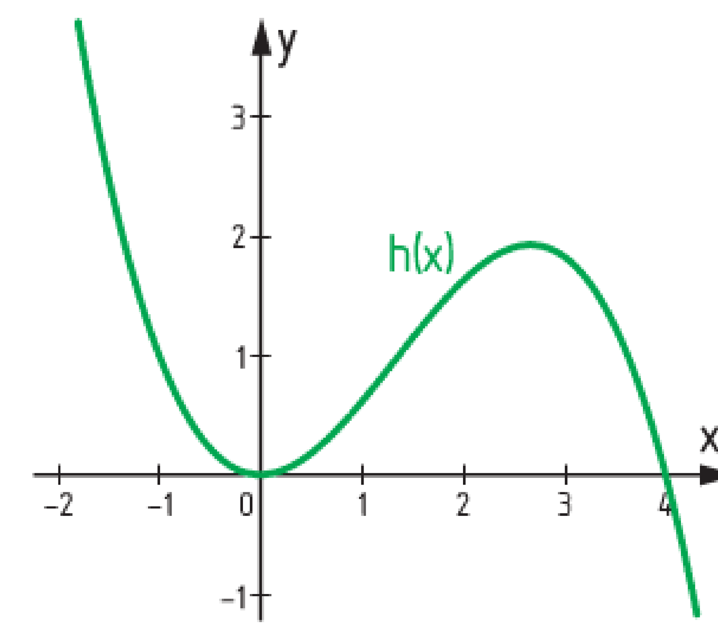


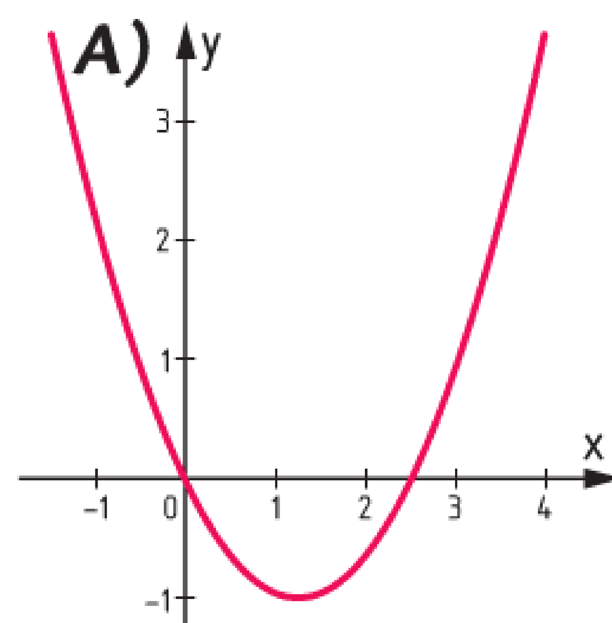
4.71 Stelle die Funktionen $y_1 = x^3$, $y_2 = x^4$, $y_3 = x^5$ und $y_4 = x^6$ grafisch dar. Untersuche jeweils die erste und zweite Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$. Argumentiere mithilfe des Monotonieverhaltens, ob es sich bei dem Punkt an der Stelle $x_0 = 0$ um einen Extrempunkt oder einen Sattelpunkt handelt und überprüfe anhand der Grafik. BD

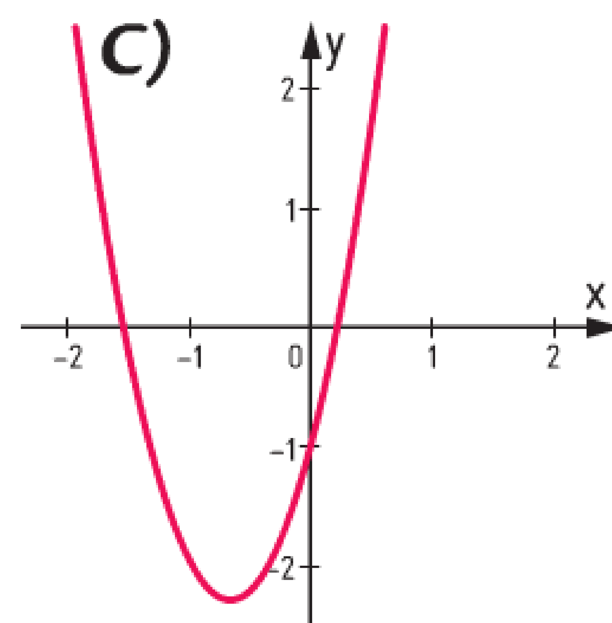
CD **4.72** Ordne den Funktionen f, g und h jeweils die Graphen zu, die ihrer ersten bzw. zweiten Ableitung entsprechen. Begründe deine Auswahl.

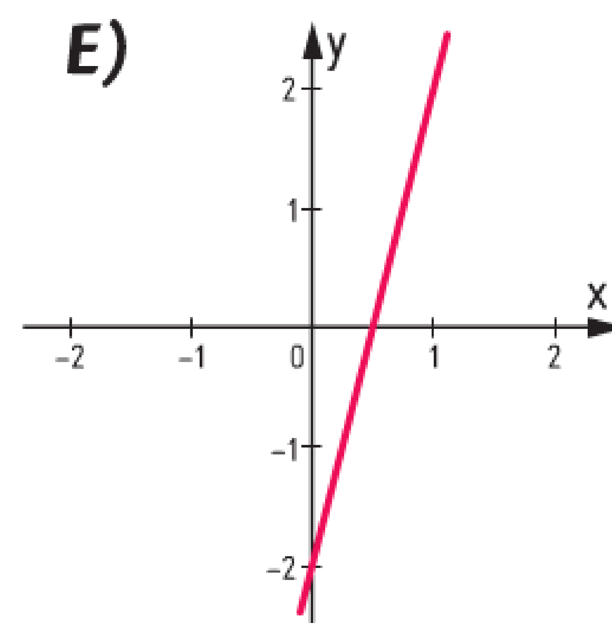


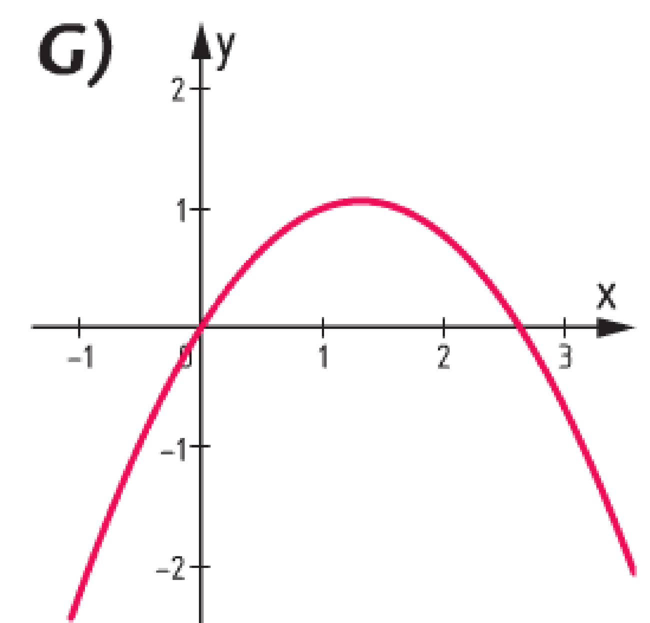


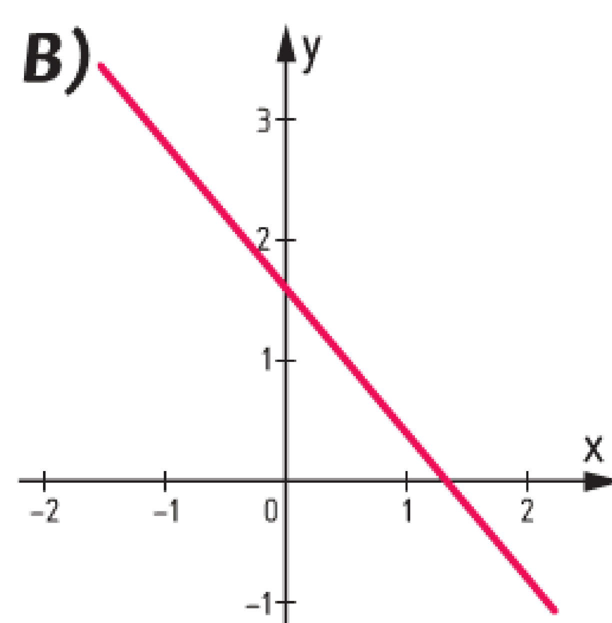


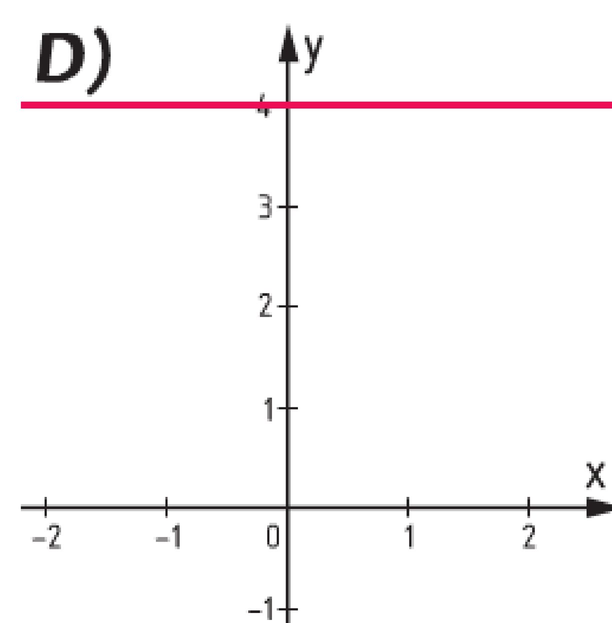


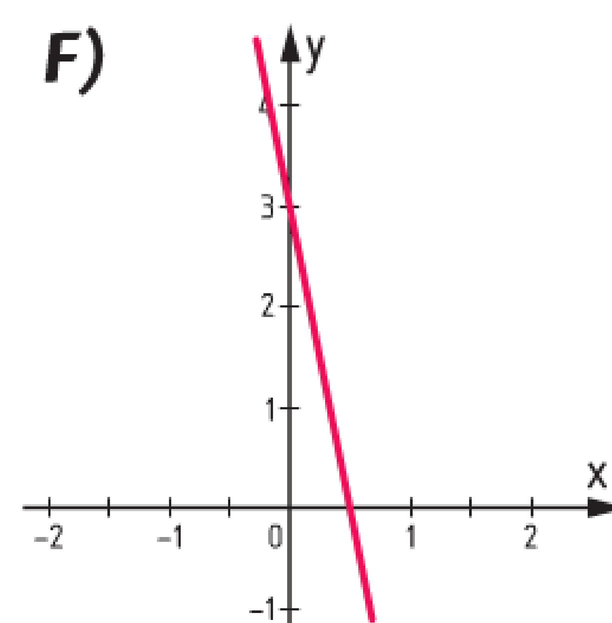


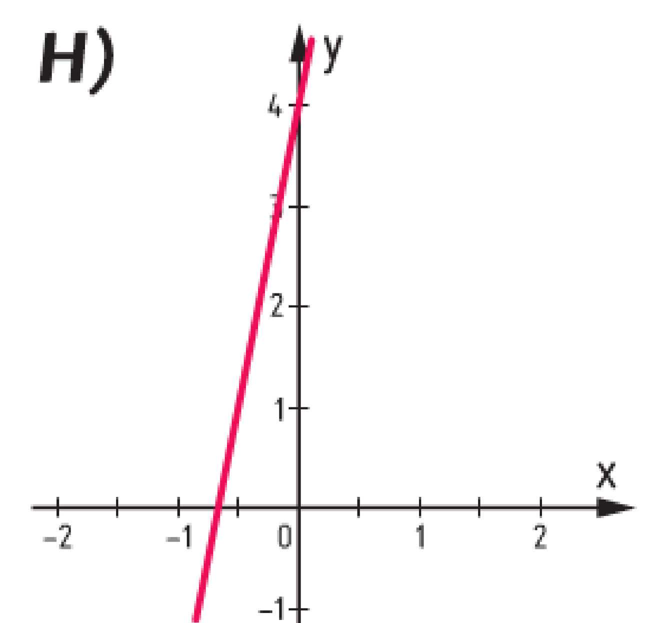




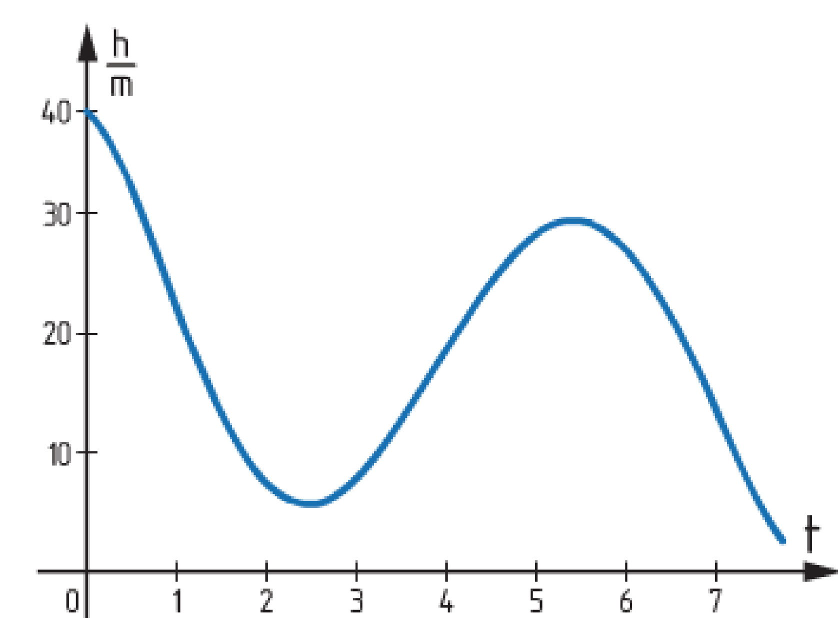


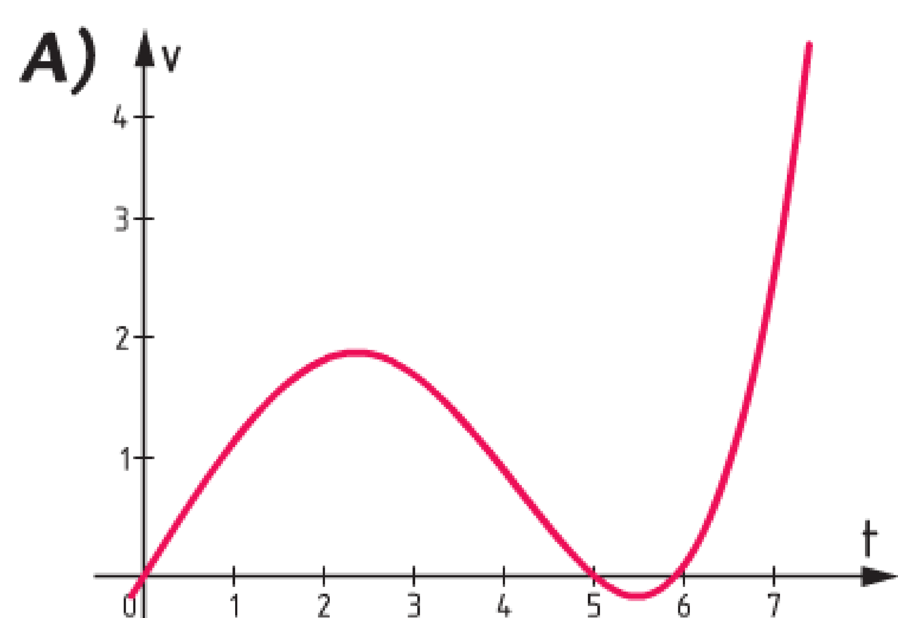


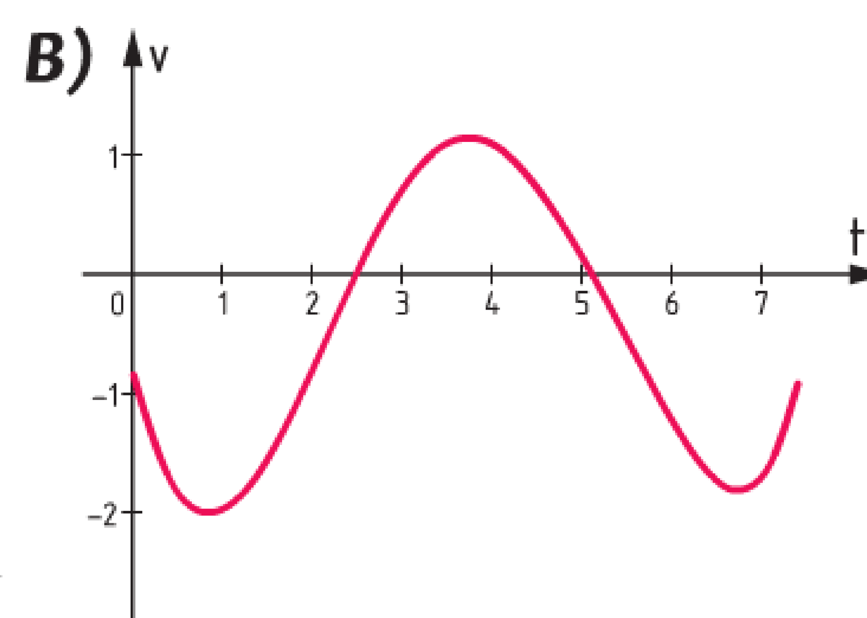


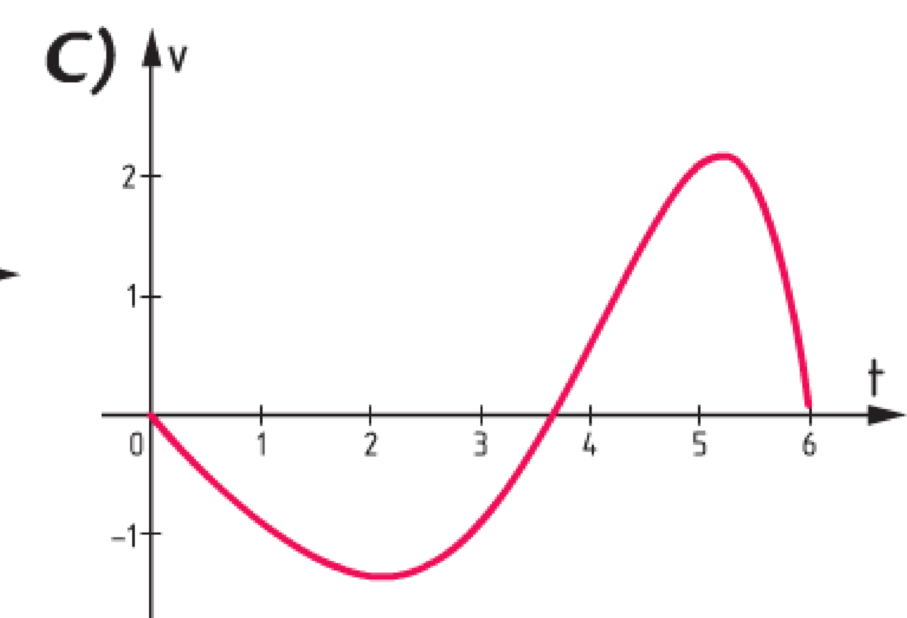


CD **4.73** In einem Vergnügungspark gibt es die Attraktion „Freier Fall“. Für die ersten Sekunden einer Fahrt ist die Höhe h abhängig von der Zeit t, in der Abbildung dargestellt. Ordne dem abgebildeten Funktionsgraphen, den richtigen Geschwindigkeitsgraphen zu. Begründe deine Entscheidung.









4.74 Welche der folgenden Aussagen treffen auf eine Polynomfunktion f zu? Begründe, warum die anderen nicht zutreffen können. CD

A) Eine Nullstelle von f′ ist immer eine Extremstelle von f.

B) In einem Wendepunkt geht der Graph immer von einer Links- in eine Rechtskurve über.

C) Wendestellen von f sind immer Extremstellen von f′.

D) An einer Extremstelle x_0 von f gilt immer $f'(x_0) = 0$.

E) Hat f′ einen Vorzeichenwechsel an der Stelle x_0, so liegt eine Extremstelle von f bei x_0 vor.

4.75 Gib an, ob die folgenden Aussagen für eine Funktion f richtig oder falsch sind. Begründe deine Entscheidung. CD

A) Wenn $f'(4{,}2) = 0$ ist, dann hat f an der Stelle $x = 4{,}2$ einen Hoch- oder Tiefpunkt.

B) Wenn f bei $x = 1{,}8$ einen Hochpunkt hat, dann ist die Krümmung dort negativ.

C) Wenn $f(3) = f''(3) = 0$ ist, dann hat f bei $x = 3$ eine Nullstelle und einen Wendepunkt.

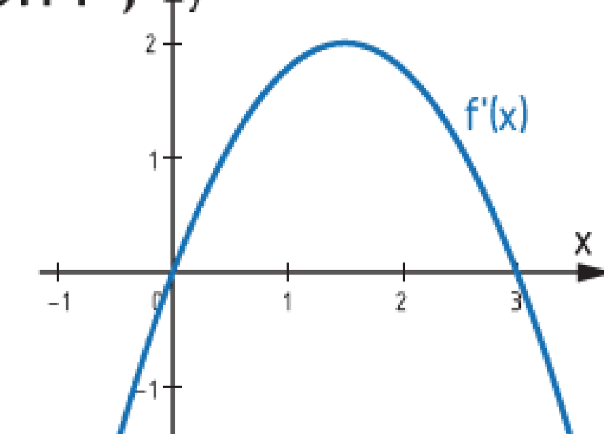
D) Wenn f′ bei $x = 1{,}5$ eine negative Steigung hat, fällt f in der unmittelbaren Umgebung von $x = 1{,}5$.

4.76 Überprüfe anhand der abgebildeten quadratischen Ableitungsfunktion f′, ob die folgenden Aussagen auf die Ausgangsfunktion f zutreffen: C

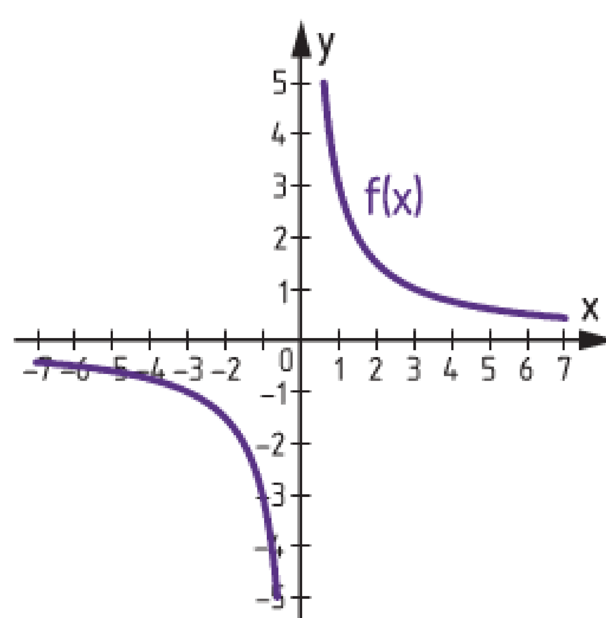
A) f hat zwei lokale Extremstellen.

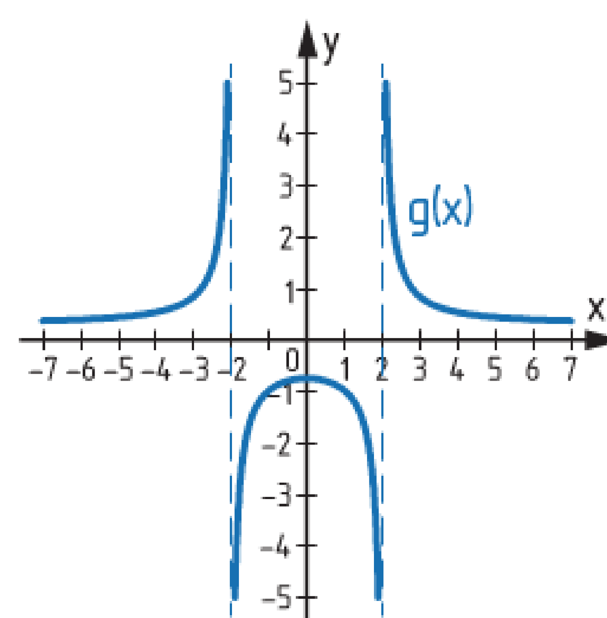
B) f hat keinen Wendepunkt.

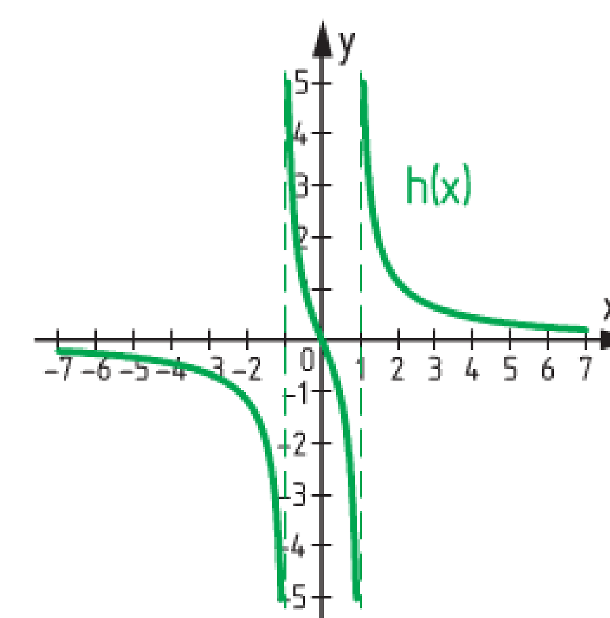
C) f ist im Intervall [1,5; 3] fallend.

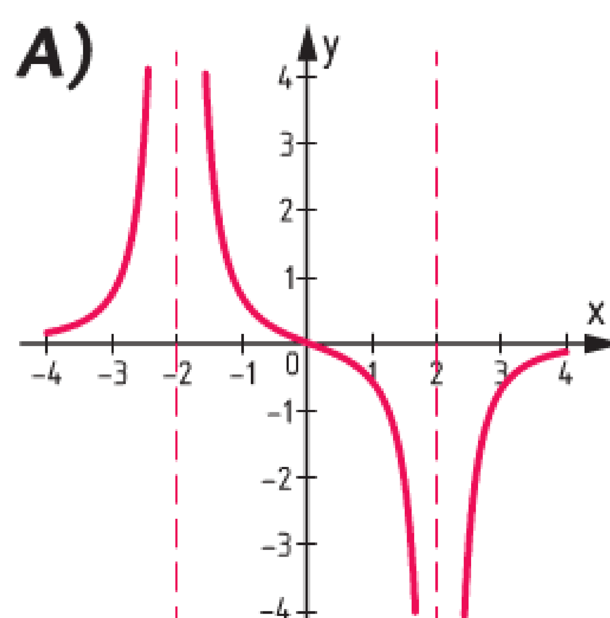


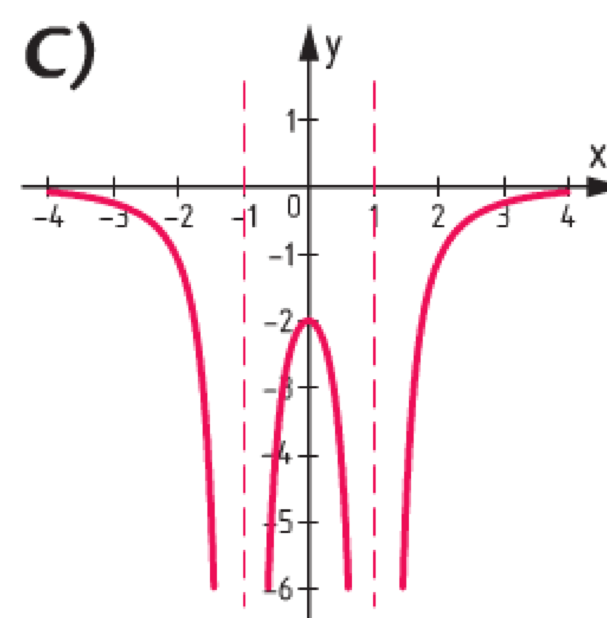
4.77 Ordne den Funktionen f, g und h jeweils die Graphen zu, die ihrer ersten bzw. zweiten Ableitung entsprechen zu. Begründe deine Auswahl. CD

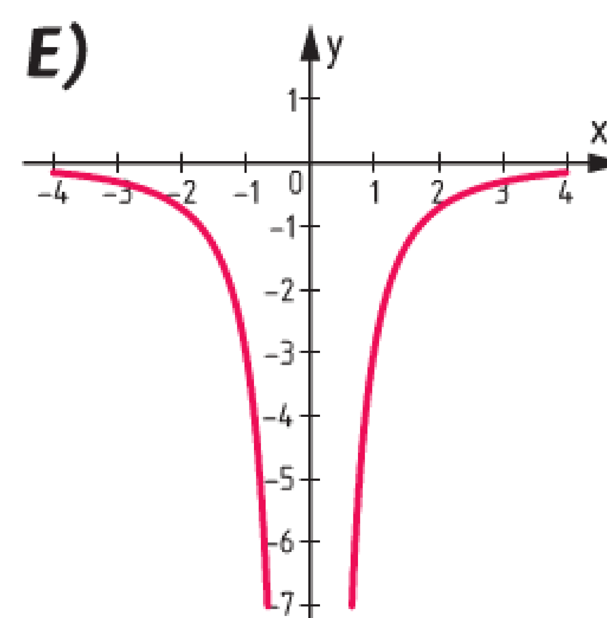


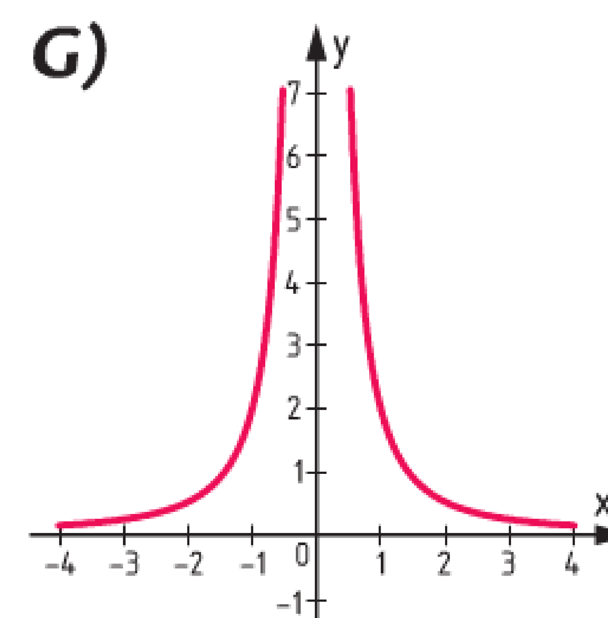


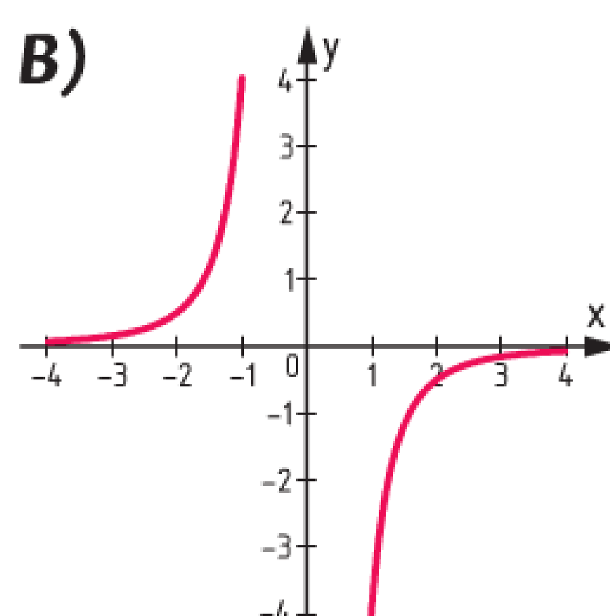


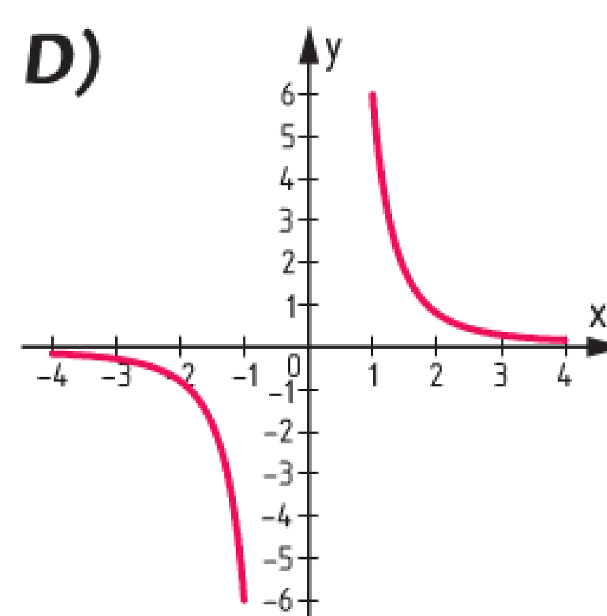
A)


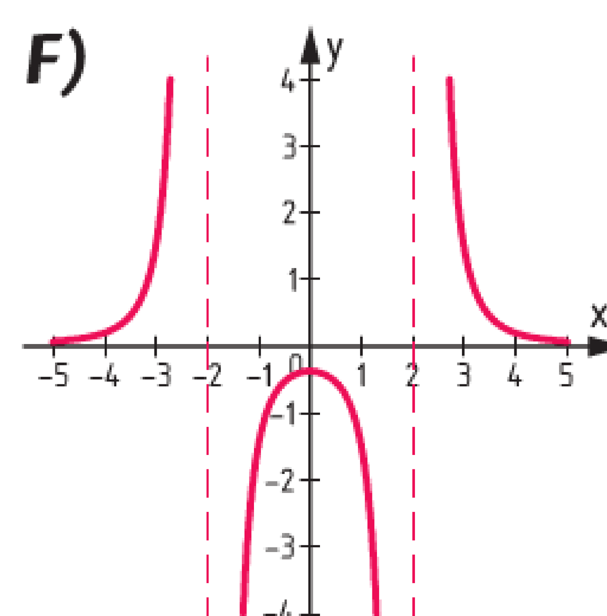
C)


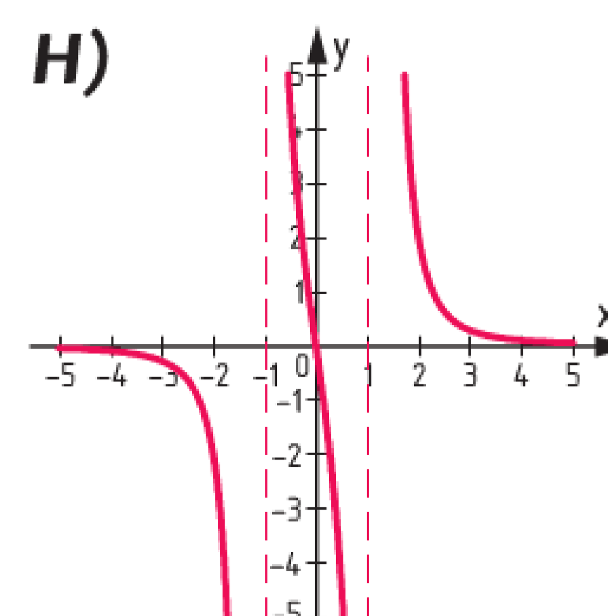
E)


G)


B)


D)


F)


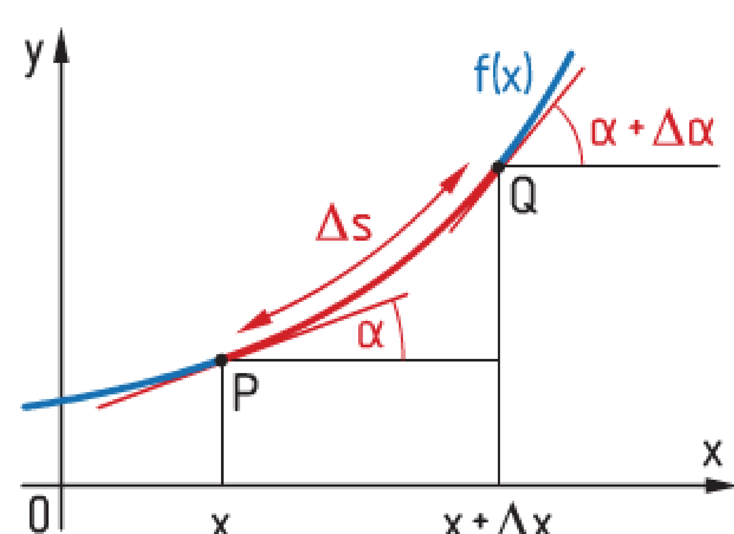
H)


Anwendungen der Differentialrechnung

Krümmung einer Kurve



Ein Autofahrer, der den markierten Weg auf dem abgebildeten Autobahnkreuz wählt, fährt eine Rechtskurve. Im Verlauf des Wegs ändert sich jedoch der Radius dieser Kurve. Um zu beschreiben, wie stark eine Kurve gekrümmt ist, gibt man das Ausmaß der Richtungsänderung, bezogen auf die Länge des Kurvenbogens, an.



Die mittlere Krümmung zwischen P und Q wird durch den Differenzenquotienten $\overline{\kappa} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ angegeben. Die **Krümmung** κ (κ ... „Kappa", griechischer Kleinbuchstabe) im Punkt P wird durch den Differentialquotienten $\kappa = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right) = \frac{d\alpha}{ds}$ angegeben.

Die Krümmung κ kann mithilfe der Ableitungen der gegebenen Funktion ermittelt werden.

$$\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow \alpha = \arctan(y') \Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1 + (y')^2} \cdot y''$$

Weiters gilt: $(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ bzw. für $\Delta x \to 0$: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}_{(y')^2}} \cdot dx$

Nach Umformen ergibt sich: $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$

Durch Anwenden der Kettenregel erhält man:

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{1 + (y')^2} \cdot y'' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}}$$

Eine aussagekräftigere Größe als die Krümmung ist der **Krümmungsradius** ρ. Es gilt: $\rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right|$

Für einen Kreis mit Radius r gilt für die Krümmung: $\kappa = -\frac{1}{r}$

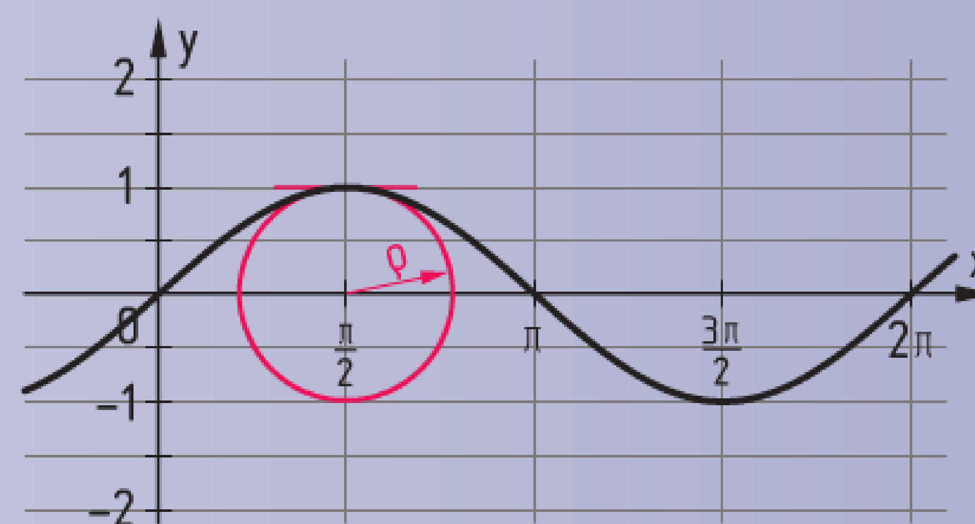
In jedem Punkt einer Kurve kann ein Kreis gezeichnet werden, der die Kurve in diesem Punkt berührt und dieselbe Krümmung wie die Kurve in P hat. Dieser Kreis wird **Krümmungskreis** genannt.

Krümmung einer Kurve

$\kappa(x) = \frac{y''(x)}{\sqrt{[1 + (y'(x))^2]^3}}$; $\rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right|$ ... Krümmungsradius

B **4.78** Ermittle die Krümmung und den Krümmungsradius der Funktion $y = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Stelle den Funktionsgraphen und den Krümmungskreis grafisch dar.

Lösung:



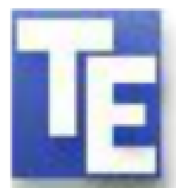
$y = \sin(x)$

$y' = \cos(x)$; $y'' = -\sin(x)$

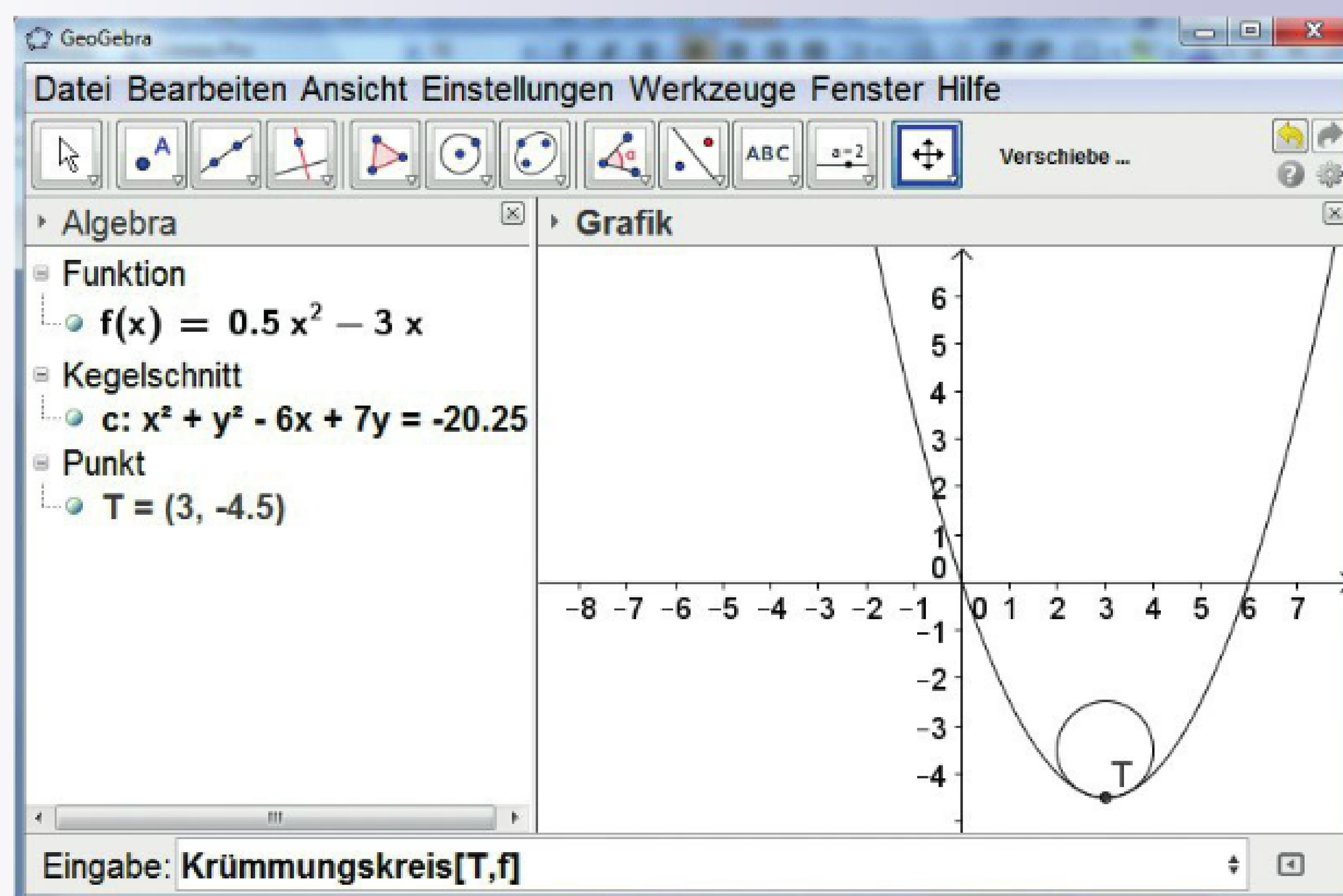
$\kappa(x) = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{[1 + \cos^2(x)]^3}}$

$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\left(1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^3}} = \frac{-1}{\sqrt{(1 + 0)^3}} = -1$; $\rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right| = 1$

4.79 Stelle den Krümmungskreis der Funktion $y = 0{,}5 \cdot x^2 - 3x$ im Extrempunkt grafisch dar. B



Lösung mit GeoGebra:

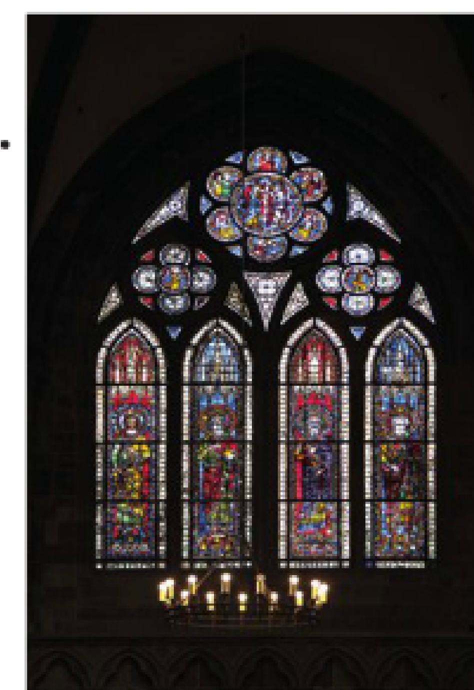


- Eingeben der Funktion: **f(x) = 0,5x² – 3x**
- Das Minimum wird mithilfe des Befehls **Min** ermittelt. Dazu müssen der Funktionsname und ein Intervall, in dem das Minimum liegt, eingegeben werden: **T = Min[f,0,6]**
- Mit dem Befehl **Krümmungskreis[T,f(x)]** kann der Krümmungskreis angezeigt werden. Man erhält die zugehörige Kreisgleichung unter dem Stichwort **Kegelschnitt**.

4.80 Stelle die Funktion $y = 3 \cdot \cosh\left(\frac{x}{3}\right) + 8$ grafisch dar. Ermittle die Krümmung und den Krümmungsradius im Extrempunkt der Funktion. Zeichne den Krümmungskreis in diesem Punkt. AB



4.81 Die Umrisse vieler Kirchenfenster können mit einer Parabel angenähert werden. Ein Fenster hat eine Höhe von 3 m und eine Spannweite von 4 m. AB



1) Wähle das Koordinatensystem so, dass die Endpunkte der Parabel auf der x-Achse liegen und die y-Achse durch den Scheitel verläuft. Ermittle die Funktionsgleichung der Parabel.

2) Am höchsten Punkt der Parabel soll ein kreisförmiges Ornament angebracht werden, das denselben Radius wie der Krümmungskreis der Parabel hat. Ermittle diesen Radius.

3) Zeichne das parabelförmige Fenster und das Ornament im Maßstab 1 : 50.

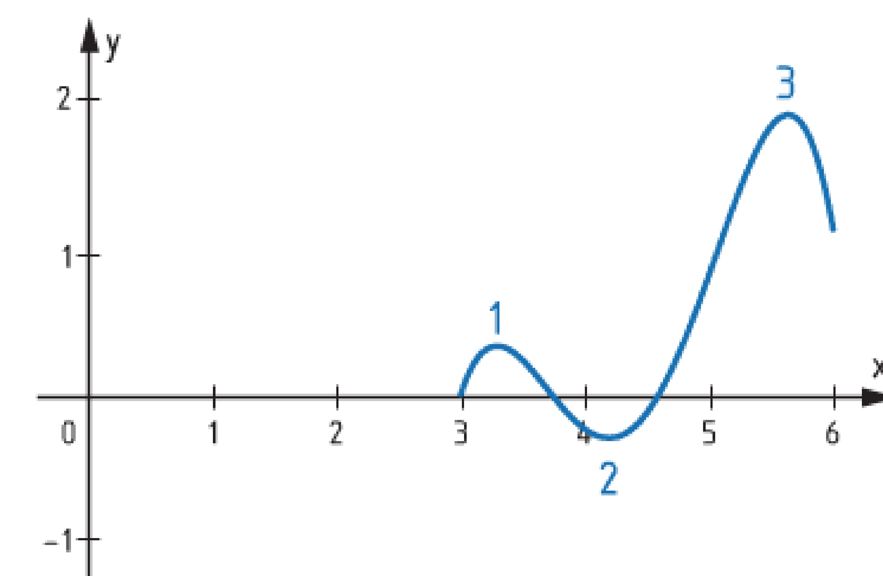
4.82 Ein Juwelier lädt zu einem Empfang ein. Jede Kundin bekommt ein Sektglas mit einer Perle als Begrüßung überreicht. Jede zwanzigste Kundin bekommt ein Glas mit einer besonders großen Glasperle. Ermittle, welchen Durchmesser eine Perle maximal haben kann, wenn die Perle genau am Boden des Glases aufliegen soll und der Längsschnitt des Glases innen näherungsweise durch die Funktion $y = 3x^2$ im Bereich $[-0{,}3; 0{,}3]$ (Angaben in dm) beschrieben werden kann. AB

4.83 Ein Streckenabschnitt einer Go-Kart-Strecke kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden (Angaben in km): ABC



$$y = -\frac{2}{3} \cdot (x-4)^4 + (x-4)^3 + \frac{13}{10} \cdot (x-4)^2 - \frac{3}{5} \cdot (x-4) - \frac{1}{5}$$

für $3 < x < 6$



Ein Warnschild soll vor der Kurve mit der kleinsten Krümmung aufgestellt werden. Ermittle, vor welcher der drei Kurven das Schild angebracht werden soll.

4.84 Zeige, dass im Scheitel einer Parabel mit $y = -ax^2 + c$ gilt: $\kappa = y''$ BD

4.3 Kurvenuntersuchung



Wird der Verlauf einer Funktion untersucht, spricht man von einer **Kurvenuntersuchung** oder **Kurvendiskussion**. Sie ermöglicht es, die charakteristischen Eigenschaften und Merkmale der Funktion im gesamten Funktionsverlauf anzugeben.
Dabei werden besondere Stellen und Punkte ermittelt, die von Interesse bei verschiedenen Problemstellungen sind.

Im Folgenden wird ein Grundschema zur Untersuchung von Funktionen angegeben, das bei Bedarf verändert bzw. angepasst werden kann.

- Die größtmögliche **Definitionsmenge** der Funktion wird angegeben, Unstetigkeitsstellen und deren Art werden angeführt. Im Allgemeinen geht man bei der Grundmenge von den reellen Zahlen aus.
- Ist die Funktion symmetrisch, so werden die **Symmetrieeigenschaften** angegeben.
- Bei periodischen Funktionen wird die **Periode** angegeben.
- Die Funktion wird auf **Nullstellen** überprüft.
- Die Anzahl und Art der **Extrempunkte** wird ermittelt.
- **Wendepunkte** werden ermittelt und, falls benötigt, die **Wendetangenten** angegeben.
- Gegebenenfalls werden **Grenzwerte** und **Asymptoten** angegeben.
- Die Funktion wird mithilfe der ermittelten Punkte **grafisch** dargestellt.

4.3.1 Kurvendiskussion von Polynomfunktionen

Polynomfunktionen werden durch eine Funktionsgleichung folgender Art angegeben:
$\mathbf{f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}$ mit $n \in \mathbb{N}$

ZB: Es soll die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2$ untersucht werden.

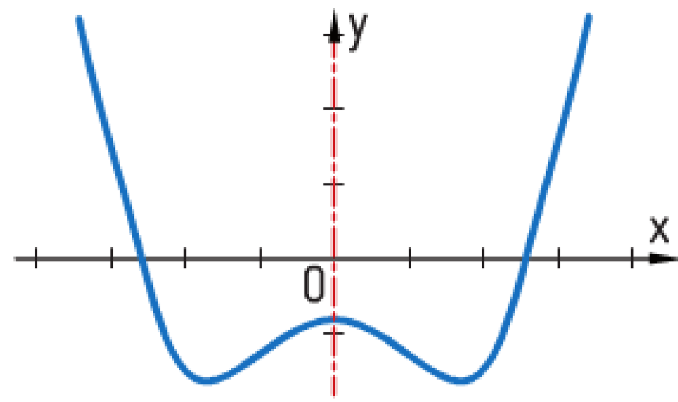
$f'(x) = 3x^2 + 6x$ $\quad f''(x) = 6x + 6$	• Zuerst werden die Ableitungen ermittelt.
$D_f = \mathbb{R}$	• Die Polynomfunktion ist für alle reellen Zahlen definiert.
Nullstellen: $f(x) = 0$ $x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 0$ $N_1(-3\|0), N_2(0\|0)$	• Ermittlung der Nullstellen
Extrempunkte: $f'(x) = 0$ $3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0$	• Erste Ableitung gleich null setzen
Art der Extrempunkte: $f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow H$ $f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow T$	• Mithilfe der zweiten Ableitung wird überprüft, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt. In einem Hochpunkt ist die Krümmung negativ und in einem Tiefpunkt positiv.
$f(-2) = 4 \Rightarrow H(-2\|4)$ $f(0) = 0 \Rightarrow T(0\|0)$	• Berechnung der zugehörigen Funktionswerte und Angabe der Punkte
Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$	• Zweite Ableitung gleich null setzen
$f(-1) = 2 \Rightarrow W(-1\|2)$	• Berechnung des zugehörigen Funktionswerts und Angabe des Wendepunkts

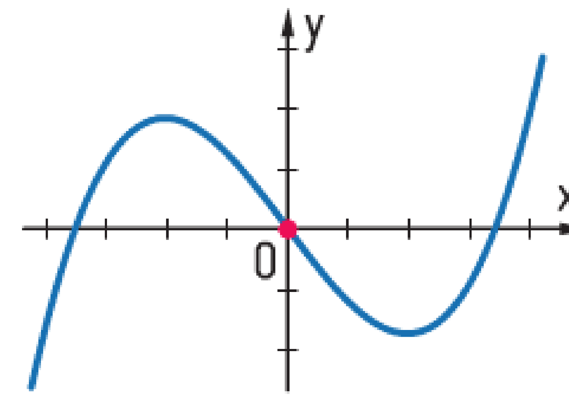
Auf die grafische Darstellung wird hier verzichtet.

Anwendungen der Differentialrechnung

Für Polynomfunktionen kann man folgende allgemein gültige Aussagen treffen:

- Polynomfunktionen sind für alle reellen Zahlen definiert.
- Symmetrieeigenschaften können anhand der Funktionsgleichung angegeben werden.

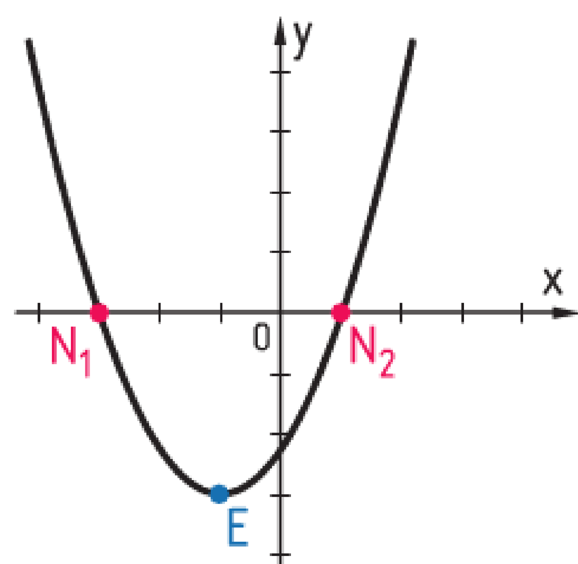




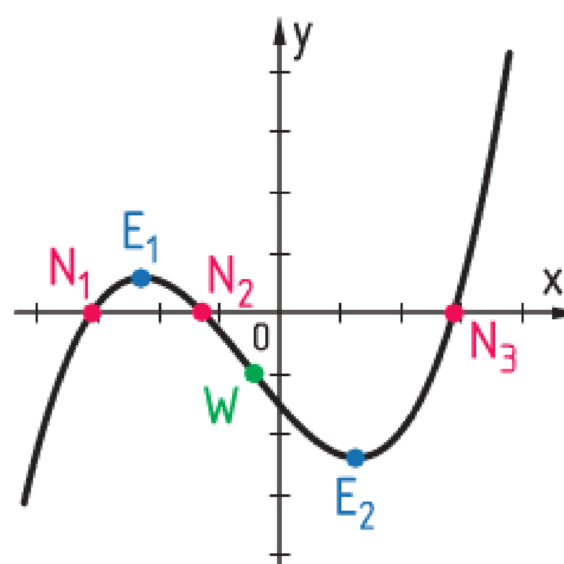
Enthält eine Polynomfunktion ausschließlich **gerade Exponenten**, ist sie **symmetrisch zur y-Achse**. Man spricht von einer **geraden** Funktion.

Enthält die Funktion ausschließlich **ungerade Exponenten**, ist sie **punktsymmetrisch zum Ursprung**. Man spricht von einer **ungeraden** Funktion.

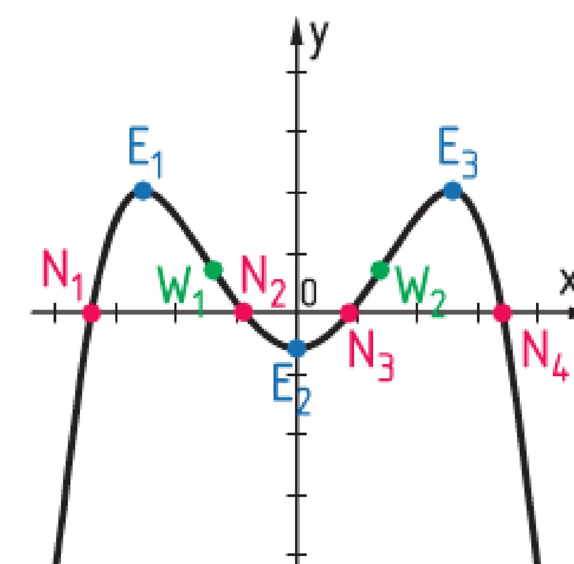
- Die maximale Anzahl von Nullstellen, Extrempunkten und Wendepunkten ist am Grad des Polynoms erkennbar. Da eine Gleichung n-ten Grads höchstens n reelle Lösungen hat (vgl. Band 1, Abschnitt 7.5, Fundamentalsatz der Algebra), kann eine Polynomfunktion n-ten Grads maximal n Nullstellen haben. Aus der Ableitungsregel für Potenzfunktionen ergibt sich weiters, dass sie höchstens (n – 1) Extrempunkte und (n – 2) Wendepunkte haben kann. Zum Beispiel:



n = 2
2 Nullstellen
1 Extrempunkt
0 Wendepunkte



n = 3
3 Nullstellen
2 Extrempunkte
1 Wendepunkt



n = 4
4 Nullstellen
3 Extrempunkte
2 Wendepunkte

- Das Verhalten für $x \to \pm\infty$ hängt vom Grad n des Polynoms und dem Vorzeichen des Koeffizienten der höchsten vorkommenden Potenz ab.

n gerade		n ungerade	
$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$

Ist der Grad n der Funktion gerade, so gilt: Ist $a_n > 0$, dann kommt die Funktion von $+\infty$ und geht gegen $+\infty$. Ist $a_n < 0$, dann kommt die Funktion von $+\infty$ und geht gegen $-\infty$.

Ist der Grad n der Funktion ungerade, so gilt: Ist $a_n > 0$, dann verläuft die Funktion von $-\infty$ nach $+\infty$. Ist $a_n < 0$, dann geht die Funktion von $+\infty$ nach $-\infty$.

BC **4.85** Diskutiere die Funktion $y = \frac{1}{12}x^4 - x^2$. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

Lösung:

$y = \frac{1}{12}x^4 - x^2 \quad y'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x \quad y''(x) = x^2 - 2$ Ich bilde die ersten beiden Ableitungen.

1) Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$

2) Symmetrie:
Da die Funktionsgleichung nur gerade Exponenten enthält, handelt es sich um eine gerade Funktion, der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

3) Berechnung der Nullstellen: f(x) = 0

$\frac{1}{12}x^4 - x^2 = 0$

$\frac{1}{12}x^2 \cdot (x^2 - 12) = 0$

$x = 0$ oder $x^2 = 12 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2\sqrt{3}, x_3 = 2\sqrt{3}$

$N_1(-2\sqrt{3}|0), N_2(0|0), N_3(2\sqrt{3}|0)$

4) Berechnung der Extrempunkte: f′(x) = 0

$\frac{1}{3}x^3 - 2x = 0$

$\frac{1}{3}x \cdot (x^2 - 6) = 0$

$x = 0$ oder $x^2 = 6 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{6}, x_3 = \sqrt{6}$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt; $f(0) = 0 \Rightarrow H(0|0)$

$f''(\pm\sqrt{6}) = 4 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt

$f(\pm\sqrt{6}) = \frac{1}{12} \cdot 36 - 6 = -3 \Rightarrow T_1(-\sqrt{6}|-3), T_2(\sqrt{6}|-3)$

Überprüfung der Extremwerte durch Einsetzen in die zweite Ableitung.

5) Berechnung der Wendepunkte: f″(x) = 0

$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$

$f(\pm\sqrt{2}) = \frac{1}{12} \cdot 4 - 2 = -\frac{5}{3}$

$W_1\left(-\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{5}{3}\right), W_2\left(\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{5}{3}\right)$

6) Wendetangenten: y = kx + d

$y'(-\sqrt{2}) = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} \Rightarrow k_1$

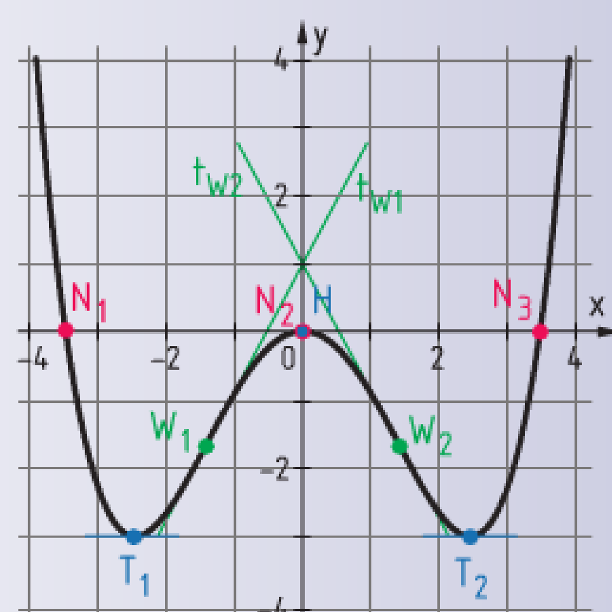
$-\frac{5}{3} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot (-\sqrt{2}) + d \Rightarrow d = 1$

$t_{W_1}: y = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3}x + 1$

$t_{W_2}: y = -\frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3}x + 1$

Ich berechne die Steigung im Wendepunkt mithilfe der ersten Ableitung. Den y-Achsenabstand d ermittle ich durch Einsetzen des Wendepunkts in die Geradengleichung. Aufgrund der Symmetrie ergibt sich die Gleichung der zweiten Tangente.

7) Funktionsgraph:



Nun kann ich den Funktionsgraphen anhand der ermittelten Punkte zeichnen.

4.86 Stelle die Funktion $f(x) = \frac{1}{81} \cdot (x^5 - 15x^3)$ grafisch dar. Beschreibe die Eigenschaften der Funktion anhand des Graphen. BC TE

4.87 Ermittle die Extrempunkte und den Wendepunkt der Funktion. B

a) $y = x^3 - 2x^2 - 15x$ **b)** $y = x^3 - 2x - 2$ **c)** $y = x^3 - 12x + 1$

4.88 **1)** Gib an, wie viele Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte bei der gegebenen Funktion maximal auftreten können. BC

2) Führe die Kurvenuntersuchung durch.

3) Stelle die Funktion grafisch dar und zeichne alle ermittelten Punkte sowie die Wendetangenten ein.

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$ **c)** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ **e)** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ **d)** $f(x) = -\frac{x^4}{3} + x^3$ **f)** $f(x) = \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{2}x^3$

4.89 Diskutiere die gegebene Funktion. Dokumentiere deine Vorgehensweise. BC TE

a) $f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{27}{8}x^2 + 18x - 24$ **d)** $f(x) = \frac{5}{27}x^3 - \frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{3}x$

b) $f(x) = \frac{1}{27} \cdot (16x^3 - 120x^2 + 192x + 47)$ **e)** $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 6$

c) $f(x) = x^3 + 1{,}9x^2 + 0{,}3x + 1$ **f)** $f(x) = 0{,}8x^4 + 1{,}5x^3 - 2{,}4x$

4.90 Die Anzahl der Besucher, die an einer Spielemesse zwischen 10:00 Uhr und 19:30 Uhr teilnehmen, kann durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden: ABCD TE



$x(t) = -0{,}16t^3 + 1{,}4t^2 - 2{,}3t + 4{,}565$

x … Anzahl der Besucher in 1 000

t … Zeit in Stunden nach Beginn der Veranstaltung

1) Wie viele Besucher sind eine Stunde nach Beginn der Veranstaltung anwesend?

2) In welchem Zeitraum nimmt die Zahl der Besucher zu, in welchem nimmt sie ab?

3) Um wie viel Uhr ist die maximale Besucherzahl erreicht? Wie viele Besucher waren es zu dieser Zeit?

4) Um wie viel Uhr ist der Andrang an der Kasse am größten? Begründe deine Antwort.

5) Wenn mindestens 5 000 Besucher anwesend sind, wird ein zusätzlicher Saal geöffnet. Für welchen Zeitraum ist das zu erwarten?

4.91 Nach heftigen Unwettern wurde eine Kleinstadt durch einen Fluss überflutet. Die Höhe h (in cm) des Wasserstands in der Stadt lässt sich durch die folgende Funktion annähernd beschreiben: ABC TE

$h(t) = \frac{2}{27}t^4 - \frac{16}{9}t^3 + \frac{32}{3}t^2 + 24 \quad 0\,d \leq t \leq 12\,d$

t … Zeit in Tagen (d) nach Beginn der Messung

1) Wie hoch war der Wasserstand am Beginn der Messung bzw. drei Tage nach deren Beginn?

2) Ermittle, am wie vielten Tag der höchste Wasserstand gemessen wurde. Wie hoch war er zu diesem Zeitpunkt?

3) Gib an, wie stark das Wasser während des dritten Tags im Mittel gestiegen ist.

4) Wie lang nach Beginn der Messung war der stärkste Anstieg zu verzeichnen?

5) Berechne, nach wie vielen Tagen der Wasserstand 80 cm betrug.

6) Die Bevölkerung konnte mit den Aufräumungsarbeiten beginnen, als der Wasserstand weniger als 30 cm betrug. Am wievielten Tag nach Beginn der Messung konnten daher die Arbeiten beginnen?

Anwendungen der Differentialrechnung

ABC TE **4.92** In einer Gärtnerei wurde die Anzahl einer Sorte Pflanzenschädlinge nach erstmaligem Einsatz eines Schädlingsbekämpfungsmittels auf einer Pflanze untersucht. Die Anzahl S der Schädlinge in Abhängigkeit von der Zeit t nach dem erstmaligen Einsatz kann annähernd durch folgende Funktion angegeben werden:



$S(t) = -\frac{341}{720}t^4 + \frac{7\,987}{720}t^3 - \frac{3\,626}{45}t^2 + \frac{2\,137}{12}t + 60 \quad 0 \leq t < 12$, t ... Zeit in Wochen

1) Stelle die Funktion grafisch dar. Beschreibe mit eigenen Worten, wie sich das Schädlingsbekämpfungsmittel auf die Anzahl der Pflanzenschädlinge auswirkt.
2) Gib die Anzahl der Schädlinge zu Beginn an.
3) Wann wurden innerhalb der ersten acht Wochen die wenigsten Schädlinge gezählt? Wie viele wurden gezählt?
4) Ermittle die Anzahl der Schädlinge nach acht Wochen.
5) Nach welcher Zeit waren die Pflanzen theoretisch frei von Schädlingen?

ABC TE **4.93** Die Anzahl der Kunden eines neueröffneten Elektronikgeschäfts in der Zeit zwischen 9:00 Uhr und 19:00 Uhr lässt sich annähernd durch eine Funktion vierten Grads beschreiben: $K(t) = -0{,}3t^4 + 4{,}4t^3 - 14{,}1t^2 - 6{,}7t + 80$
K ... Anzahl der zum Zeitpunkt t anwesenden Kunden,
t ... Zeit in Stunden nach der Eröffnung des Geschäfts

1) Gib an, wie viele Personen zur Eröffnung um 9:00 Uhr das Geschäft betraten.
2) Ermittle, um welchen Wert sich die Anzahl der Kunden bis 10:00 Uhr geändert hat.
3) Bestimme, wie sich die Kundenanzahl im Mittel zwischen 10:00 Uhr und 15:00 Uhr geändert hatte.
4) Wann waren die wenigsten Kunden im Geschäft? Wie viele waren es?
5) Um wie viel Uhr war die Anzahl der Kunden am größten? Wie viele Kunden waren zu diesem Zeitpunkt im Geschäft?
6) Stelle die Ableitungsfunktion K′ grafisch dar und argumentiere, um wie viel Uhr sich die Anzahl der Kunden am stärksten änderte.
7) Als die Anzahl der Kunden mehr als 100 betrug, mussten zusätzliche Sicherheitsleute am Eingang positioniert werden. Für welche Zeitspanne war das der Fall?

ABC TE **4.94** Der Profilschnitt eines Eisbergs oberhalb des Meeresspiegels lässt sich annähernd durch eine Polynomfunktion vierten Grads beschreiben (Angaben in Meter):
$y(x) = 0{,}01 \cdot (-0{,}002x^4 + 0{,}19x^3 - 5{,}28x^2 + 63{,}28x)$ für $0\text{ m} \leq x \leq 60\text{ m}$
y ... Höhe des Bergs über dem Meeresspiegel
x ... waagrechter Abstand vom linken Rand



1) Ermittle, an welcher Stelle der Berg bei diesem Profilschnitt die größte Höhe hat. Wie hoch ist diese?
2) Gib an, an welcher Stelle zwischen [25 m; 40 m] der Berg bei diesem Profilschnitt am steilsten ist.
3) Gib die mittlere Steigung zwischen [25 m; 40 m] an.
4) Berechne, unter welchen Winkeln der Eisberg aus dem Wasser ragt.
5) Ermittle, an welchen Stellen des Profilschnitts der Eisberg genau einen Meter über dem Meeresspiegel ist.

BD **4.95** Die Polynomfunktion $y = \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{7}{9}$ hat den Tiefpunkt T(1|0) und den Hochpunkt H(−2|3).
1) Überprüfe die gegebenen Extrempunkte.
2) Zeige, dass diese beiden Punkte symmetrisch zum Wendepunkt liegen..

4.3.2 Kurvendiskussionen von gebrochen rationalen Funktionen

In Abschnitt 2 wurden Unstetigkeitsstellen von gebrochen rationalen Funktionen sowie das Verhalten der Funktionen für $x \to \pm\infty$ untersucht. Bei der Kurvendiskussion von gebrochen rationalen Funktionen müssen diese Eigenschaften noch zusätzlich berücksichtigt werden.

B

4.96 Diskutiere die Funktion: $y = \frac{1}{1 - x^2}$

Lösung:

$y = \frac{1}{1 - x^2}$ $y'(x) = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$ $y''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(1 - x^2)^3}$

1) Definitionsmenge:

Polstellen: $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$

senkrechte Asymptoten: $a_1: x = -1$

$a_2: x = 1$

- Nullstellen des Nenners ermitteln und senkrechte Asymptoten angeben

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

- Angeben der Definitionsmenge

2) Symmetrie:

Die Funktion enthält nur Potenzen mit geraden Hochzahlen. Es handelt sich um eine gerade Funktion

3) Nullstellen: $y(x) = 0$

$\frac{1}{1 - x^2} = 0$

Es gibt keine Nullstellen.

- Ein Bruch hat genau dann den Wert null, wenn sein Zähler null ist.

4) Extrempunkte: $y'(x) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$y''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$y(0) = 1 \Rightarrow T(0|1)$

- Ermitteln des Extrempunkts

5) Wendepunkte: $y''(x) = 0$

$6x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$

Es gibt keine reellen Lösungen.

Es gibt keine Wendepunkte.

- Ermitteln des Wendepunkts

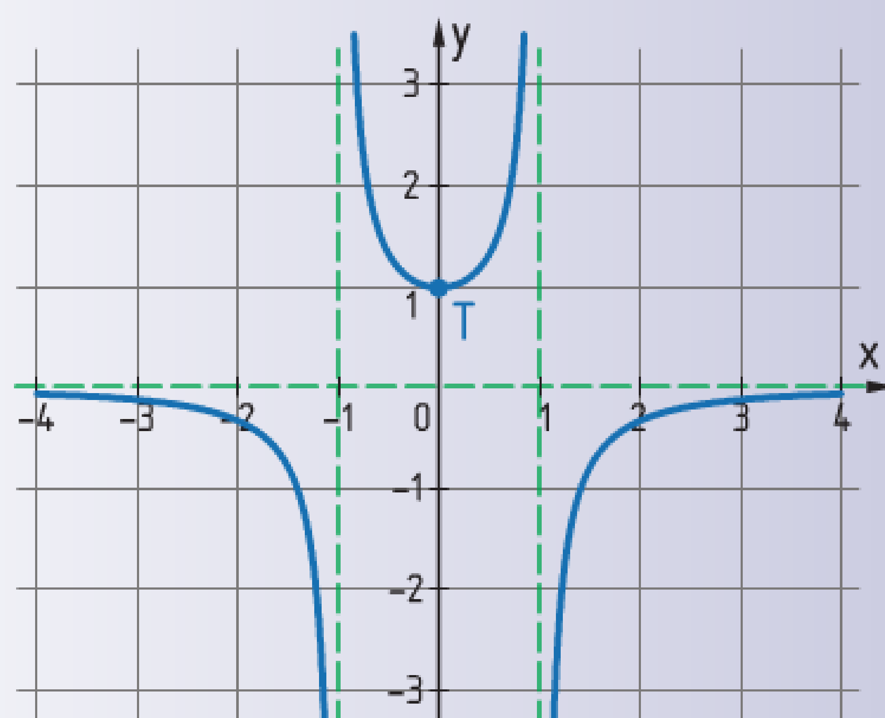
6) Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{1 - x^2}\right) = 0$

waagrechte Asymptote bei a_3: $y = 0$

- Gebrochen rationale Funktion, Grad des Zählers < Grad des Nenners

7) Funktionsgraph:



- für $x < -1$: negative Funktionswerte
  für $-1 < x < 1$: positive Funktionswerte
  für $x > 1$: negative Funktionswerte

B **4.97** Untersuche die Funktion: $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$



Lösung mit Mathcad:

$f(x) := \frac{x^3}{3 - x^2}$ $fs(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ sammeln $\rightarrow -\frac{x^4 - 9\cdot x^2}{x^4 - 6\cdot x^2 + 9}$

$fss(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x)$ sammeln $\rightarrow -\frac{6\cdot x^3 + 54\cdot x}{x^6 - 9\cdot x^4 + 27\cdot x^2 - 27}$

Definitionsmenge:

$3 - x^2 = 0$ auflösen $\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ Definitionsmenge: $D_f = R \setminus \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

senkrechte Asymptoten: a_1: $x = \sqrt{3}$, a_2: $x = -\sqrt{3}$

Nullstellen:

$f(x) = 0$ auflösen $\rightarrow 0$ Nullstelle N(0|0)

Extremwerte:

$x^4 - 9\cdot x^2 = 0$ auflösen $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$fss(3) \rightarrow -\frac{3}{2}$ ... Maximum $f(3) \rightarrow -\frac{9}{2}$ H(3| -4,5)

$fss(-3) \rightarrow \frac{3}{2}$ ... Minumum $f(-3) \rightarrow \frac{9}{2}$ T(-3|4,5)

$fss(0) \rightarrow 0$ $fs(-0.1) = 0.01$ $fs(0.1) = 0.01$

Die Steigung der Funktion f(x) ist links und rechts von x = 0 positiv, an der Stelle x = 0 ist daher kein Extremwert sondern ein Sattelpunkt.

Wendepunkte:

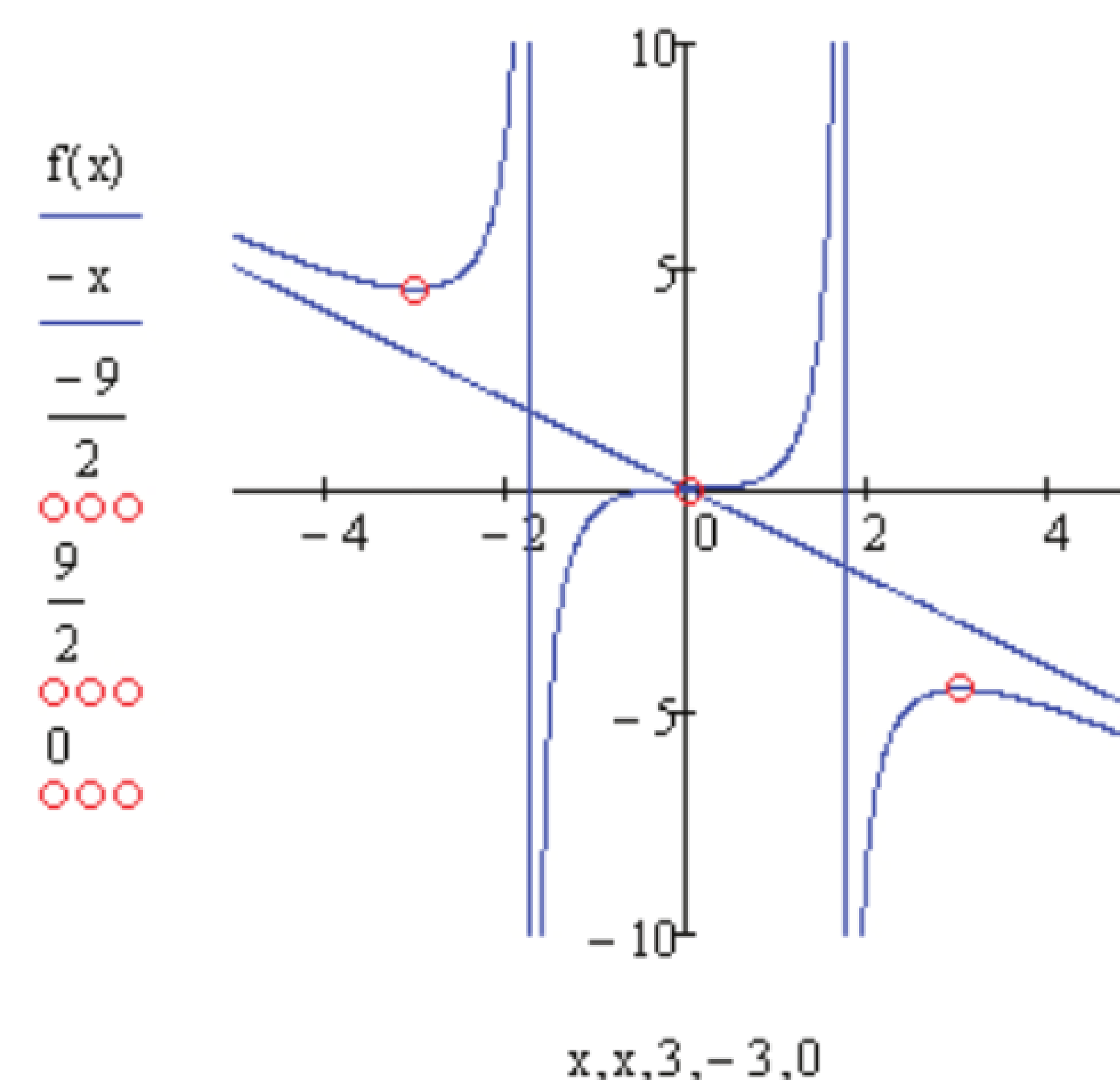
$6\cdot x^3 + 54\cdot x = 0$ | auflösen, annehmen, x = reell $\rightarrow 0$ $f(0) = 0$

Sattelpunkt S (0|0)

keine weiteren Wendepunkte

Verhalten für x→ ∞:

$f(x)$ parfrac $\rightarrow -x - \frac{3\cdot x}{x^2 - 3}$ Schräge Asymptote: y = -x



4.98 Lies möglichst viele Eigenschaften der in Abbildung 4.1 dargestellten Funktion ab. C

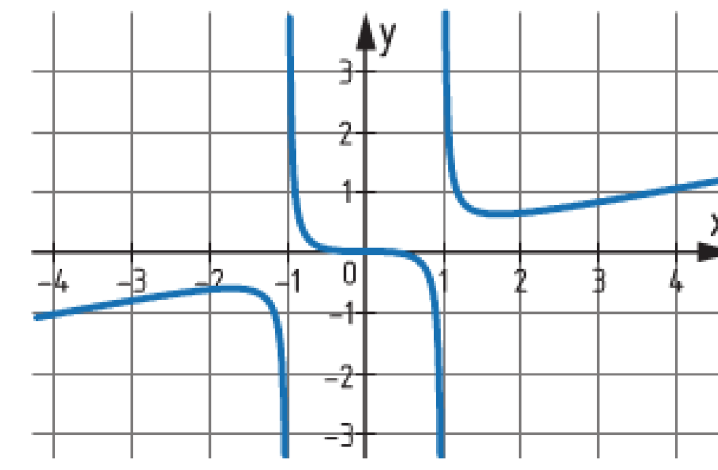


Abb. 4.1

4.99 Nach Eingabe der Funktion $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ in einen grafikfähigen Taschenrechner erhält ein Schüler die in Abbildung 4.2 dargestellte Funktion. BD

1) Argumentiere, warum diese grafische Darstellung der Funktion nicht richtig sein kann.
Überlege, warum ein Grafikprogramm die Funktion so anzeigt.

2) Stelle die Funktion richtig dar.

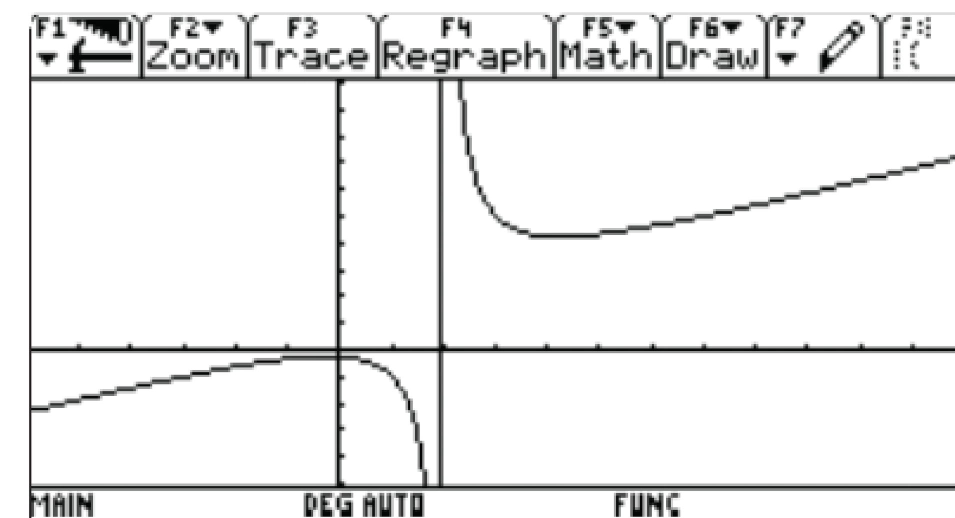


Abb. 4.2

Aufgaben 4.100 – 4.102: Diskutiere die Funktionen.

4.100 **a)** $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ **b)** $f(x) = \frac{2}{9 - x^2}$ **c)** $y = \frac{1}{(x - 1)^2}$ **d)** $f(x) = \frac{-2}{(4 - x)^2}$ B

4.101 **a)** $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ **b)** $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ **c)** $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$ **d)** $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ B

4.102 **a)** $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ **b)** $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ **d)** $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ B

4.103 Ermittle jeweils die Extrempunkte, Wendepunkte und Wendetangenten der beiden Funktionen $f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$ und $g(x) = \frac{24}{x^2 + 12}$. Vergleiche die Ergebnisse. Was fällt dir auf? BC

4.104 Die Bevölkerungsentwicklung B einer Kleinstadt lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben: $B(t) = \frac{150t}{5 + t^2} + 200$ AB

B … Anzahl der Bevölkerung in 1 000, t … Zeit in Jahren, $t \geqslant 0$

1) Zeichne den Graphen der Funktion.

2) Berechne, nach wie viel Jahren die Bevölkerungsanzahl ein Maximum erreichen wird, wenn man von diesem Modell ausgeht. Wie viele Bewohner leben dann in der Kleinstadt?

4.105 Aufgrund einer Krankheit erhält ein Patient eine Injektion. Nach der Injektion nimmt die Wirkstoffmenge M in einem Liter Blut mit der Zeit t (in Stunden ab Beginn der Injektion) ab und lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben: ABD

$M(t) = \frac{M_0 \cdot t}{t^2 + 1}$ mit $M_0 = 1{,}5\ m\ell$ M … Wirkstoffmenge in einem Liter Blut in $m\ell$

1) Stelle die Funktion grafisch dar.

2) Ermittle, nach welcher Zeit die Wirkstoffmenge im Blut ein Maximum erreicht hat.

3) Erkläre, ob der Wirkstoff theoretisch jemals vollständig abgebaut wird.

4.106 Eine elektrische Doppelleitung besteht aus zwei parallelen Leitern der Länge ℓ die entgegengesetzt gleichstark mit der Ladung Q aufgeladen sind. Die elektrische Feldstärke E in deren Umgebung lässt sich in Luft durch die folgende Funktion angeben: ABC

$E(x) = \frac{a \cdot Q}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2}$ $|x| \neq a$ ε_0 … elektrische Feldkonstante
E … elektrische Feldstärke in $\frac{V}{m}$

a … Abstand der beiden Leiter,
x … x-Koordinate eines Punkts auf der Verbindungslinie der beiden Leiter

1) Diskutiere die Funktion und skizziere sie.

2) Beschreibe das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.

4.3.3 Kurvendiskussionen weiterer Funktionen

Funktionen, die weder Polynomfunktionen noch gebrochen rationale Funktionen sind, nennt man auch nichtrationale Funktionen. Dazu gehören zum Beispiel Wurzelfunktionen, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen oder logarithmische Funktionen.

BC **4.107** Untersuche die Kettenlinie $y = \frac{a}{2} \cdot (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $a > 0$. Sie gibt die Form einer biegsamen, nicht beschwerten Kette an, die an zwei Punkten frei aufgehängt ist. Stelle die Funktion für a = 3 grafisch dar und gib an, welche Bedeutung der Wert von a hat.

Lösung:

$y(x) = \frac{a}{2} \cdot (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ $\quad y'(x) = \frac{a}{2} \cdot \left[e^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} + e^{-\frac{x}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)\right] = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}$ $\quad y''(x) = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2a}$

1) Definitionsmenge:
$D_f = \mathbb{R}$

2) Symmetrie:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \\ y(-x) &= \frac{a}{2} \cdot \left(e^{-\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x) = y(-x)$$

- $y(x) = y(-x) \Rightarrow$ gerade Funktion
  Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

3) Nullstellen: $y(x) = 0$

$\frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = 0$

$e^{\lambda \cdot x} > 0 \;\; \forall x, \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad$ keine Nullstellen

4) Extrempunkte: $y'(x) = 0$

$e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} = 0 \quad | \cdot e^{\frac{x}{a}}$

$e^{\frac{2x}{a}} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^{\frac{2x}{a}} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{2x}{a} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

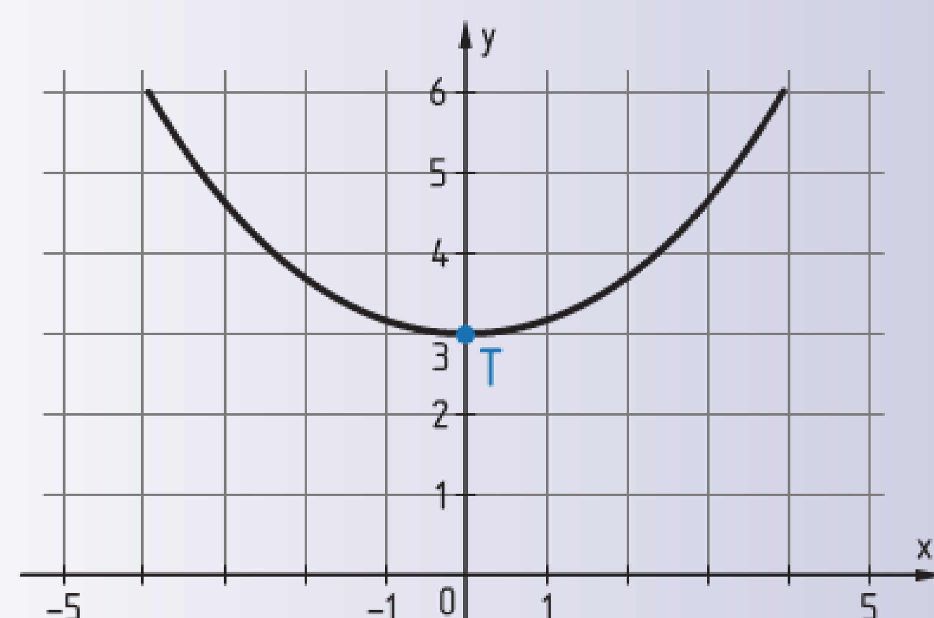
$y''(0) = \frac{1}{a} > 0 \;\Rightarrow\;$ Minimum

$y(0) = a \;\Rightarrow\; T(0|a)$

5) Wendepunkt: $y''(x) = 0$

$e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} = 0$ ... Es gibt keine Lösung.
$\Rightarrow$ keine Wendepunkte

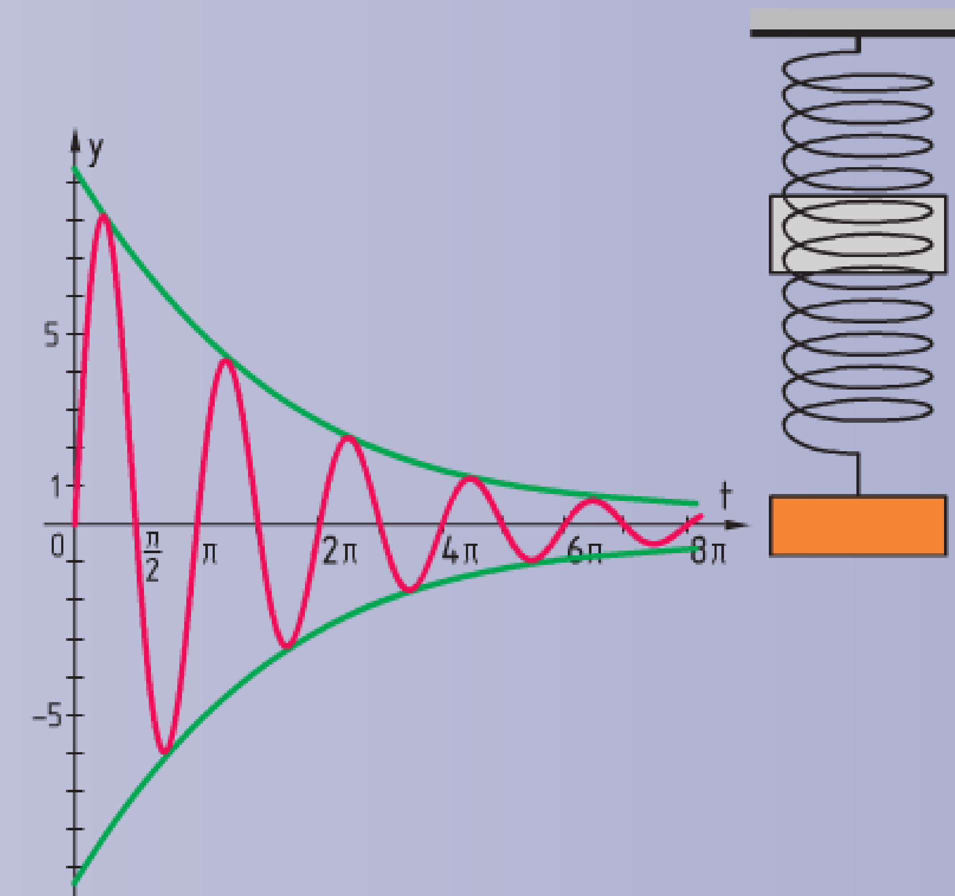
6) Funktionsgraph für $y = \frac{3}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)$



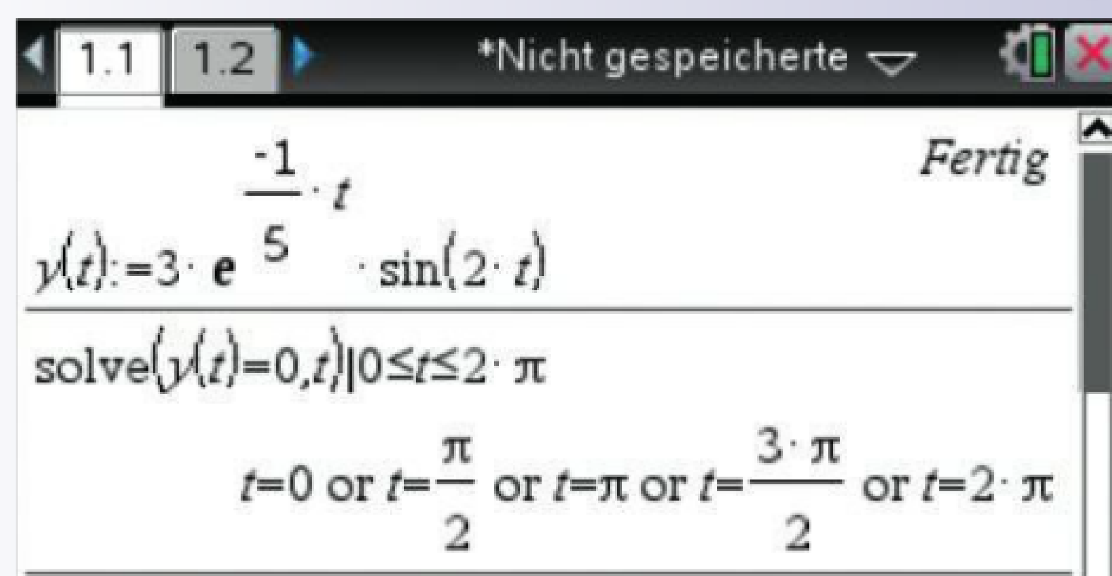
Der Wert von a gibt an, auf welcher Höhe über dem Koordinatenursprung der tiefste Punkt der Funktion liegt.

BC TE

4.108 In der Praxis kommen oft gedämpfte Schwingungen vor. Bei deren Beschreibung treten Funktionen folgender Bauart auf: $y(t) = c \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(b \cdot t),\ t \geqslant 0$
Untersuche die Funktion für $a = \frac{1}{5}\,s^{-1}$, $b = 2\,s^{-1}$, $c = 3\,m$ im Intervall $[0s;\ 2\pi s]$. Stelle die Funktion mit der Einhüllenden $g_{1,2}(t) = \pm C \cdot e^{-a \cdot t}$ grafisch dar und ermittle die Berührpunkte. Vergleiche die Lage der Extrempunkte mit jener der Berührpunkte.



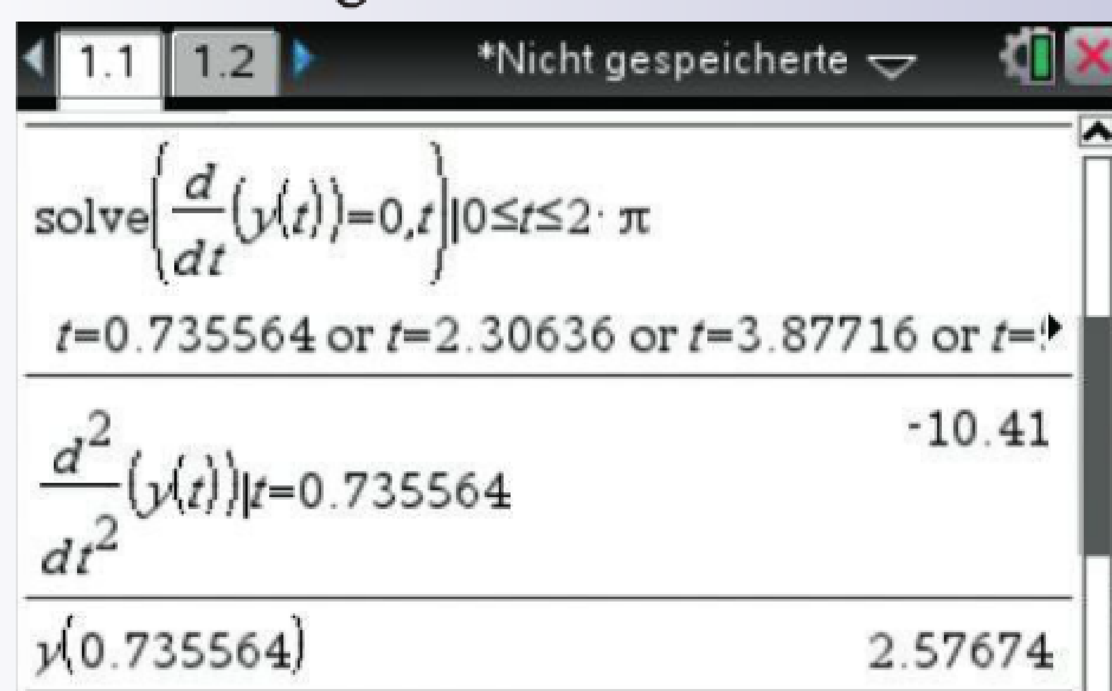
Lösung mit TI-Nspire:
Definition der Funktion, Berechnung der Nullstellen:



- Die Funktion wird gespeichert.
- Die Nullstellen werden mithilfe des Befehls **solve** ermittelt. Dabei kann ein Bereich vorgegeben werden.

$N_1(0|0)$, $N_2(\frac{\pi}{2}|0)$, $N_3(\pi|0)$, $N_4(\frac{\pi}{2}|0)$, $N_5(2\pi|0)$

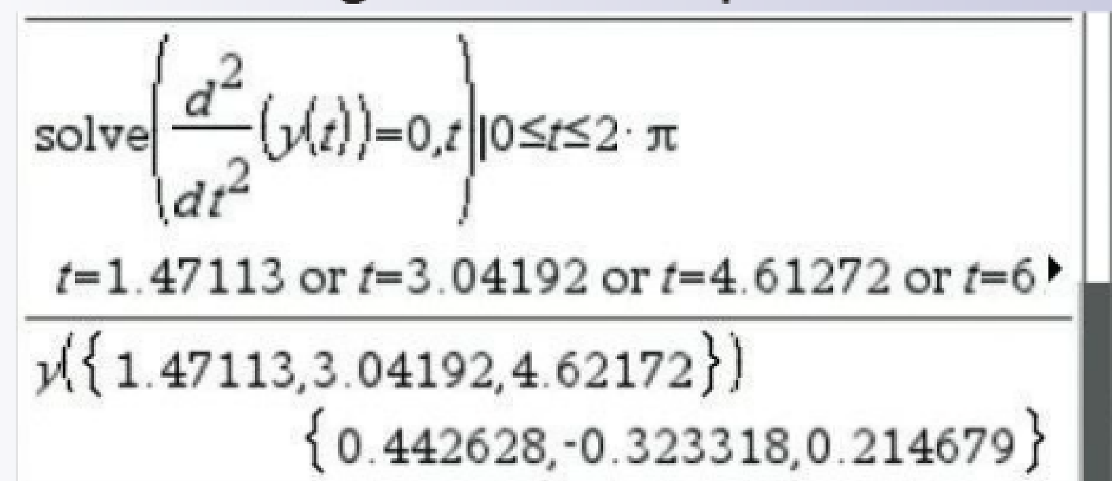
Berechnung der Extremwerte:



- Das Nullsetzen der 1. Ableitung kann direkt erfolgen.
- Der Wert der 2. Ableitung und die y-Koordianten an den Extremstellen werden ermittelt.

$H_1(0{,}74|2{,}58)$, $T_1(2{,}31|-1{,}88)$, …

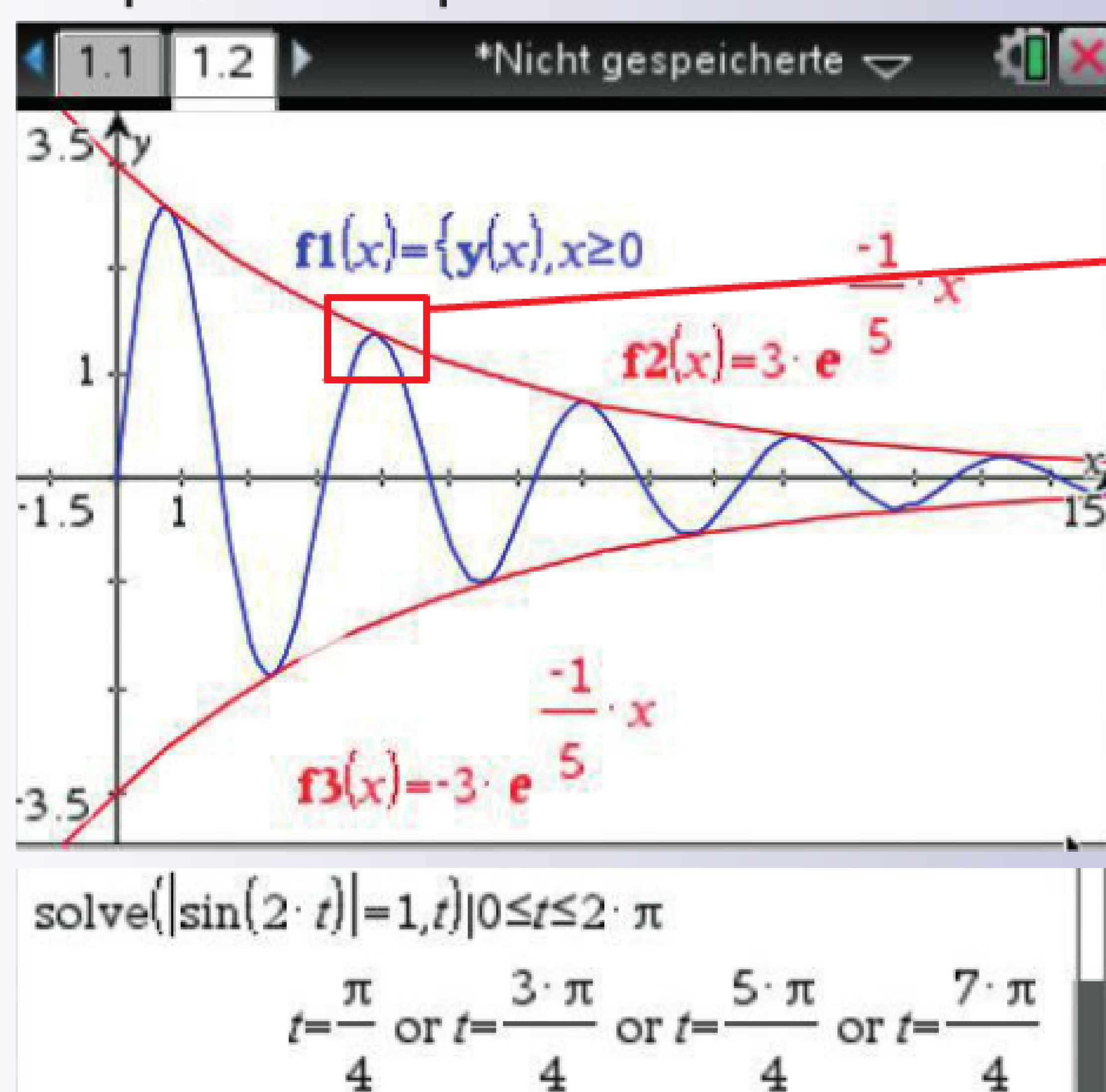
Berechnung der Wendepunkte:



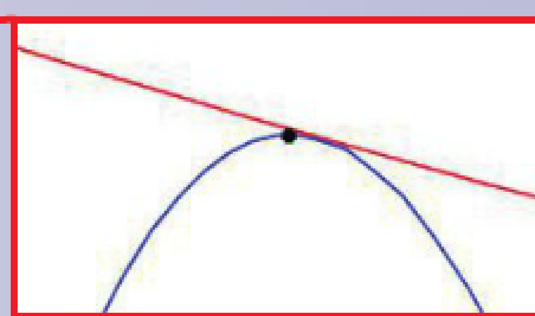
- $y'' = 0$
- Die y-Koordinaten der Wendepunkte können mithilfe einer Liste ermittelt werden.

$W_1(1{,}47|0{,}44)$, $W_2(3{,}04|-0{,}32)$, …

Graph, Berührpunkte:



- Als Funktionsvarable muss x eingegeben werden.



In der Detailvergrößerung kann man erkennen, dass der Hochpunkt und der Berührpunkt nicht ident sind.
Dies kann auch rechnerisch gezeigt werden.

$|3 \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot t} \cdot \sin(2t)| = 3 \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot t}$

$\Rightarrow \quad |\sin(2t)| = 1$

$B_1(0{,}78|2{,}56) \neq H_1$, $B_2(2{,}36|-1{,}87) \neq T_1$, …

Aufgaben 4.109 – 4.114: Diskutiere die Funktionen.

B **4.109** **a)** $y = \sin(x)$ **b)** $y = \cos(2x)$ **c)** $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$

B **4.110** **a)** $y = \cos(x) - \sin(x)$ **b)** $f(x) = \sin^2(x)$ **c)** $y = \sin(x) + \sin(2x)$

B **4.111** **a)** $f(x) = x + \sin(x)$ **b)** $y = x - \cos(x)$ **c)** $y = \sin(x) - x - 1$

B **4.112** **a)** $y = e^{x^2}$ **b)** $y = x \cdot e^x$ **c)** $f(x) = x^2 \cdot e^x$

B **4.113** **a)** $y = x \cdot e^{-x}$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$ **c)** $y = (x + 2) \cdot e^{\frac{x}{2}}$

B **4.114** **a)** $f(x) = x \cdot \ln(x)$ **b)** $y = x^2 \cdot \ln(x)$ **c)** $f(x) = x \cdot (1 - \ln(x))$

BC **4.115** Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ und stelle sie im Intervall [−3; 3] grafisch dar.



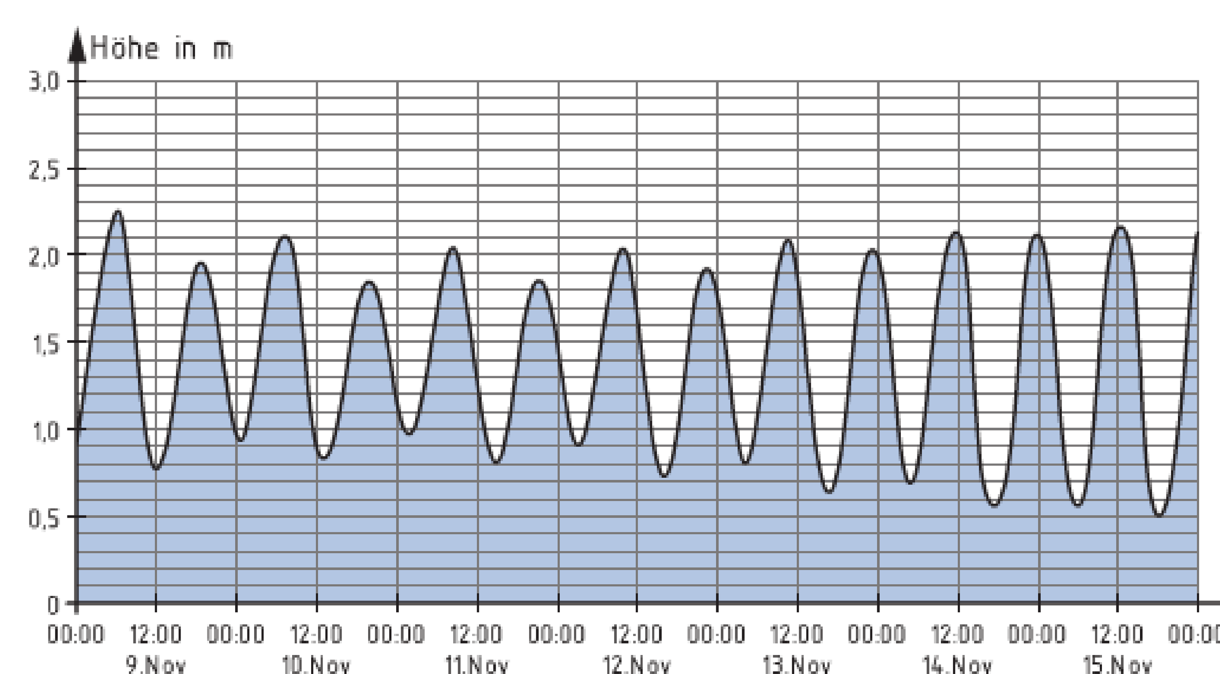
Recherchiere im Internet, um welche besondere Kurve es sich dabei handelt.

4.3.4 Anwendungen aus Naturwissenschaften und Technik

ABCD **4.116** In einem Urlaubsort wird wöchentlich am Strand eine Gezeitentabelle zur Information für die Urlaubsgäste ausgehängt.



Die Höhe h des Wasserstands in Abhängigkeit von der Zeit t kann für einen bestimmten Tag näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:



$h(t) = 1{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 1{,}8$

h … Wasserstandshöhe in m, t … Zeit in h nach Mitternacht, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

1) Erkläre die Bedeutung der Parameter in der Funktionsgleichung.

2) Ab einer Wasserstandshöhe von 2,30 m wird der Strand vollständig überflutet. Gib an, in welchen Zeitintervallen die Gäste mit einer Überflutung des Strands rechnen müssen.

3) Ermittle, um wie viel Uhr die Wasserstandshöhe am höchsten ist. Wie hoch ist sie dann?

4) Um wie viel Uhr ist der Wasserstand am niedrigsten?

5) Gib die mittlere Änderung der Wasserstandshöhe zwischen 6:00 Uhr und 8:00 Uhr morgens an.

6) Um wie viel Uhr ändert sich der Wasserstand am stärksten? Wie hoch ist dann der Wasserstand?

ABC **4.117** Die Konzentration K eines Medikaments in $\frac{mg}{\ell}$ im Blut lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:



$K(t) = 6 \cdot (e^{-0{,}11 \cdot t} - e^{-0{,}5 \cdot t}) \quad t \geq 0$

t … Zeit in Stunden nach Beginn der Injektion

1) Gib an, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Medikaments im Blut maximal ist. Wie hoch ist die Konzentration dann?

2) Zu welchem Zeitpunkt ist die Abnahme der Konzentration am stärksten?

3) Ermittle den Zeitpunkt, an dem noch 30 % der maximalen Menge vorhanden sind.

4) Beschreibe das Langzeitverhalten der Funktion K für $t \to \infty$.

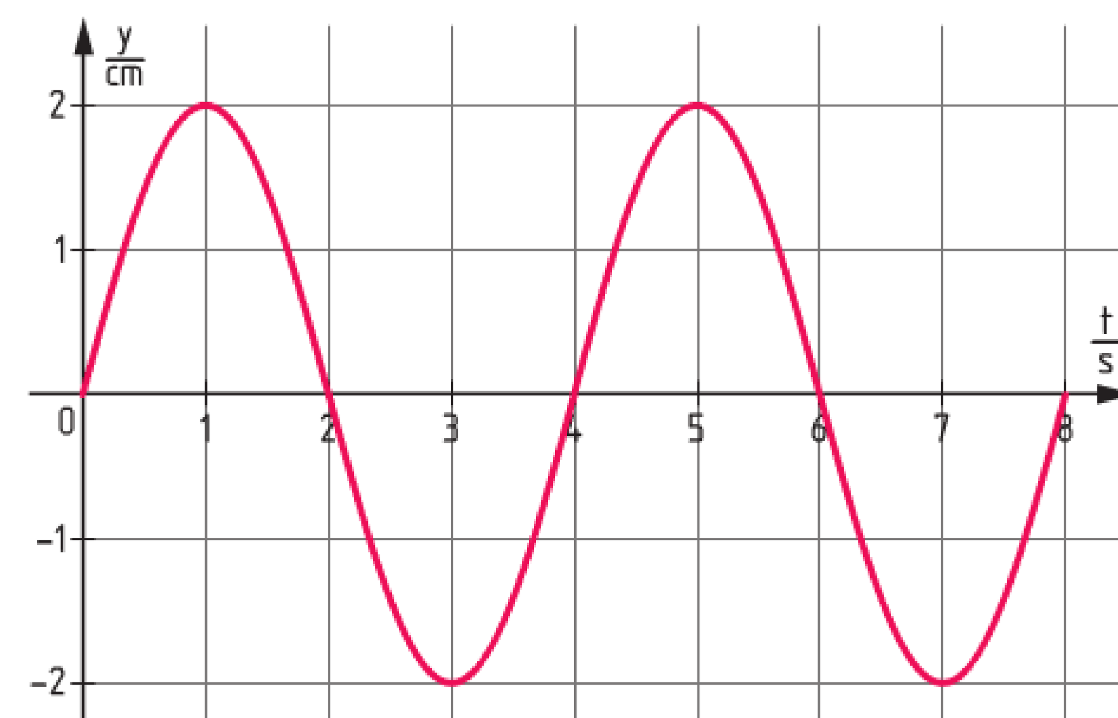
4.118 Ein Körper wird aus seiner Gleichgewichtslage bewegt, erreicht einen Umkehrpunkt und bewegt sich anschließend wieder in die Gleichgewichtslage zurück. Die Bewegung des Körpers kann durch folgende Funktion beschrieben werden: ABC TE

$y(t) = 6\text{ cm} \cdot e^{-4s^{-1} \cdot t} - 6\text{ cm} \cdot e^{-8s^{-1} \cdot t}$

y … Auslenkung aus der Ruhelage in cm, t … Zeit in Sekunden

1) Diskutiere die Funktion.
2) Stelle die Funktion grafisch dar.
3) Welcher physikalischen Größe entspricht die erste Ableitung?
4) Welche Bedeutung hat bei dieser Bewegung der Extremwert von y?

4.119 Ein mechanisches System wird in Schwingung versetzt. Der Schwingungsverlauf lässt sich durch die abgebildete Funktion der Form $y = a \cdot \sin(b \cdot t) + c$ beschreiben. ABCD TE



1) Stelle die Funktionsgleichung der dargestellten Funktion auf.
2) Führe eine Kurvenuntersuchung im Intervall [0; 4] durch und überprüfe, ob die von dir ermittelte Funktion mit der abgebildeten Funktion übereinstimmt.

4.120 Eine gedämpfte Schwingung kann durch folgende Funktion beschrieben werden: B TE

$y(t) = \frac{15}{7}\text{ cm} \cdot e^{-\frac{1}{5}s^{-1} \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{7}{5}s^{-1} \cdot t\right)$ y … Auslenkung in cm, t … Zeit in Sekunden

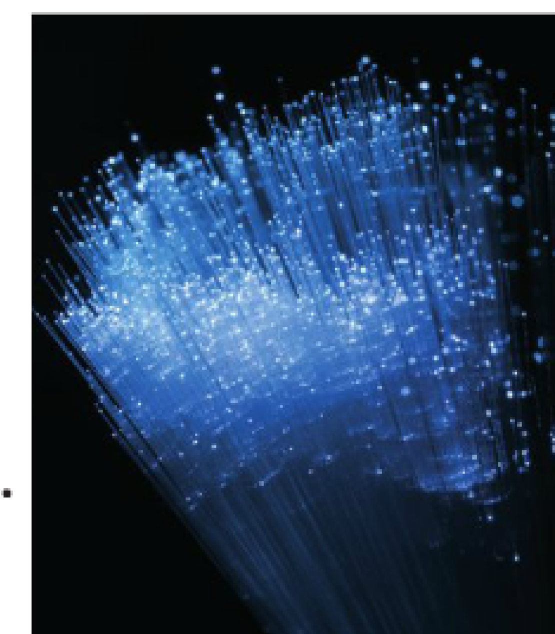
Berechne die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion im Intervall [0 s; 6 s].

4.121 Die Schwingung eines ungedämpften mechanischen Systems lässt sich durch folgende Funktion beschreiben: BCD TE

$y(t) = 1{,}5\text{ cm} \cdot \sin(4\text{ s}^{-1} \cdot t) + \cos(4\text{ s}^{-1} \cdot t)$ y … Auslenkung in cm, t … Zeit in Sekunden

1) Diskutiere die Funktion.
2) Stelle die Funktion grafisch dar und überprüfe deine Berechnungen anhand der Grafik.

4.122 In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität I mit der Länge s des zurückgelegten Wegs in einem Maß ab, das proportional zur jeweiligen Intensität ist. Ein Versuch hat gezeigt, dass die Intensität auf jeweils 1 km um 8 % abnimmt. ABC TE



1) Gib eine Funktion an, die der Entfernung vom Ausgangspunkt (in Kilometer) die Intensität in Prozent des Ausgangswerts zuordnet.
2) Diskutiere die Funktion.
3) Stelle die Funktion grafisch dar.

4.123 Bei einer Spule lässt sich der Verlauf der Stromstärke i nach dem Schließen des Stromkreises durch folgende Funktion beschreiben: ABC TE

$i(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ i … Stromstärke in mA, t … Zeit in Sekunden

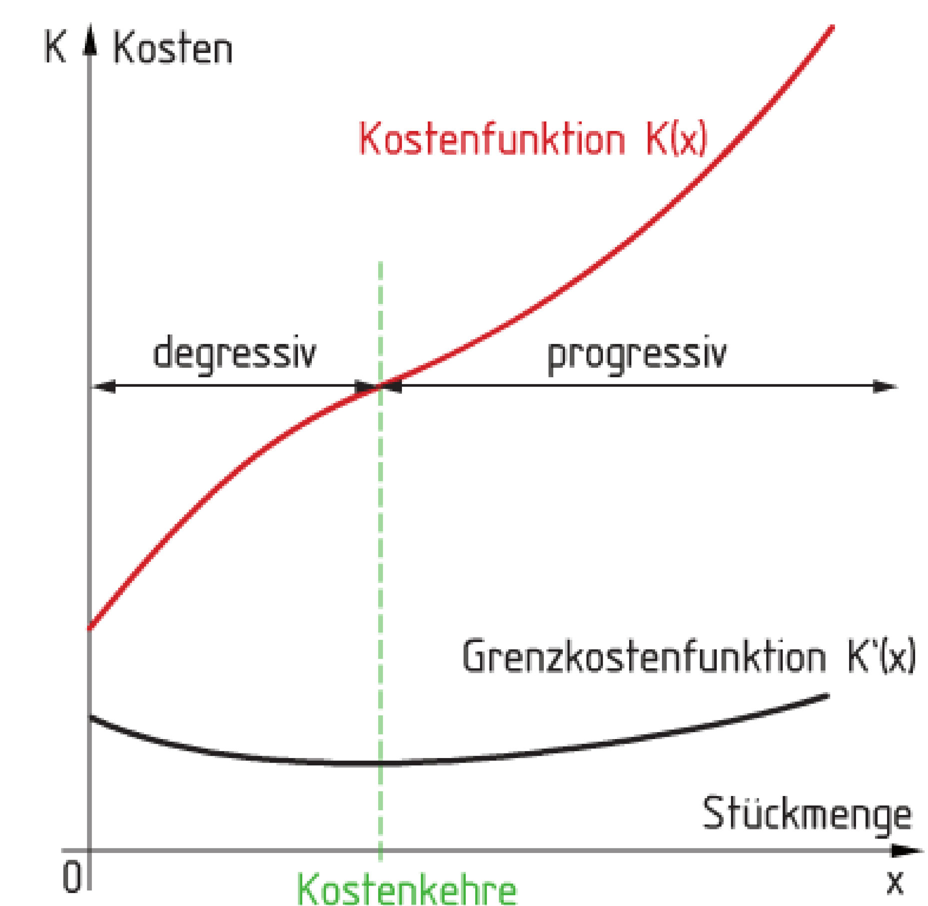
1) Bestimme die Konstante k, wenn $I_0 = 32{,}5$ mA beträgt und nach 10^{-2} Sekunden die Stromstärke auf i = 15,48 mA gesunken ist.
2) Diskutiere die Funktion i(t) allgemein.
3) Stelle die Funktion aus ***1)*** grafisch dar.

4.3.5 Anwendungen aus der Betriebswirtschaft



Die Wirtschaftsmathematik befasst sich mit der Analyse von Kosten, Erlös und Gewinn sowie Angebot und Nachfrage. Dabei arbeitet man mit möglichst einfachen mathematischen Modellfunktionen.

Eine **Kostenfunktion** K beschreibt die bei einer Produktion anfallenden Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Stückmenge x einer bestimmten Ware. Dabei werden unter anderem höhere Kosten berücksichtigt, die zum Beispiel durch Maschinenverschleiß oder Anstellung zusätzlicher Mitarbeiter entstehen. Ebenso kann es zu einer Reduzierung der Kosten kommen, wenn der Zulieferer Rabatte gewährt. Dadurch können die Gesamtkosten stärker oder schwächer steigen. Erhöht man die Produktionszahl um Δx, so steigen die Gesamtkosten um den Wert ΔK. Die dabei auftretende **mittlere Kostenänderungsrate** kann durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ beschrieben werden. Um die „momentane" Änderungsrate der Kosten beschreiben zu können, verwendet man den Differentialquotienten. Diese Änderung wird für eine produzierte Stückmenge x durch die **Grenzkostenfunktion** $K'(x)$ beschrieben. Die Grenzkosten entsprechen näherungsweise den Kosten für die zuletzt hergestellte bzw. für die nächste zu produzierende Einheit.



Anhand der Krümmung, also $K''(x)$, können auch Aussagen über die Änderung des Kostenzuwachses getroffen werden. Wachsen die Kosten verhältnismäßig langsamer als die Stückzahl, spricht man von **degressiven Kosten** (latein: degredere = „hinabsteigen"). Wachsen die Kosten verhältnismäßig schneller als die Stückzahl, spricht man von **progressiven Kosten** (latein: progredere = „vorausschreiten"). Meist wird als Kostenfunktion eine kubische Funktion verwendet, deren Verlauf streng monoton steigend ist. Sie steigt zuerst degressiv (negative Krümmung) und wechselt im Wendepunkt, der so genannten **Kostenkehre**, auf eine progressive Steigung (positive Krümmung). Bei der Kostenkehre nimmt die Grenzkostenfunktion $K'(x)$ den kleinsten Wert an.

Neben den Gesamtkosten sind auch die Gesamtkosten pro Stück von Bedeutung. Die zugehörige Funktion nennt man **Stückkostenfunktion**: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$
Das Minimum x_{opt} der Stückkostenfunktion wird als **Betriebsoptimum** bezeichnet.

Die **Preisfunktion** p gibt den Preis pro Mengeneinheit (ME) an. Werden x produzierte Mengeneinheiten verkauft, so erhält man den Erlös E mithilfe der **Erlösfunktion**: $E(x) = p(x) \cdot x$
Aus der Differenz zwischen dem Erlös und den Kosten erhält man den **Gewinn** G mit:
$G(x) = E(x) - K(x)$
Für ein Unternehmen ist jene Produktionsmenge von Bedeutung, bei der der Erlös genau die Gesamtkosten deckt, die so genannte **Gewinnschwelle**. Andererseits können gestiegene Kosten bei größeren Produktionsmengen die Erlöse übertreffen. Diese obere Grenze des Gewinnbereichs bezeichnet man als **Gewinngrenze**. Beide Grenzen entsprechen den Nullstellen der Gewinnfunktion.
Ein in der Kosten- und Preistheorie charakteristischer Punkt der Preisfunktion p ist der so genannte **Cournot'scher Punkt** C, benannt nach Antoine A. Cournot (französischer Wirtschaftstheoretiker, 1801 – 1877). Die Koordinaten dieses Punkts sind die Menge x_{max} bei der maximaler Gewinn erzielt wird, sowie der zugehörige Preis $p(x_{max})$.

4.124 Für die Produktion einer bestimmten Ware in einem Kleinunternehmen gilt annähernd folgende Kostenfunktion: BCD

$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$

x … Anzahl an produzierten Stück in 1 000, K … Kosten in €

1) Bestimme die Grenzkostenfunktion K′.

2) Ermittle, bei welcher Stückzahl x es den geringsten Kostenzuwachs gibt. Zeige, dass es sich bei dem errechneten Extremum um ein Minimum handelt.

3) Stelle K und K′ im Intervall [0; 6] in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. Zeichne die Kostenkehre x_w ein.

4) Gib an, in welchem Intervall der Kostenverlauf degressiv, in welchem er progressiv ist.

Lösung:

1) $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$

$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$

- Berechnen der Grenzkostenfunktion K′

2) $K''(x) = 6x - 18$

- Bilden der Ableitung der Grenzkostenfunktion; K″ beschreibt die Änderungsrate der Funktion K′.

$K''(x) = 0$

$6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3 = x_W$

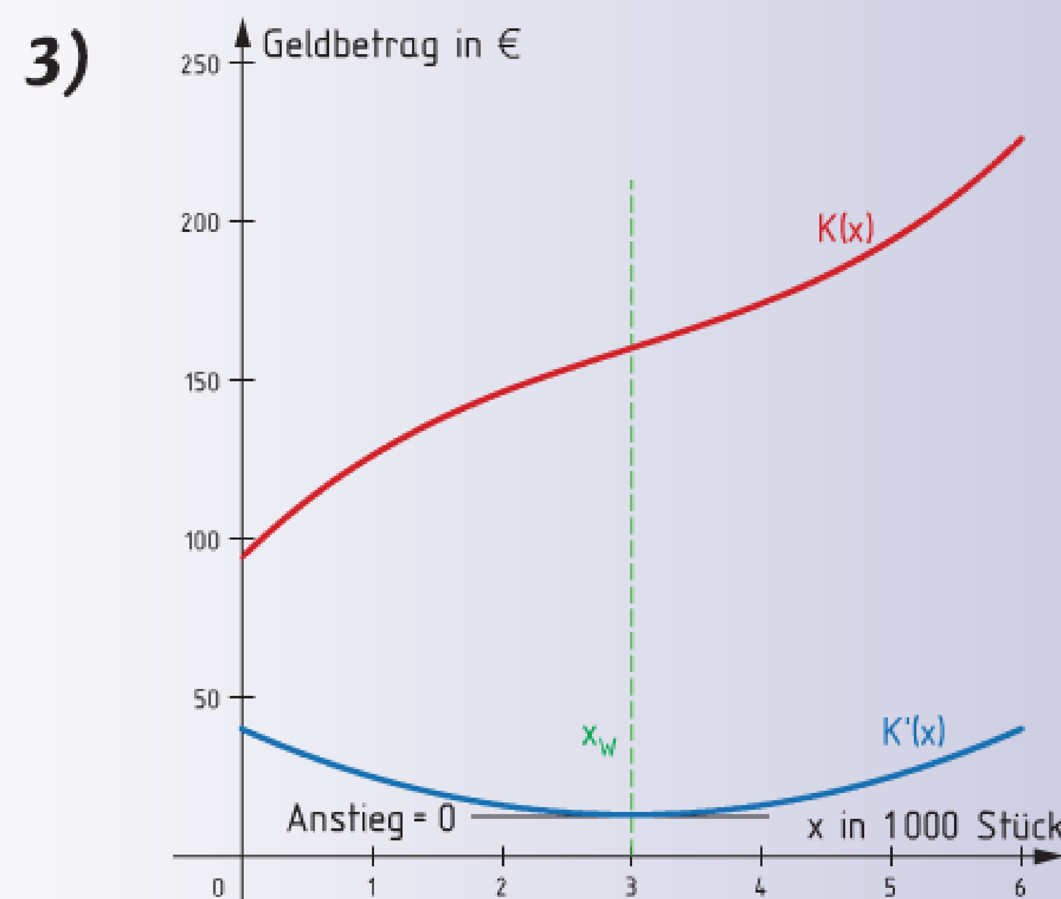
Der geringste Kostenzuwachs stellt sich bei einer Produktion von 3 000 Stück ein.

- Die Stückzahl für die geringste Kostenänderung erhält man durch Nullsetzen von K″. Diese Stelle entspricht der Kostenkehre.

$K'''(x) = 6 > 0 \Rightarrow$ Minimum

- Überprüfen des Minimums

3)



- Grafische Darstellung der beiden Funktionen K und K′
- Einzeichnen der Kostenkehre x_W

4) Im Intervall [0; 3[ist die Funktion degressiv (negativ gekrümmt); im Intervall]3; 6] ist sie progressiv (positiv gekrümmt).

4.125 Für den Verkauf einer Ware hat man empirisch folgende Kostenfunktion erhoben: B

$K(x) = x^3 - 8x^2 + 37x + 103$ x … Anzahl an produzierten Stück in 1 000, K … Kosten in €

Ermittle die Grenzkostenfunktion und die Kostenkehre.

4.126 Ein Unternehmen stellt neuartige medizinische Apparaturen her. Dabei wird von folgender Kostenfunktion ausgegangen: BD

$K(x) = 0{,}25x^3 - 82{,}5x^2 + 9\,000x + 125\,000$ x … Anzahl in ME, K … Kosten in €

1) Bestimme die Grenzkostenfunktion K′.

2) Berechne, bei welcher Menge x es den geringsten Kostenzuwachs gibt. Weise die Minimumeigenschaft nach.

B **4.127** Der Gewinn einer Firma lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:
$G(x) = -x^2 + 80x - 100$
x … Anzahl der verkauften Stück in 1 000, G … Gewinn in €
1) Ermittle die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.
2) Gib an, bei welcher Stückzahl die Firma maximalen Gewinn erzielt.

B **4.128** In einem Herstellungsbetrieb für Sportgeräte lassen sich die Gesamtkosten durch folgende Funktion beschreiben: $K(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}5x^2 + 3x + 800$
x … Anzahl an produzierten Stück in 1 000, K … Kosten in €.
Ermittle die Kostenkehre.

ABD **4.129** Die Fixkosten einer Produktion einer Ware betragen 1 200,00 €. Für die Produktion von 100 ME belaufen sich die Gesamtkosten auf 1 240,00 €.
1) Ermittle die lineare Kostenfunktion K.
2) Berechne die Schnittpunkte der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E mit
$E(x) = -x^2 + 90x$ E … Erlös in €, x … verkaufte Menge in ME
3) Beschreibe, welche wirtschaftliche Bedeutung die Schnittpunkte aus **2)** haben.
4) Berechne den maximalen Gewinn.

ABC **4.130** Die Gesamtkosten für die Produktion von 2 000 Stück einer Ware betragen 4 000,00 €, für 3 000 Stück derselben Ware betragen die Gesamtkosten 5 500,00 €.



1) Ermittle die lineare Kostenfunktion.
2) Der Preis der Ware lässt sich durch die folgende Preisfunktion beschreiben:
$p(x) = -x + 100$ x … Stückzahl, p … Preis pro Stück in €
Stelle die Erlösfunktion auf.
3) Bei welcher Stückzahl ist der erzielte Gewinn maximal?
4) Stelle die Kosten-, die Erlös- und die Gewinnfunktion grafisch dar. Lies aus der Grafik ab, in welchem Bereich Gewinn erzielt wird.

AB **4.131** Bei der Produktion von speziellen Modellautos sind folgende Werte für die jeweils auftretenden Gesamtkosten bekannt:





x in Mengeneinheiten	10	20	30	40
K in Geldeinheiten	1 634	1 684	1 994	2 804

1) Ermittle die Kostenfunktion unter der Annahme, dass die Kosten durch eine Polynomfunktion dritten Grads ausreichend genau beschrieben werden können.
2) Berechne, an welcher Stelle der Kostenverlauf von degressiv zu progressiv übergeht.

ABCD **4.132** Auf einem Adventmarkt werden kleine Kunstobjekte verkauft. Der Verkauf lässt sich mithilfe einer linearen Preisfunktion beschreiben. Aus Erfahrung weiß man, dass man bei einem Stückpreis von 36,00 € mit einem Absatz von 20 Stück rechnen kann. Setzt man den Preis um 6,00 € niedriger an, rechnet man mit einem Absatz von 35 Stück.



1) Ermittle die Preisfunktion p. Gib einen sinnvollen Definitionsbereich an.
2) Gib an, wie viel Kunstobjekte verkauft werden müssen, damit der Erlös maximal wird.
3) Der Gewinn kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:
$G(x) = -0{,}02x^3 + 0{,}29x^2 + 36x - 600$
x … Anzahl der verkauften Kunstobjekte, G … Gewinn in €
Ermittle die zugehörige Kostenfunktion für die Produktion der Kunstobjekte.
4) Stelle die Erlös-, die Kosten- und die Gewinnfunktion grafisch dar. Beschreibe den Zusammenhang zwischen diesen drei Funktionen mit eigenen Worten.

4.3.6 Umgekehrte Kurvenuntersuchung

Im Gegensatz zur Kurvenuntersuchung, bei der man spezielle Punkte und Eigenschaften einer Kurve ermittelt, sind diese nun vorgegeben und die dazu passende Funktionsgleichung wird gesucht.
Kennt man den Funktionstyp einer Funktion sowie ausreichend viele spezielle Punkte bzw. Eigenschaften, so kann man die **Funktionsgleichung ermitteln**. Ist der Funktionstyp nicht vorgegeben, so muss man ein für die Problemstellung geeignetes Modell wählen. Häufig verwendete Modelle sind zB Polynomfunktionen $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots a_1 \cdot x + a_0$ oder auch Exponentialfunktionen $y = a \cdot e^x$.

Die Vorgehensweise zur Ermittlung einer Funktionsgleichung wird in folgender Aufgabe näher gezeigt.

4.133 Eine Polynomfunktion dritten Grads hat im Punkt E(0|0) einen Extrempunkt und in W(–0,5|0,5) einen Wendepunkt. ABC

1) Ermittle die Funktionsgleichung.

2) Stelle die Polynomfunktion grafisch dar und überprüfe deine Lösung mithilfe der gegebenen Punkte.

Lösung:

1) $y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ ● Gleichung einer Polynomfunktion 3. Grads

$y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$y''(x) = 6ax + 2b$ ● Zur Ermittlung der 4 Koeffizienten a, b, c und d werden 4 Gleichungen benötigt.

Extrempunkt in E(0|0):

I: $y(0) = 0$ ● An der Stelle x = 0 ist der Funktionswert y = 0.

II: $y'(0) = 0$ ● An der Stelle x = 0 ist die erste Ableitung y′ = 0.

Wendepunkt in W(–0,5|0,5):

III: $y(-0{,}5) = 0{,}5$ ● An der Stelle x = –0,5 ist der Funktionswert y = 0,5.

IV: $y''(-0{,}5) = 0$ ● An der Stelle x = –0,5 ist zweite Ableitung y″ = 0.

Aufstellen des Gleichungssystems:

I: $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ I: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$

II: $y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ II: $3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$

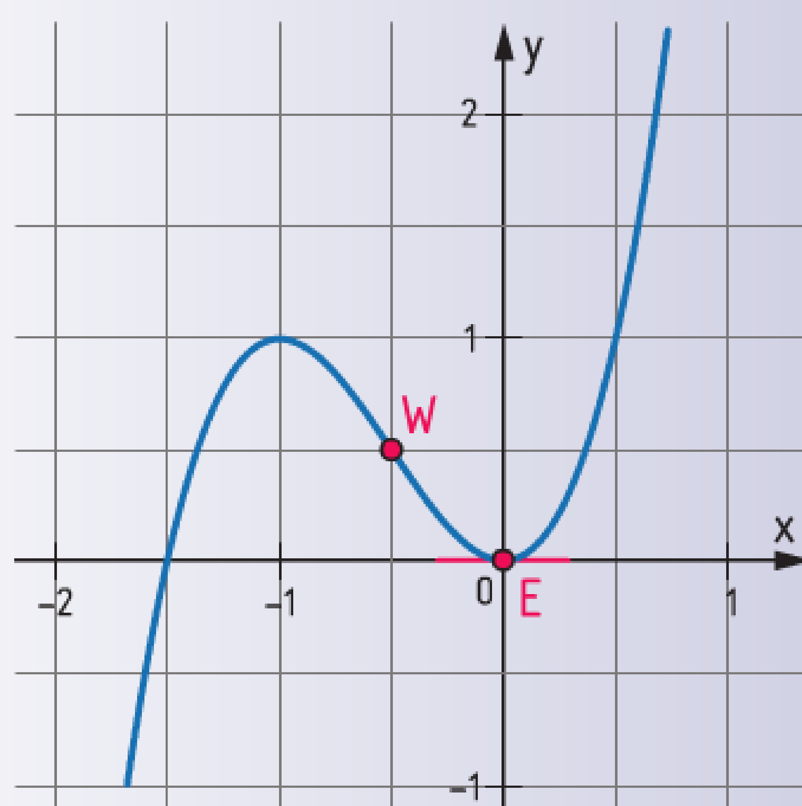
III: $y(-0{,}5) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad$ III: $a \cdot (-0{,}5)^3 + b \cdot (-0{,}5)^2 + c \cdot (-0{,}5) + d = 0{,}5$

IV: $y''(-0{,}5) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ IV: $6a \cdot (-0{,}5) + 2b = 0$

$a = 2, b = 3, c = 0, d = 0$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $y = 2x^3 + 3x^2$

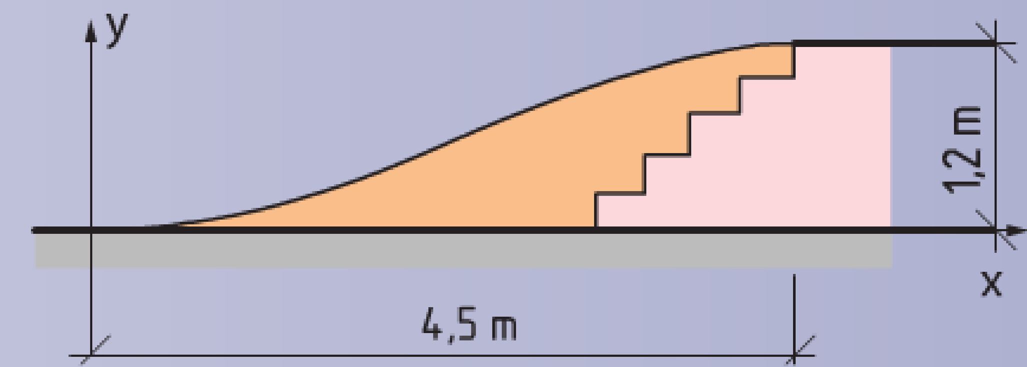
2)



● grafische Darstellung der Funktion

ABC TE

4.134 Vor einem öffentlichen Gebäude wird neben einer Treppe eine Rampe errichtet. Der Höhenunterschied, der zu überwinden ist, beträgt 1,2 m. Die Rampe soll an beide Ebenen waagrecht anschließen und keinen Knick aufweisen.



1) In waagrechter Entfernung stehen maximal 4,5 m zur Verfügung.
Gib die geeignete Polynomfunktion 3. Grads an, die den Verlauf der Rampe beschreibt.
Ermittle den maximalen Steigungswinkel.

2) An der Rückseite des Gebäudes ließe sich eine längere Rampe anbauen. Wie lang müsste sie bei gleichem Höhenunterschied sein, damit die Steigung maximal 15 % beträgt?

Lösung:

1) T(0|0), H(4,5|1,2)

- Wahl eines geeigneten Koordinatensystems

An der Stelle $x = 0$ ist der Funktionswert $y = 0$.
An der Stelle $x = 0$ ist die erste Ableitung $y' = 0$.
An der Stelle $x = 4{,}5$ ist $y = 1{,}2$.
An der Stelle $x = 4{,}5$ ist $y' = 0$
$\Rightarrow\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0;\ y(4{,}5) = 1{,}2;\ y'(4{,}5) = 0$

- Da die Rampe an die beiden waagrechten Ebenen ohne Knick anschließen muss, muss dort die Steigung null sein.

$y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

I: $y(0) = 0 \quad \Rightarrow d = 0$
II: $y'(0) = 0 \quad \Rightarrow c = 0$
III: $y(4{,}5) = 1{,}2 \Rightarrow a \cdot 4{,}5^3 + b \cdot 4{,}5^2 + c \cdot 4{,}5 + d = 1{,}2$
IV: $y'(4{,}5) = 0 \ \Rightarrow 3a \cdot 4{,}5^2 + 2b \cdot 4{,}5 + c = 0$

- Einsetzen der Bedingungen und Aufstellen des Gleichungssystems

$a = -\frac{32}{1\,215},\ b = \frac{8}{45},\ c = d = 0$

Funktionsgleichung: $y(x) = -\frac{32x^3}{1\,215} + \frac{8x^2}{45}$

- Angabe der Funktionsgleichung

$y'(x) = \frac{32x^2}{405} + \frac{16x}{45},\ y''(x) = -\frac{64x}{405} + \frac{16}{45}$
$-\frac{64x}{405} + \frac{16}{45} = 0 \ \Rightarrow\ x = 2{,}25$
$y'(2{,}25) = 0{,}4;\ \ \alpha = \arctan(0{,}4) \ \Rightarrow\ \alpha \approx 22°$
Die Rampe hat in der Mitte eine Steigung von 22°.

- Die Steigung ist im Wendepunkt maximal.

2) Länge der Rampe … s
Endpunkt der Rampe E(s|1,2)
T(0|0) $\Rightarrow c = 0,\ d = 0$
$y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 \qquad y'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x$
I: $y(s) = 1{,}2 \quad \Rightarrow\ a \cdot s^3 + b \cdot s^2 = 1{,}2$
II: $y'(s) = 0 \quad \Rightarrow\ 3a \cdot s^2 + 2b \cdot s = 0$
III: $y''(x_W) = 0 \quad \Rightarrow\ 6a \cdot x_W + 2b = 0$
IV: $y'(x_W) = 0{,}15 \ \Rightarrow\ 3a \cdot x_W^2 + 2b \cdot x_W = 0{,}15$
$s = 12$

Die Rampe müsste 12 m lang sein.

- Als Koordinatenursprung wird der Anfangspunkt (0/0) der Rampe gewählt.
- Wendepunkt an der Stelle x_W
- Steigung in x_W 15 % $\Rightarrow k = 0{,}15$

4.135 Ordne dem Extrempunkt E und dem Wendepunkt W die richtigen Gleichungen zu. Begründe deine Antwort. C

1	E (2|4)	
2	W (4|2)	

A	$y(2) = 0$
B	$y''(4) = 0$
C	$y'(4) = 0$
D	$y'(2) = 0$

4.136 Eine Polynomfunktion 2. Grads verläuft durch den Punkt P(1|2) und den Extrempunkt E(4|5). Ermittle die Funktionsgleichung ***1)*** ohne Differentialrechnung, ***2)*** mithilfe der Differentialrechnung und dokumentiere deine Vorgehensweise. ABC

4.137 Eine Polynomfunktion 2. Grads berührt die x-Achse an der Stelle x = 3 und hat im Punkt $Q(-2|y_Q)$ die Steigung k = –2. Ermittle die Funktionsgleichung. AB

4.138 Eine Polynomfunktion 3. Grads verläuft durch die Punkte P(2|6), Q(8|5) und den Tiefpunkt $R(12|y_R)$. Q ist ein Wendepunkt. ABD
1) Ermittle die Funktionsgleichung und stelle die Funktion grafisch dar.
2) Berechne die y-Koordinate von R.
3) Ermittle die Koordinaten des Maximums ohne Differentialrechnung und begründe deine Antwort.

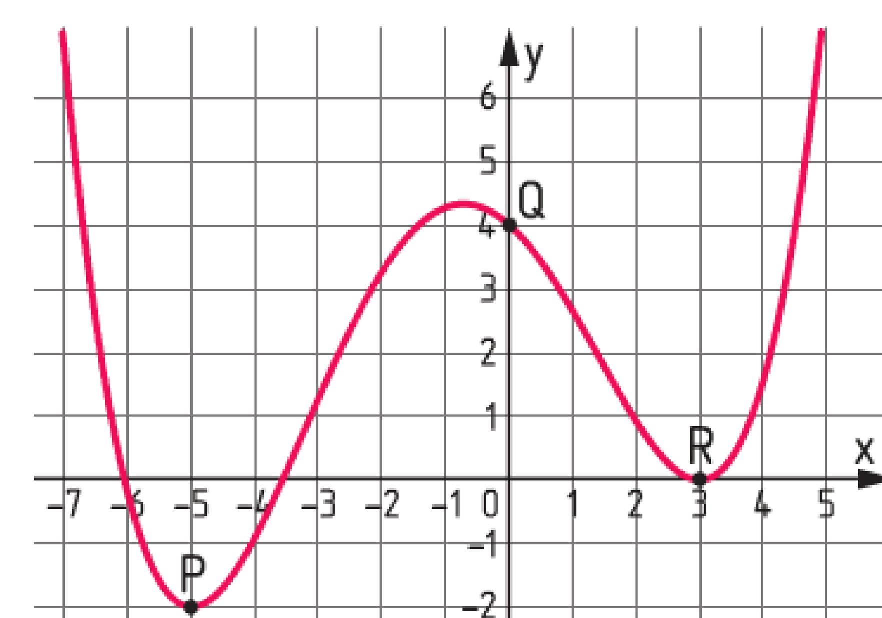
4.139 Eine durch den Koordinatenursprung verlaufende Polynomfunktion 3. Grads hat den Wendepunkt $W(11|y_W)$. Im Punkt P(4|6) hat die Funktion eine waagrechte Tangente. Ermittle die Funktionsgleichung. AB

4.140 Ermittle die Gleichung der Polynomfunktion 3. Grads mit den gegebenen Eigenschaften. AB
a) Die Funktion hat Extrempunkte in $E_1(0|0)$ und $E_2(4|4)$.
b) Die Funktion hat einen Extrempunkt in E(0|0) und einen Wendepunkt in W(1|3).
c) Die Funktion hat einen Sattelpunkt S(1|4), der Koeffizient von x^3 lautet 1.
d) Die Funktion hat in P(–1|–10) die Steigung k = 1 und in R(1|–4) die Steigung k = –3.

4.141 Von einer Funktionsgleichung 3. Grads sind folgende Eigenschaften bekannt: BCD
$y(0) = 0, y(2) = 4, y'(2) = 0, y''(4) = 0$
1) Gib an, um welche Punkte es sich handelt und begründe deine Antwort.
2) Ermittle die Funktionsgleichung.

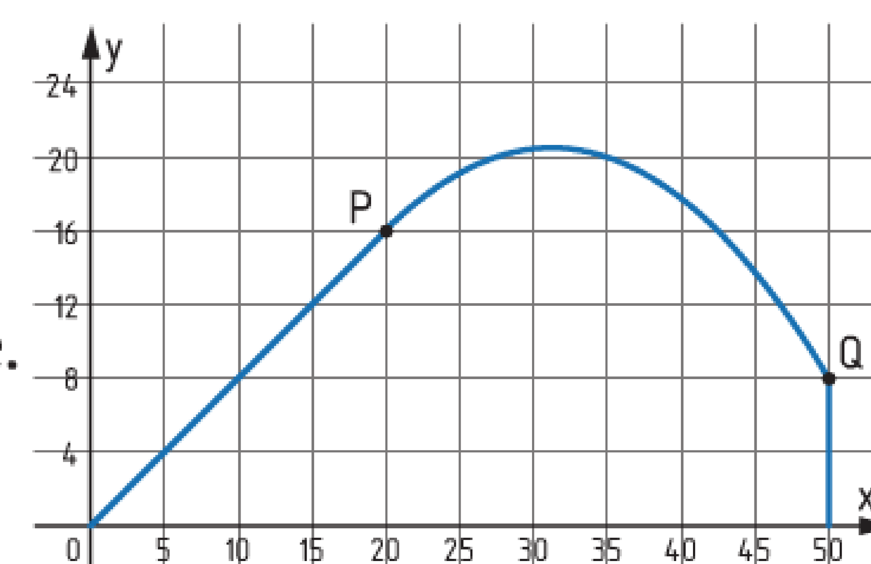
4.142 Eine zur y-Achse symmetrische Polynomfunktion 4. Grads berührt die x-Achse an der Stelle x = 0. Ein Wendepunkt hat die Koordinaten $W_1(-1|5)$. ABD TE
1) Erkläre, warum durch diese Angabe die Funktionsgleichung eindeutig bestimmt ist.
2) Ermittle die Funktionsgleichung.

4.143 Ermittle die Funktionsgleichung der abgebildeten Funktion 4. Grads. Lies die dafür benötigten Punkte und ihre Eigenschaften aus der Grafik ab. ABC TE



Anwendungen der Differentialrechnung

ABC **4.144** Durch Drehung der abgebildeten Kurve um die x-Achse entsteht die Form eines Endstücks einer Vorhangstange. Die Kurve setzt sich aus einer Parabel und zwei Geradenstücken zusammen, wobei im Übergang P die beiden Funktionen dieselbe Steigung haben. Ermittle die Funktionsgleichungen der Kurvenstücke. Entnimm die dazu benötigten Werte aus der Grafik. Alle Angaben in mm.



AB **4.145** Ermittle die fehlenden Konstanten der Funktionsgleichung. Diskutiere anschließend die Funktion und überprüfe deine Berechnungen anhand einer Grafik.

a) $y = \frac{a \cdot x}{x^2 + b}$, Wendepunkt W(4|5) **b)** $y = \frac{a \cdot x + b}{x^2}$, Extrempunkt E(−2|−2)

ABC **4.146** Die Form einer Rampe soll durch eine Polynomfunktion 3. Grads beschrieben werden. Die Rampe muss einen Höhenunterschied von 80 cm zwischen zwei Gehwegen ausgleichen und dabei an beide Wege waagrecht anschließen. Wie viel Platz in waagrechter Richtung benötigt man, wenn der maximale Steigungswinkel der Rampe höchstens 10° betragen darf?

ABC **4.147** Ein Hundebesitzer wirft für seinen Hund eine Frisbeescheibe.



a) Die Scheibe wird bei einem Wurf aus einer Höhe von 1,3 m unter einem Winkel von 20° nach oben abgeworfen. In einer waagrechten Entfernung von 12 m ist die Scheibe 4,8 m hoch, nach 14 m hat sie die maximale Höhe erreicht.
Bestimme die Funktionsgleichung 3. Grads, die die Flugbahn beschreibt.

b) Bei einem Wurf kann die Flugbahn der Scheibe durch folgende Funktion beschrieben werden:
$y = -0{,}0008x^3 + 0{,}003x^2 + 0{,}363x + 1{,}3$
y … Höhe in m, x … waagrechte Entfernung vom Werfer in m

1) Ermittle die Höhe der Scheibe in einer waagrechten Entfernung von 4 m.
2) Gib an, welche maximale Höhe die Scheibe erreicht.
3) Berechne, in welcher Entfernung die Scheibe auf dem Boden auftreffen würde.
4) Der Hund des Werfers „fängt" die Scheibe in einer Höhe von 0,9 m. Wie weit ist er dabei vom Werfer entfernt?

ABC **4.148** Die Flugbahn eines Fußballs bei einem Freistoß wird durch eine Funktionsgleichung 3. Grads beschrieben.



1) Der Ball wird waagrecht abgeschossen und hat nach 12 m eine maximale Höhe von 3 m erreicht.
Ermittle die Funktionsgleichung.
2) Die Mauer steht 10 yards (englisches Längenmaß) vom Abschusspunkt entfernt. Berechne, in welcher Höhe der Ball über die Mauer fliegt.
3) Beim Überfliegen der Torlinie hat der Ball eine Höhe von 2 m. Ermittle, wie weit der Abschusspunkt vom Tor entfernt ist.
4) Wie weit hinter der Torlinie und in welchem Winkel trifft der Ball den Boden, wenn das Tor kein Netz hat?

Zusammenfassung

Mithilfe der Differentialrechnung lassen sich verschiedene Eigenschaften von Funktionen angeben:

Monotonieverhalten
Eine Funktion f(x) ist in der Umgebung einer Stelle x_0

streng monoton steigend, wenn gilt: $\mathbf{f}'(x_0) > 0$

streng monoton fallend, wenn gilt: $\mathbf{f}'(x_0) < 0$

Krümmungsverhalten
Eine Funktion f(x) ist in der Umgebung einer Stelle x_0

positiv gekrümmt, wenn gilt: $\mathbf{f}''(x_0) > 0$



negativ gekrümmt, wenn gilt: $\mathbf{f}''(x_0) < 0$



Extremwert bzw. Extrempunkt
Lokaler Extremwert: Größter oder kleinster Funktionswert in seiner Umgebung
Globaler Extremwert: Größter oder kleinster Funktionswert im gesamten Definitionsbereich

$\mathbf{f}'(x_0) = 0$ und $\mathbf{f}''(x_0) < 0 \Rightarrow$ **Hochpunkt** (lokales Maximum)

$\mathbf{f}'(x_0) = 0$ und $\mathbf{f}''(x_0) < 0 \Rightarrow$ **Tiefpunkt** (lokales Minimum)

Wendepunkt
Im Wendepunkt einer Funktion wechselt das Krümmungsverhalten.
Notwendige Bedingung: $\mathbf{f''(x_W) = 0}$
Die Steigung der Funktion hat im Wendepunkt einen lokalen Extremwert.

Sattelpunkt
Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente: $\mathbf{f'(x_S) = f''(x_S) = 0}$

Krümmung einer Kurve

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{[1 + (y')^2]^3}} \qquad \rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right| \text{ ... } \textbf{Krümmungskreisradius}$$

Anwendungen der Differentialrechnung

Extremwertaufgaben
Hierbei handelt es sich um Optimierungsaufgaben, bei denen der größtmögliche bzw. kleinstmögliche Wert einer Größe ermittelt wird. Die Funktion, die ein Maximum oder Minimum annehmen soll, wird **Hauptbedingung** bzw. **Zielfunktion** genannt. Zusammenhänge, die das Aufstellen der Zielfunktion in einer Variablen ermöglichen, werden **Nebenbedingungen** genannt.

Kurvenuntersuchung
Untersuchung von Eigenschaften und Besonderheiten einer Funktion: Definitionsmenge, Symmetrieeigenschaften, Periodizität, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Wendetangenten, Asymptoten, Verhalten im Unendlichen, grafische Darstellung des Funktionsgraphen.

Anwendungen der Differentialrechnung

Weitere Aufgaben

Extremwertaufgaben

ABC **4.149** Für die momentane Höhe h eines senkrecht nach oben geworfenen Balls gilt:
$h(t) = 5\,\text{m} + 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$ h … Höhe in m, t … Zeit in s nach dem Abwurf

1) Gib den Geschwindigkeitsverlauf als Funktion v an.
2) Stelle h und v grafisch dar. Beschreibe den Zusammenhang zwischen den beiden Graphen.
3) Ermittle, nach wie viel Sekunden der Ball die maximale Höhe erreicht hat.

ABC **4.150** Die Kosten K für die Herstellung eines Produkts lassen sich durch die folgende Funktion beschreiben:
$K(x) = 0{,}03x^3 - 0{,}74x^2 + 6x + 12$ K … Kosten in GE, x … Menge in ME

1) Stelle die Kostenfunktion grafisch dar.
2) Der Erlös ist durch die Funktion $E(x) = -0{,}625x^2 + 10x$ angegeben. Stelle die Kostenfunktion und die Erlösfunktion in einem Koordinatensystem gemeinsam dar. Lies ab, in welchem Bereich Gewinn erzielt wird.
3) Berechne, wie viel ME verkauft werden müssen, damit maximaler Gewinn erzielt wird. Ermittle die Höhe des maximalen Gewinns und den Cournot'schen Punkt.

AB **4.151** Welches Seitenverhältnis hat ein Rechteck mit dem Umfang u = 18 cm, wenn die Länge der Diagonale möglichst kurz sein soll?

AB **4.152** Aus 82 gleich langen Zündhölzern wird ein Rechteck gelegt. Ermittle, wie viele Zündhölzer für die Länge bzw. Breite des Rechtecks benötigt werden, damit der Flächeninhalt maximal wird.

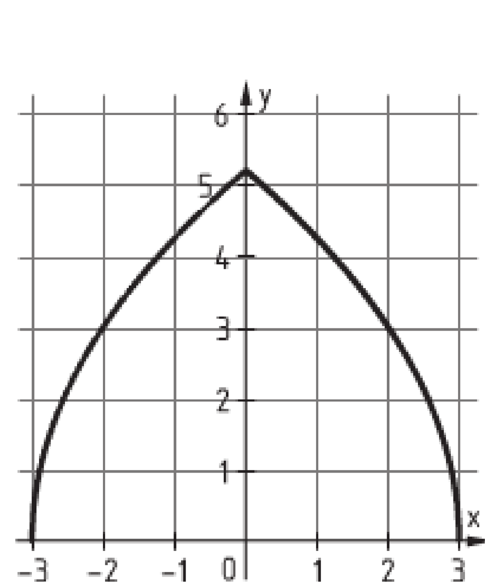
ABD **4.153** Ein zylinderförmiger Blumentopf soll 120 Liter fassen. Die Abmessungen sollen so gewählt werden, dass der Materialverbrauch am geringsten ist.

1) Gib an, welche Zielfunktion zur Lösung dieses Problems richtig ist.

A) $O(r) = 2r^2\pi + \frac{240}{r}$ **B)** $O(r) = r^2\pi + \frac{240}{r\pi}$ **C)** $O(r) = r^2\pi + \frac{240}{r}$ **D)** $O(r) = r^2\pi + \frac{240\pi}{r^2}$

2) Ermittle die Abmessungen des Blumentopfs.
3) Überprüfe stichprobenartig, dass der Materialverbrauch größer wird, wenn die Abmessungen verändert werden.

AB **4.154** Ein Stadttor hat die unten dargestellte Form. Seine Umrisse können durch folgende Funktionen beschrieben werden (Angaben in m):



$y_1 = \sqrt{27 - 9x}$ $0 \leqslant x \leqslant 3$ und

$y_2 = \sqrt{9x + 27}$ $-3 \leqslant x \leqslant 0$

Durch dieses Tor fährt genau in der Mitte ein Bus, der 2,2 m breit und 3,9 m hoch ist. Berechne, wie groß der minimale Abstand ist, den der Bus von der Wand des Torbogens hat.



Krümmung

AB **4.155** Stelle die Funktion $y = 4 \cdot \cosh\left(\frac{x}{4}\right) + 6$ grafisch dar. Ermittle die Krümmung und den Krümmungsradius im Tiefpunkt der Funktion. Zeichne den Krümmungskreis an dieser Stelle.

4.156 Ermittle, an welcher Stelle eine Parabel mit der Gleichung $y = 2 + 3x + x^2$ die größte Krümmung hat. Um welchen speziellen Punkt handelt es sich? Berechne den Krümmungsradius an dieser Stelle. Stelle die Parabel und den Krümmungskreis grafisch dar. ABC

Kurvenuntersuchungen

4.157 Diskutiere die Funktion. B

a) $y = \frac{1}{10}x^3 - \frac{9}{10}x + 2$
d) $y = 0{,}9x^3 + 2{,}5x^2$
g) $y = -0{,}7x^3 + 2{,}2x^2 - 1$

b) $y = 0{,}5x^3 + 2{,}2x^2 + 0{,}3x - 2$
e) $f(x) = \frac{x}{3 - x^2}$
h) $y = \frac{\sin(x)}{x}$

c) $y = \frac{x^2}{1 + x}$
f) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
i) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

4.158 Eine gedämpfte Schwingung lässt sich durch folgende Funktion beschreiben: B



$y(t) = 8\text{ cm} \cdot e^{-0{,}1s^{-1} \cdot t} \cdot \cos(2s^{-1} \cdot t)$ y … Auslenkung in cm, t … Zeit in s

Untersuche die Funktion im Intervall $0\text{ s} \leq t \leq 6\text{ s}$.

Umgekehrte Kurvenuntersuchung

4.159 Ermittle die Gleichung einer Polynomfunktion 3. Grads mit den gegebenen Eigenschaften. ABC

a) Die Funktion hat Extrempunkte in $E_1(0|6)$ und $E_2(8|0)$.

b) Die Funktion schneidet die y-Achse bei y = 2,2. Die Tangente im Wendepunkt $W(1|y_W)$ hat die Gleichung: $y = -\frac{12}{5}x + \frac{12}{5}$

c) Die Funktion verläuft durch den Koordiantenursprung und durch den Punkt P(3|4). Sie berührt die x-Achse an der Stelle x = 5.

4.160 Ein Golfer hat sich beim Abschlag am letzten Loch verschätzt. Die Flugbahn des von ihm abgeschlagenen Golfballs kann näherungsweise durch eine Polynomfunktion 3. Grads beschrieben werden. Dar Ball „startet" waagrecht und erreicht die maximale Höhe von 32 m nach 120 m horizontaler Entfernung vom Abschlag. ABC

1) Ermittle die Funktionsgleichung und zeichne den Graphen.

2) Leider fliegt der Ball zu weit. Er „überfliegt" das Loch im Steigflug in einer Höhe von 27 m. Wie weit vom geplanten Ziel war der Abschlag entfernt?

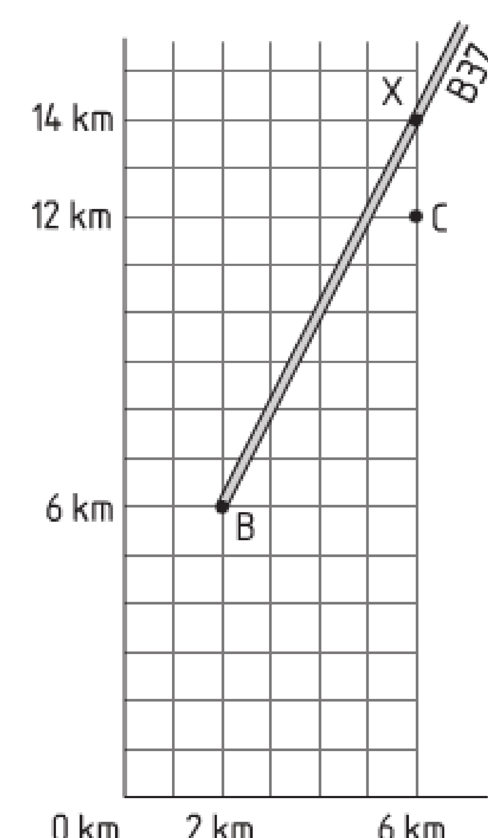
3) In welcher Höhe überquert der Ball den 150 Meter vom Abschlag entfernten Rand des Parkplatzes?

4.161 Die B37 führt geradlinig von B nach X und geht geradlinig weiter. In B soll eine Straße so abzweigen, dass sie durch C verläuft. Die Abzweigung in B darf dabei keinen Knick in der Straßenführung ergeben. ABCD

1) Der Straßenverlauf soll durch eine Polynomfunktion 2. Grads genähert werden. Begründe, warum eine solche Funktion mithilfe der gegebenen Informationen eindeutig ermittelt werden kann.

2) Stelle die geeigneten Gleichungen zur Ermittlung der Koeffizienten a, b und c auf und gib die Funktionsgleichung an.

3) Zeichne einen Plan mit der bestehenden und der neuen Straße in geeignetem Maßstab. Ermittle dazu die Koordinaten von zwei beliebigen weiteren Punkten der neuen Straße zwischen B und C.



Aufgaben in englischer Sprache

asymptote	Asymptote	minimum point	Tiefpunkt
bending upwards, concave up	positiv gekrümmt	pole	Polstelle
bending downwards, concave down	negativ gekrümmt	stationary points	Extremwerte
domain	Definitionsbereich	tangent	Tangente
inflection point, point of inflection	Wendepunkt	x and y intercept	Achsenabschnitte mit der x- bzw. y-Achse
maximum point	Hochpunkt	zero	Nullstelle

B **4.162** Find the zeros, the stationary points, the inflection points and the equations of the tangents at the two points of inflection of the function $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

B **4.163** Find the stationary points on the graph of f with the following function $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

BC **4.164** Find the coordinates of the stationary points on the graph of $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 7$ and check whether these points are maximum or minimum points.

BC **4.165** Show that the graph of $y = x^3 + x$ crosses the x-axis only once. Find y' and y''. Determine the interval in which the graph is bending upwards.

ABC **4.166** Find the x-coordinates of the points in which the graph of $f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2$ intersects the x-axis. Show that one of these points is a point of inflection of the graph and find the coordinates of the other point of inflection. Find the equations of the tangents at the two points of inflection.

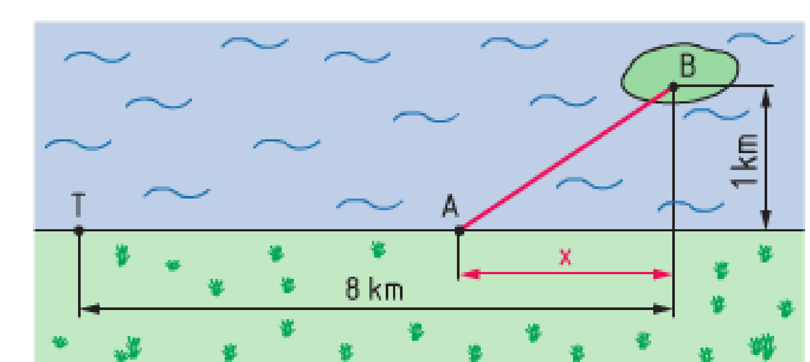
BC **4.167** Discuss the following curves. Find the domain, search for poles and asymptotes.

a) $y = \frac{x-3}{x^4}$ **b)** $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ **c)** $y = \frac{2}{x^4} - \frac{1}{x}$

ABC **4.168** Sketch the graph of $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$.

1) Locate the x and y intercepts.
2) Determine any horizontal or vertical asymptotes.
3) Find intervals where f(x) is concave up and where it is concave down.
4) Discuss the curve.

ABC **4.169** A glass fibre cable is needed to connect a telecommunication station T on the shore of a river to an island B 8 kilometres downstream and 1 kilometre offshore. Find the minimum costs for such a cable, given that it costs 30 000,00 € per kilometre to lay cable under water and 10 000,00 € per kilometre to lay cable under ground. Calculate the best place for A.



Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kenne die Eigenschaften eines Extremwerts und weiß, wie ich ein lokales Maximum von einem lokalen Minimum rechnerisch unterscheiden kann.	
2	Ich kenne die Unterschiede zwischen einem lokalen Extremwert, einem globalen Extremwert sowie einem Randextremum und kann sie anhand einer Skizze erläutern.	
3	Ich weiß, wie ich bei Extremwertaufgaben vorgehen muss und kann die einzelnen Schritte erklären.	
4	Gib an, von welchem Graphen der Graph von g die Ableitungsfunktion ist. Begründe deine Antwort.	
5	Was versteht man unter einem Sattelpunkt?	
6	An welchen Stellen kann die Funktion $y = \frac{x+5}{x^2-9}$ nicht definiert werden? Wie nennt man diese Stellen?	
7	Erkläre, warum die Funktion $y = e^x$ keinen Extremwert und keinen Wendepunkt hat.	
8	Wie viele Bedingungen benötigt man, um alle Koeffizienten einer allgemeinen Polynomfunktion 4. Grads zu bestimmen?	
9	Ein Punkt, in dem die Krümmung von positiv auf negativ wechselt, heißt …	
10	Ich kann angeben, wie viele Extremwerte eine Polynomfunktion vom Grad n maximal haben kann.	

Lösung:
1) siehe Seite122, 2) siehe Seite 123, 3) siehe Seite 126,
4) B stellt die richtige Ausgangsfunktion dar. Die Nullstellen von g entsprechen den Extremwerten der Ausgangsfunktion. Zwischen den Nullstellen von g ist die Funktion negativ, daher ist die Ausgangsfunktion in diesem Bereich monoton fallend.
5) siehe Seite 142 6) Bei $x = 3$ und $x = -3$, an diesen Stellen befinden sich die Polstellen.
7) Sie hat keine Extremwerte und Wendepunkte, weil $y' = e^x$ und $y'' = e^x$ und die Funktion e^x keine Nullstelle hat.
8) Man benötigt fünf Bedingungen. 9) Wendepunkt. 10) Sie kann maximal $(n - 1)$ Extremwerte haben.

5 Grundlagen der Integralrechnung

Beim Differenzieren wurden mithilfe von Ableitungsregeln Funktionen ermittelt, mit deren Hilfe die Steigung der Tangente an einer bestimmten Stelle einer Funktion angegeben werden konnte. Will man von der Ableitungsfunktion auf die ursprüngliche Funktion schließen, so nennt man diesen Umkehrvorgang **Integrieren**. Mithilfe der Integration von Funktionen können zum Beispiel der Flächeninhalt unter einer Kurve, das Volumen eines Drehkörpers oder der Schwerpunkt einer Fläche bzw. eines Körpers berechnet werden. In vielen technischen Anwendungen wird die Integration verwendet, um Größen wie Arbeit oder Stromstärke zu berechnen.

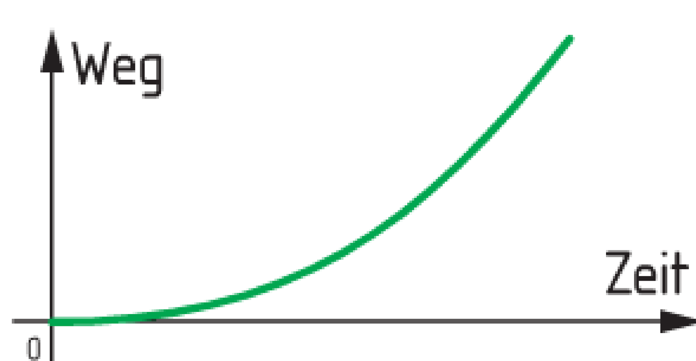
5.1 Unbestimmtes und bestimmtes Integral

5.1.1 Geschwindigkeit und Weg

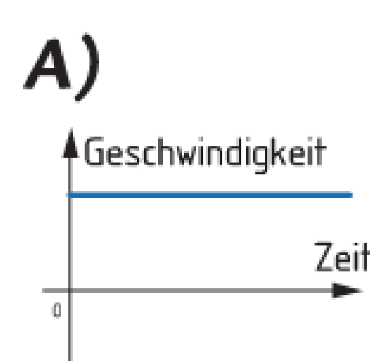
Im Folgenden wird der Integralbegriff anhand des Zusammenhangs zwischen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion und Weg-Zeit-Funktion anschaulich gezeigt. Die Begriffe und Zusammenhänge werden anschließend in Abschnitt 5.1.3 allgemein erläutert und bewiesen.

AB **5.1** Ein PKW fährt eine halbe Stunde lang mit einer mittleren Geschwindigkeit von 40 $\frac{km}{h}$ und eine weitere halbe Stunde lang mit einer mittleren Geschwindigkeit von 60 $\frac{km}{h}$. Gib die Wegstrecke an, die er insgesamt zurückgelegt hat.

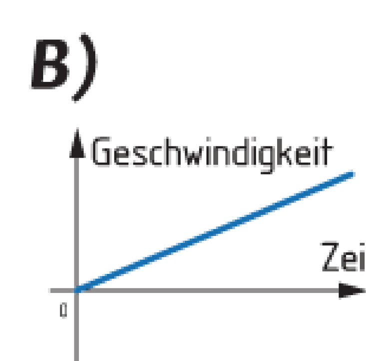
AC **5.2** ***1)*** Ordne dem Weg-Zeit-Diagramm das passende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu.



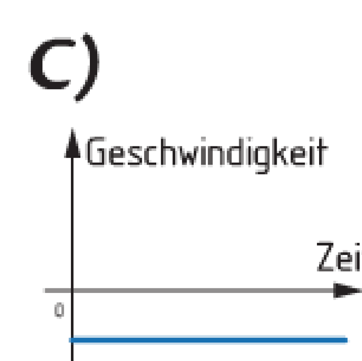
A)



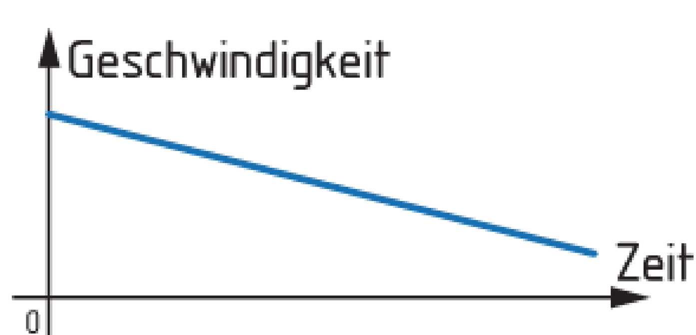
B)



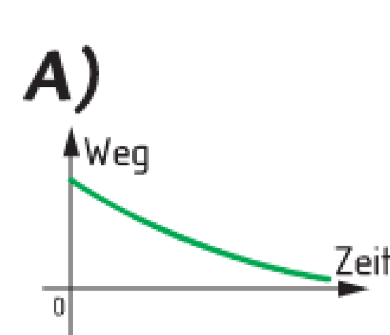
C)



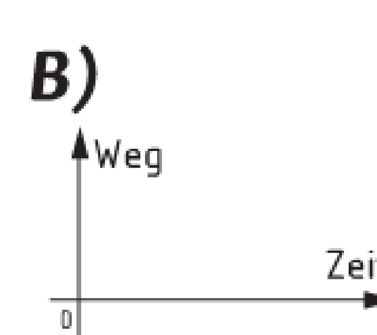
2) Schüler sollten zu einem gegebenen Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ein Weg-Zeit-Diagramm zeichnen. Welche der Zeichnungen ist richtig?



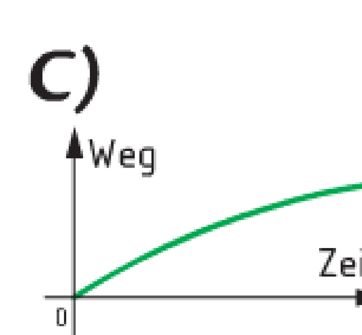
A)



B)

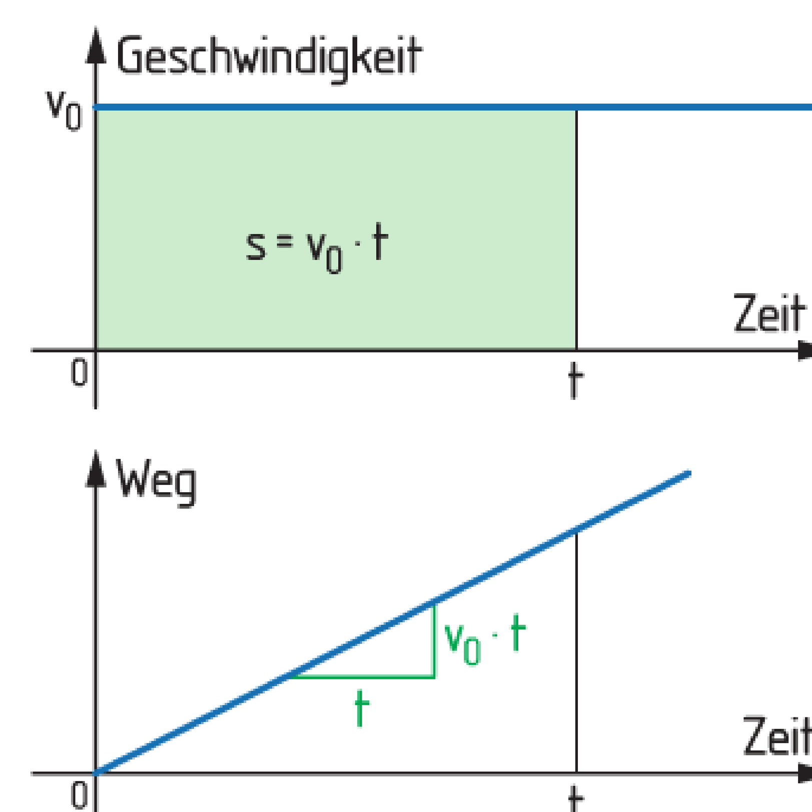


C)



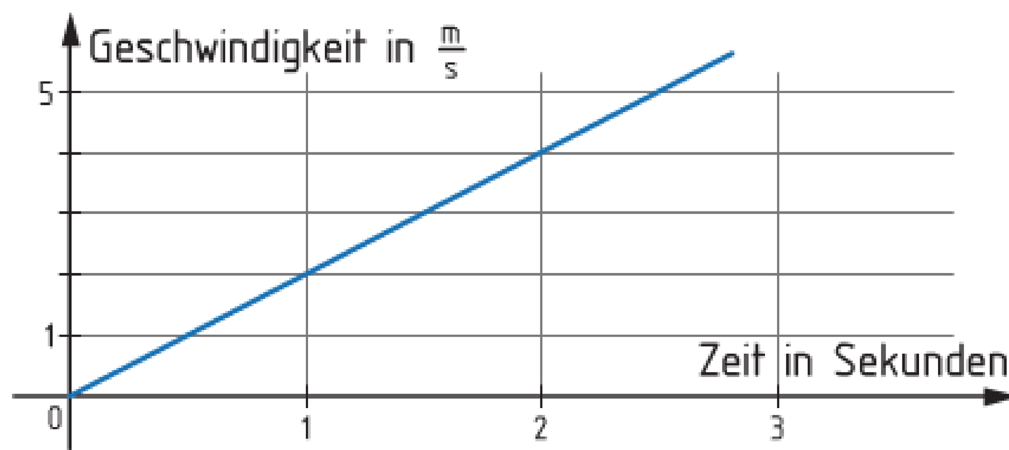
In Abschnitt 3 wurden mithilfe der Differentialrechnung Momentangeschwindigkeiten aus einem Weg-Zeit-Zusammenhang ermittelt. Nun wird anhand von Beispielen gezeigt, wie man umgekehrt aus einem gegebenen Geschwindigkeitsverlauf die zurückgelegte Wegstrecke ermitteln kann.

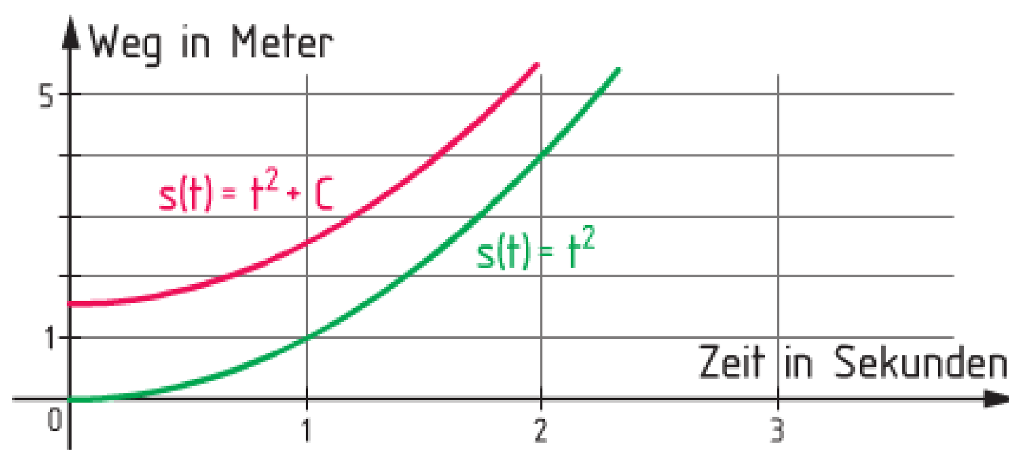
- Ist die Geschwindigkeit $v(t) = v_0$ konstant, so gilt für den im Zeitraum von 0 bis t zurückgelegten Weg: $s = v_0 \cdot t$
  Der Zahlenwert dieser Größe entspricht dem Flächeninhalt des grün markierten Rechtecks.
- Die Funktion s, die den bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t zurückgelegten Weg angibt, ist also eine lineare Funktion:
  $s(t) = v_0 \cdot t$
  Die erste Ableitung dieser Funktion ist die gegebene Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = v_0$.



Die Formel $s = v_0 \cdot t$ gilt nur für konstante Geschwindigkeiten, nicht jedoch, wenn die Geschwindigkeit veränderlich, also von der Zeit t abhängig ist.

ZB: $v(t) = 2\,\frac{m}{s^2} \cdot t$





Da die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion auch in diesem Fall die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion ist, suchen wir eine Funktion s, sodass gilt:
$\dot{s} = v(t) = 2t$
Aufgrund der Differentiationsregeln wissen wir, dass dies zum Beispiel für die Funktion $s(t) = t^2$ zutrifft.
Man nennt $s(t) = t^2$ eine **Stammfunktion** von $v(t) = 2t$.
Da jede andere Funktion der Bauart $s(t) = t^2 + C$ ebenfalls die Ableitung $\dot{s} = v(t) = 2t$ hat, gibt es **unendlich viele Stammfunktionen**. Sie unterscheiden sich nur durch eine **additive Konstante C** voneinander. Diese lässt sich aus einem gegebenen Zusammenhang ermitteln.

Das Ermitteln der Stammfunktion, also die Umkehrung des Differenzierens, bezeichnet man als **Integrieren**. Die **Stammfunktion** einer **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion** ist eine **Weg-Zeit-Funktion**.

5.3 Ein Auto wird aus dem Stand gleichmäßig mit $a = 5\,\frac{m}{s^2}$ beschleunigt. ABC

1) Gib die Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = a \cdot t$ an und beschreibe, wie mithilfe der Differentiationsregeln die zugehörige Weg-Zeit-Funktion s ermittelt werden kann.

2) Ermittle, nach welcher Zeit das Auto eine Geschwindigkeit von $100\,\frac{km}{h}$ erreicht hat und wie weit es in dieser Zeit gefahren ist.

Lösung:

1) $v(t) = a \cdot t = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t$

Die Funktion v ist die Ableitung der gesuchten Funktion s. Da in der Funktion v die Variable t die Hochzahl 1 hat und die Ableitung einer Konstanten C gleich null ist, muss die Funktion s von der Form $k \cdot t^2 + C$ sein.

Durch zusätzliches Berücksichtigen der Faktorregel ergibt sich:

$v(t) = 5 \cdot t = \frac{5}{2} \cdot 2t \Rightarrow s(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + C$ • $y = t^2 \Rightarrow y' = 2t$

Da das Auto aus dem Stand startet, gilt $s(0) = 0$:

$\frac{5}{2} \cdot 0^2 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

$s(t) = \frac{5}{2}\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

2) $5\,\frac{m}{s^2} \cdot t = \frac{100}{3{,}6}\,\frac{m}{s} \Rightarrow t = 5{,}55...\,s \approx 5{,}6$ Sekunden

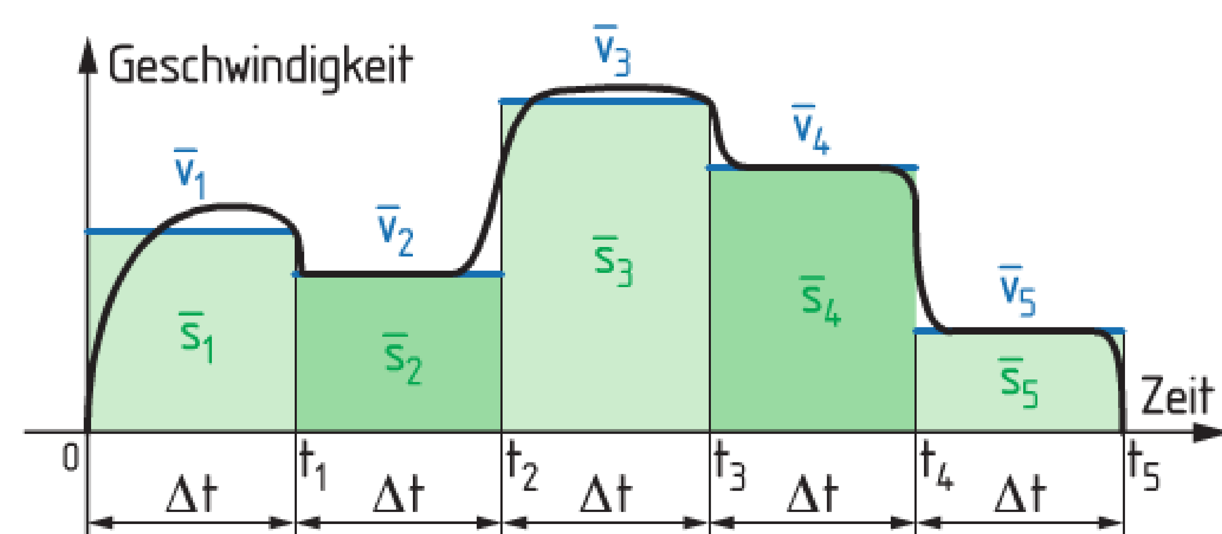
$s(5{,}55...\,s) = 77{,}16...\,m \approx 77{,}2\,m$

Nach rund 5,6 Sekunden ist eine Geschwindigkeit von $100\,\frac{km}{h}$ erreicht. Dabei wird ein Weg von rund 77,2 Meter zurückgelegt.

Grundlagen der Integralrechnung

Im vorhergehenden Beispiel konnte die Stammfunktion mithilfe von Differentiationsregeln sofort angegeben werden. Mithilfe dieser Funktion kann der zurückgelegte Weg zu jedem beliebigen Zeitpunkt berechnet werden. Kann man die Stammfunktion allerdings nicht mithilfe von Differentiationsregeln angeben, so kann man den zwischen zwei Zeitpunkten zurückgelegten Weg zunächst näherungsweise berechnen.

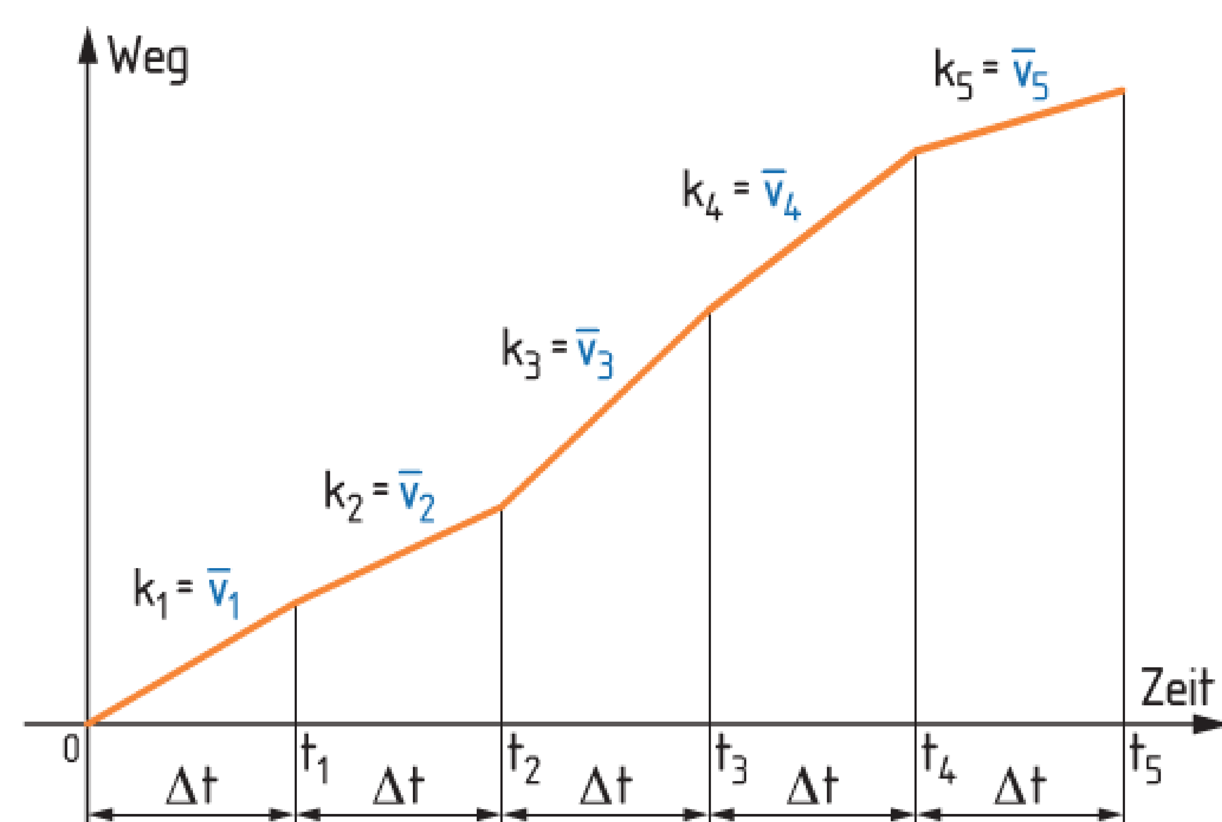
ZB: Aus der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion eines Fahrzeugs soll der zurückgelegte Weg näherungsweise ermittelt werden. Die Funktion v wird dazu durch eine Treppenfunktion $\overline{v}$ angenähert. Die **Maßzahl des zurückgelegten Wegs s** entspricht dann näherungsweise der **Maßzahl der Fläche unter der Treppenfunktion**.



In jedem Teilstück der Treppenfunktion ist die Geschwindigkeit konstant. Für den zurückgelegten Weg s gilt somit:

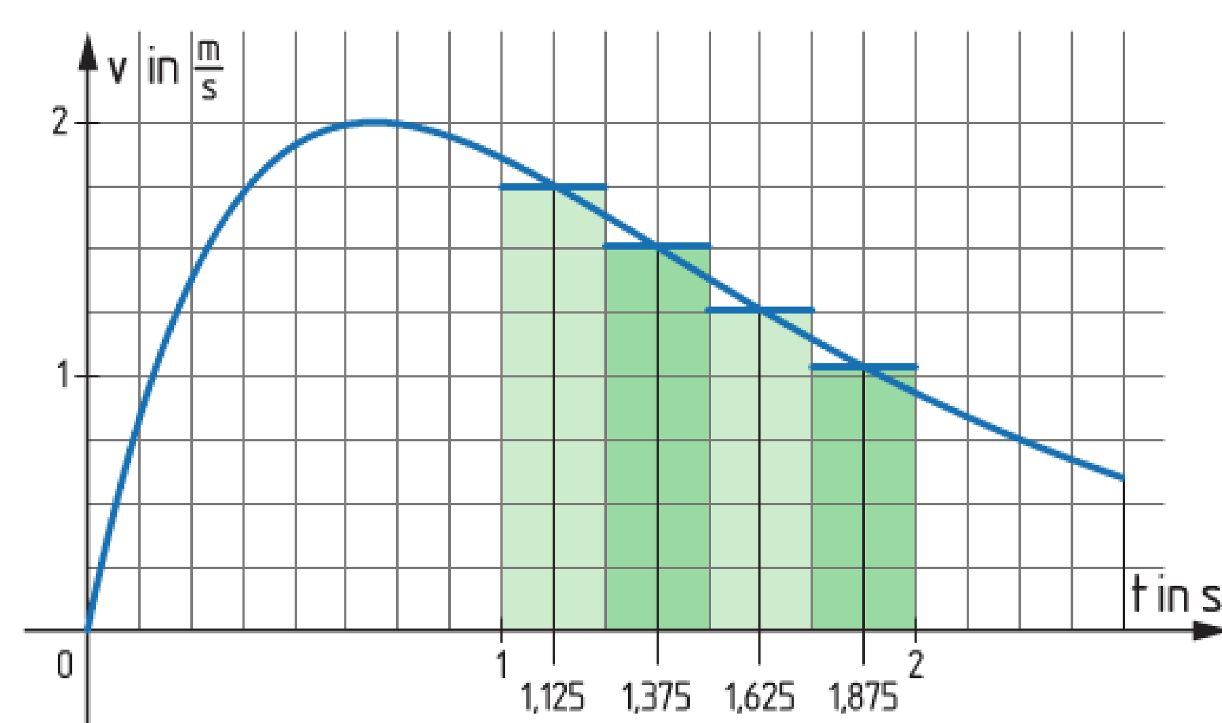
$$s \approx \overline{s} = \overline{v}_1 \cdot \Delta t + \overline{v}_2 \cdot \Delta t + \overline{v}_3 \cdot \Delta t + \overline{v}_4 \cdot \Delta t + \overline{v}_5 \cdot \Delta t$$

Da die Funktion v näherungsweise durch eine Treppenfunktion $\overline{v}$ beschrieben wird, kann die Funktion s durch eine stückweise lineare Funktion $\overline{s}$ angenähert werden. Man kann nun folgenden Zusammenhang zwischen den Näherungsfunktionen $\overline{s}$ und $\overline{v}$ erkennen:



- In jedem Teilstück gilt:
  Die Steigung des Geradenstücks, also die **Ableitung der Weg-Zeit-Funktion** $\overline{s}$, entspricht der **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion** $\overline{v}$.
- Für jeden Zeitpunkt $t_1, \ldots, t_5$ gilt:
  Der **Wert der Weg-Zeit-Funktion** $\overline{s}$ entspricht der **Fläche unterhalb des Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion** $\overline{v}$ im Intervall $[0; t_n]$, also der **Produktsumme**:
  $$\overline{s}(t_n) = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i \cdot \Delta t$$

ZB: Die Geschwindigkeit eines Balls auf einer Minigolfbahn ist durch folgende Funktion gegeben:
$v(t) = -8e^{-2t} + 8e^{-t}$
v … Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$, t … Zeit in s

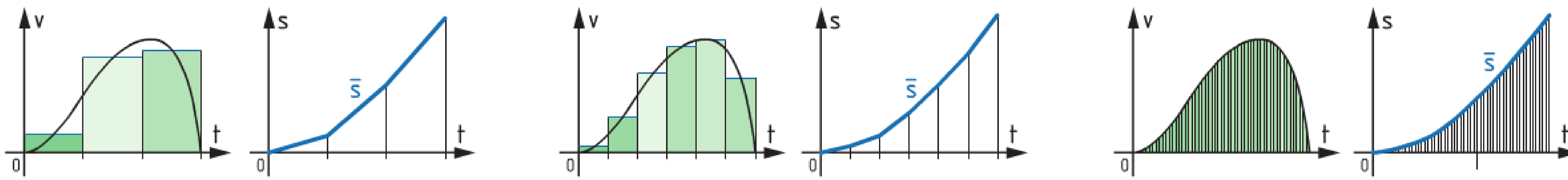


Um den Weg zu berechnen, den der Minigolfball im Intervall [1 s; 2 s] zurücklegt, teilt man das Intervall zum Beispiel in 4 gleich breite Teilintervalle.
Dann gilt: $\Delta t = 0{,}25$ s
In jedem dieser Teilintervalle ersetzt man nun näherungsweise die Geschwindigkeit v(t) durch die konstante Geschwindigkeit zum Beispiel in der Mitte des Intervalls.

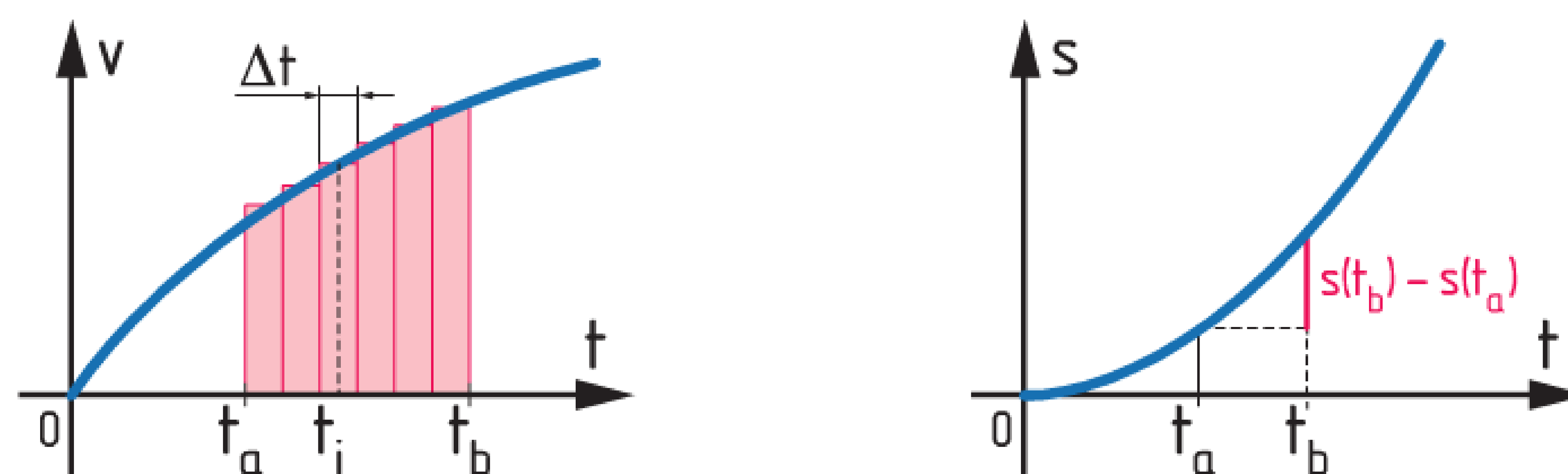
Mithilfe der Produktsumme kann nun der zurückgelegte Weg näherungsweise ermittelt werden:

$$\overline{s} = v(1{,}125) \cdot 0{,}25 + v(1{,}375) \cdot 0{,}25 + v(1{,}625) \cdot 0{,}25 + v(1{,}875) \cdot 0{,}25 = 1{,}39\ldots \Rightarrow s \approx 1{,}4 \text{ m}$$

Die Genauigkeit dieser Berechnung hängt von der Anzahl n der Teilintervalle ab, in die man den Beobachtungszeitraum unterteilt. Je größer diese Anzahl n ist, umso kürzer sind die Zeitintervalle Δt und umso genauer ist der Näherungswert für den Flächeninhalt, den man dadurch erhält. Geht die Anzahl n der Streifen gegen ∞, so geht die Streifenbreite Δt gegen null. Die stückweise lineare Funktion $\bar{s}$ geht dann in die tatsächliche Weg-Zeit-Funktion s über.



Betrachtet man ein Zeitintervall $[t_a; t_b]$, so erkennt man: Der Wegzuwachs **$s(t_b) - s(t_a)$** zwischen t_a und t_b entspricht der Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Intervall $[t_a; t_b]$.



Die Berechnung des Zahlenwerts dieses Flächeninhalts kann mithilfe der Produktsumme für $\Delta t \to 0$ erfolgen:

$$s(t_b) - s(t_a) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} v(t_i) \cdot \Delta t \right) \qquad \Delta t = \frac{t_b - t_a}{n}$$

t_i ... beliebiger Zwischenwert aus dem i-ten Teilintervall

Man nennt diesen Grenzwert der Produktsumme das **bestimmte Integral** der Funktion v in den Grenzen t_a und t_b und verwendet dafür folgende Schreibweise:

$$s(t_b) - s(t_a) = \int_{t_a}^{t_b} v(t)\, dt$$

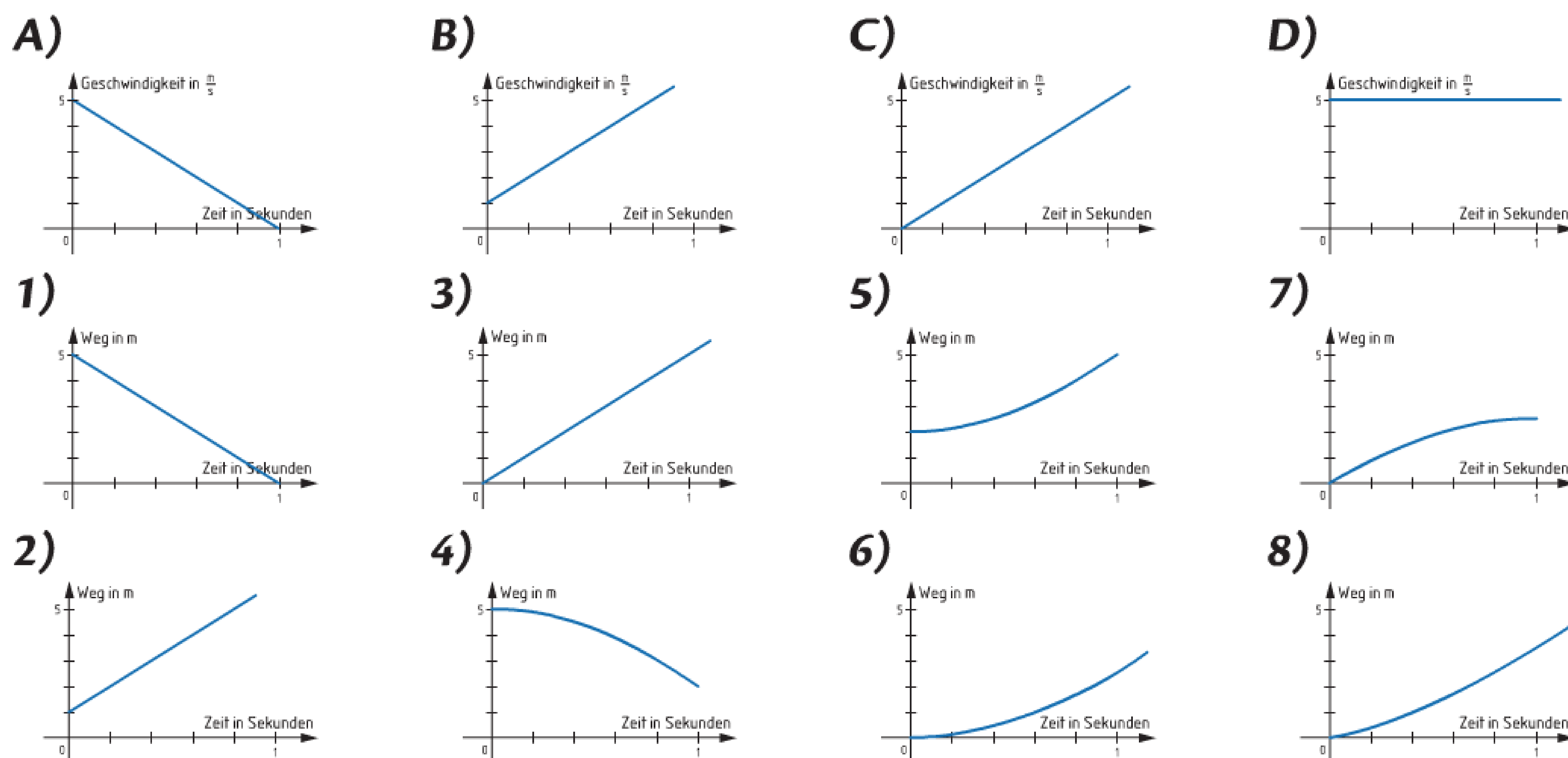
Das Integralzeichen $\int$ ist dem Buchstaben „S“ für Summe nachempfunden, dt steht für das „unendlich klein gewordene“ Δt. Die Grenzen t_a und t_b des betrachteten Intervalls stehen unterhalb bzw. oberhalb des Integralzeichens und werden daher **untere Grenze** bzw. **obere Grenze** genannt.
Der Wert des bestimmten Integrals entspricht also dem Wert der Stammfunktion am Ende des betrachteten Intervalls minus dem Wert der Stammfunktion am Anfang des Intervalls.

Den in einem Intervall $[t_a; t_b]$zurückgelegten Weg s kann man mithilfe des **bestimmten Integrals** ermitteln.
Es gilt $\int_{t_a}^{t_b} v(t)\, dt = s(t_b) - s(t_a)$, wobei s(t) eine Stammfunktion von v(t) ist.

Möchte man „nur“ die Stammfunktion einer gegebenen Funktion f ermitteln, so werden keine Integrationsgrenzen angegeben. Da jede additive Konstante beim Ableiten null wird, kann umgekehrt die Stammfunktion nicht eindeutig bestimmt werden, sondern nur bis auf diese Konstante, die üblicherweise mit C bezeichnet wird. Die so erhaltene Menge von Stammfunktionen nennt man das **unbestimmte Integral** von f.

AB **5.4** Ein Körper entfernt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 40 $\frac{m}{s}$ von einem Punkt P. Gib die Funktion an, die den Abstand des Körpers vom Punkt P, abhängig von der Zeit t, beschreibt, wenn der Körper ***1)*** sich zum Zeitpunkt t = 0 s im Punkt P befunden hat, ***2)*** zum Zeitpunkt t = 0 s bereits 50 m vom Punkt P entfernt war, ***3)*** zum Zeitpunkt t = 3 s bereits 200 m vom Punkt P entfernt war.

ACD **5.5** Ordne den dargestellten Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen jeweils alle Funktionsgraphen zu, die den zurückgelegten Weg darstellen können. Begründe deine Entscheidungen.



ABCD **5.6** Ein Schiff muss aufgrund gesetzlicher Bestimmungen innerhalb einer gewissen Strecke zum Stillstand kommen. Die maximale „Bremswirkung" wird durch „volle Fahrt zurück" erzielt. Die Geschwindigkeit v (in $\frac{m}{s}$) eines Tankers nach Beginn des Anhaltemanövers kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:



$v(t) = -0{,}006\ \frac{m}{s^2} \cdot t + 9\ \frac{m}{s}$

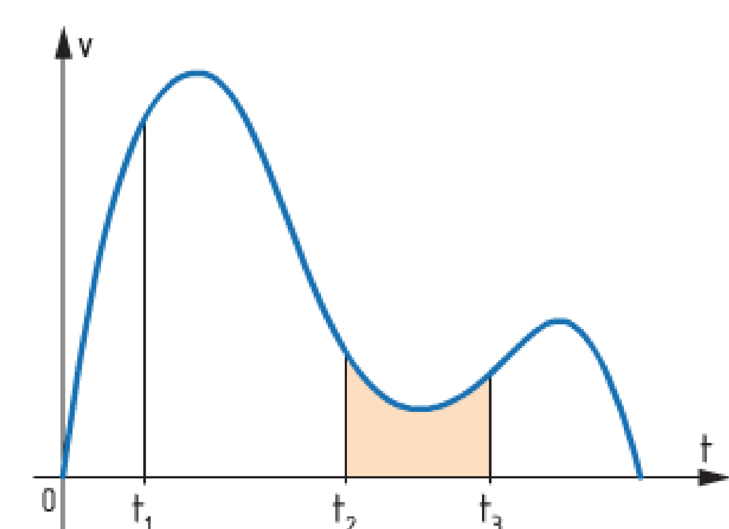
t … Zeit nach Beginn des Manövers in s

1) Gib die Geschwindigkeit des Schiffs zu Beginn des Anhaltevorgangs in $\frac{km}{h}$ an.
2) Ermittle, wie lang es dauert, bis der Tanker zum Stillstand kommt.
3) Begründe, warum der während des Anhaltevorgangs zurückgelegte Weg s durch eine Funktion folgender Bauart beschrieben werden kann:
$s(t) = -0{,}003\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 9\ \frac{m}{s} \cdot t + C$
4) Überlege, welchen Wert die Konstante C hat.
5) Der Anhalteweg des 300 m langen Tankers darf maximal das 20-fache seiner Länge betragen. Überprüfe durch eine Berechnung, ob diese Vorschrift erfüllt wird.

CD **5.7** In der Abbildung ist der Graph der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v eines Körpers dargestellt. Gib an, welche der Behauptungen richtig bzw. falsch sind und begründe deine Antworten:
Wenn s die Stammfunktion ist, die die zugehörige Weg-Zeit-Funktion beschreibt, dann gilt:

A) $\dot{s} = v(t)$ ***C)*** $\int_0^{t_1} v(t)\,dt = s(t_1)$ ***E)*** Der Zahlenwert der farbig unterlegten Fläche entspricht dem zurückgelegten Weg $s(t_3) - s(t_2)$.

B) $\dot{v} = s(t)$ ***D)*** $\int_0^{t_1} s(t)\,dt = v(t_1)$



5.1.2 Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

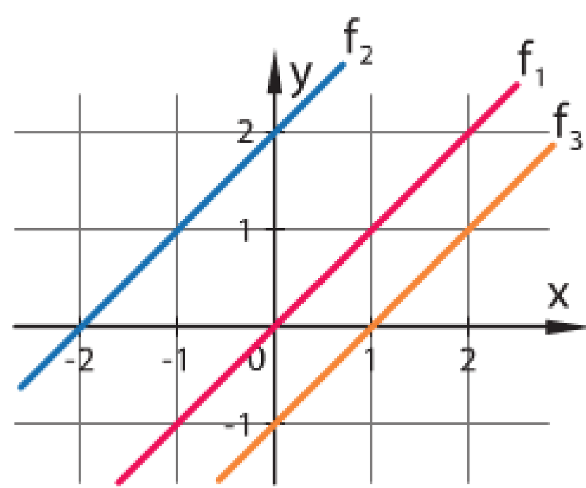
B

5.8 ***1)*** Bilde jeweils die erste Ableitung folgender Funktionen.

$f_1(x) = x^3$ $f_2(x) = x^3 + 3$ $f_3(x) = x^3 - 5$ $f_4(x) = x^3 + 87$

2) Gib drei verschiedene Funktionen an, deren Abteilung $f'(x) = 4x^3$ ist.

Während im vorangegangenen Abschnitt die Stammfunktion nur für Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen ermittelt wurde, wird nun allgemein die Frage behandelt, wie man zu einer **gegebenen Ableitungsfunktion** die **ursprüngliche Funktion** ermittelt.
ZB: Ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = 1$, so kann die ursprüngliche Funktion $f_1(x) = x$ sein. Allerdings könnte sie auch $f_2(x) = x + 2$ oder $f_3(x) = x - 1$ lauten, da jede additive Konstante beim Differenzieren null wird.



Die links dargestellten linearen Funktionen haben alle die Steigung k = 1, sie unterscheiden sich nur durch den y-Achsenabschnitt voneinander.

Man sieht also, dass die Umkehrung des Differenzierens auf eine unendliche Anzahl von Funktionen führt. Für obiges Beispiel schreibt man allgemein $f(x) = x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Die – bis auf eine Konstante – wiederhergestellte Funktion bezeichnet man als **Stammfunktion**, den Rechenvorgang als **Integrieren** (latein „integrare" = wiederherstellen).

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** einer Funktion f, wenn $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ gilt.
Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x), so sind auch alle Funktionen der Form $F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ Stammfunktionen von f(x).
Ist F eine Stammfunktion von f, so nennt man die Menge aller Funktionen $F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ das **unbestimmte Integral** von f(x) und man schreibt dafür $\int f(x)\,dx$.
Bezeichnungen:
x … Integrationsvariable, f(x) … Integrand, C … Integrationskonstante
Der Ausdruck „dx" gibt an, nach welcher Variable integriert wird.

Für elementare Funktionen erhält man eine Stammfunktion mithilfe der Ableitung.

ZB: $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$, da $F'(x) = \frac{2x}{2} = x$

$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$, da $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$

Allgemein: $f(x) = F'(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, da $F'(x) = \frac{(n+1) \cdot x^n}{n+1} = x^n$; $n \neq -1$

Unbestimmtes Integral der Potenzfunktion: $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$

Merkregel: „In der Hochzahl 1 addieren, anschließend durch die neue Hochzahl dividieren."

Ebenso ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Ableitungsregeln:

Unbestimmte Integrale weiterer elementarer Funktionen

$\int e^x\,dx = e^x + C$ $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$ $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

Grundlagen der Integralrechnung

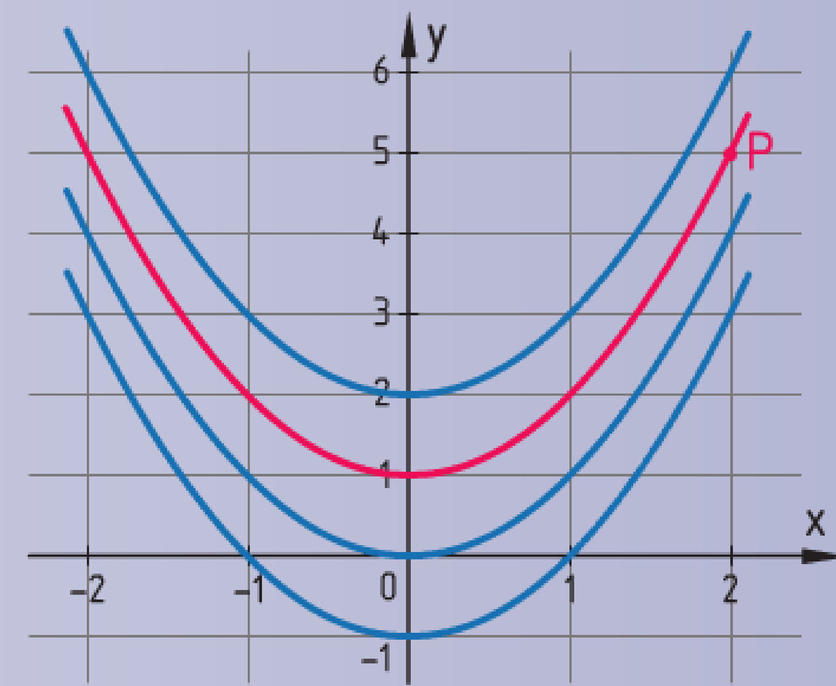
Da für C beliebige Zahlen eingesetzt werden können, erhält man bei der grafischen Darstellung des unbestimmten Integrals $y = F(x) + C$ Funktionsgraphen (Kurven), die in y-Richtung parallel verschoben sind. Eine Menge solcher Kurven bezeichnet man als **Kurvenschar**. Das unbestimmte Integral kann daher geometrisch als Kurvenschar dargestellt werden.

Soll eine **spezielle Kurve** dieser Schar so ausgewählt werden, dass sie zum Beispiel durch einen vorgegebenen Punkt P verläuft, so geschieht das durch Vorgabe eines Wertepaars $(x_P|F(x_P))$. Die Konstante C kann dann berechnet werden und man erhält die durch diesen Punkt verlaufende Stammfunktion $F_P(x)$.

B **5.9** Gib das unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = 2x$ an und stelle es für $C = -1, 0$ und 2 grafisch dar. Bestimme die Gleichung jener Kurve, die durch den Punkt $P(2|5)$ verläuft und zeichne auch diese ein.

Lösung:
$f(x) = 2x$
$\int 2x\,dx = x^2 + C$

Kurve durch $P(2|5)$:
$F_P(x) = x^2 + C_P$
$P(2|5) \Rightarrow F_P(2) = 5$
$4 + C_P = 5 \Rightarrow C_P = 1$
Gleichung der Kurve durch $P(2|5)$:
$F_P(x) = x^2 + 1$



BC **5.10** Ordne der Funktion f jeweils eine passende Stammfunktion F zu.

1) $f(x) = 2x$	***A)*** $F(x) = x^4$
2) $f(x) = (x + 1)^2$	***B)*** $F(x) = 2$
3) $f(x) = 2$	***C)*** $F(x) = 2 \cdot (x + 1)$
4) $f(x) = 4x^3$	***D)*** $F(x) = \frac{x^6}{6}$
5) $f(x) = x^5$	***E)*** $F(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x - 9)$
	F) $F(x) = 7 + x^2$

BC **5.11** Gib zwei beliebige Stammfunktionen der gegebenen Funktion an.

a) $f(x) = 4$ ***c)*** $f(x) = 0$ ***e)*** $f(x) = -x^{-2}$
b) $f(x) = 4x^3$ ***d)*** $f(x) = x^{-2}$ ***f)*** $f(x) = 5x^4$

B **5.12** Gib das unbestimmte Integral der gegebenen Funktion an.

a) $f(x) = x^2$ ***c)*** $f(x) = \sin(x)$ ***e)*** $f(x) = x$
b) $f(x) = e^x$ ***d)*** $f(x) = x^4$ ***f)*** $f(x) = \cos(x)$

B **5.13** Gib das unbestimmte Integral an und stelle es für $C = -2, 0$ und 1 grafisch dar. Bestimme die Gleichung jener Kurve, die durch den Punkt P verläuft und zeichne auch diese Funktion ein.

a) $\int 2\,dx,\ P(-2|3)$ ***b)*** $\int 4x\,dx,\ P(1|4)$ ***c)*** $\int \cos(x)\,dx,\ P(0|-2)$

5.14 Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründe deine Antworten. CD

A) Unterscheiden sich zwei Funktionen nur in einer Konstanten, so sind deren Stammfunktionen gleich.

B) Alle Stammfunktionen einer gegebenen Funktion unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor.

C) Die Menge aller Stammfunktionen bildet das unbestimmte Integral.

D) Zu einer gegebenen Funktion gibt es unendlich viele unbestimmte Integrale.

E) Zu einer gegebenen Funktion gibt es unendlich viele Stammfunktionen.

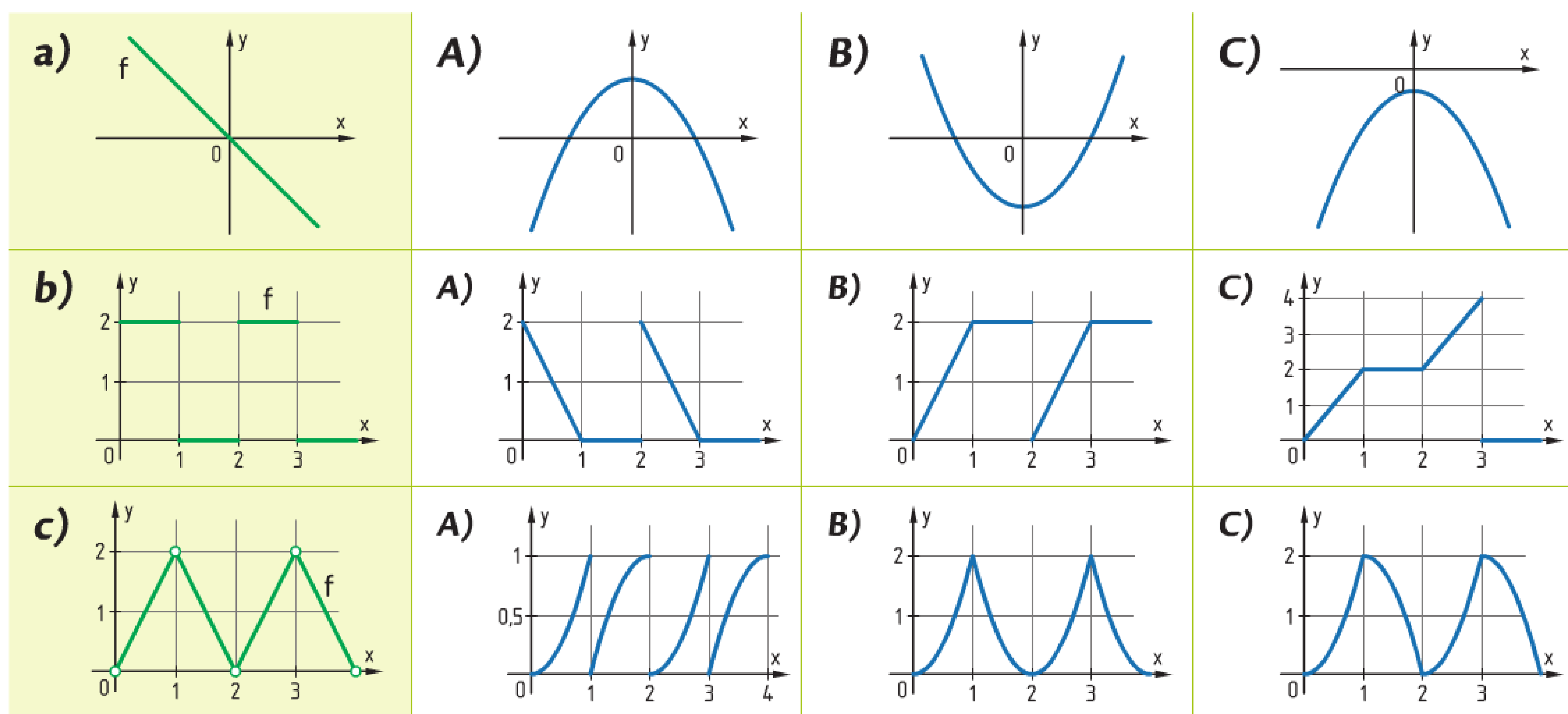
F) Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x), so gilt: $f'(x) = F(x)$

G) Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x), so ist auch F(x) + 2 eine Stammfunktion.

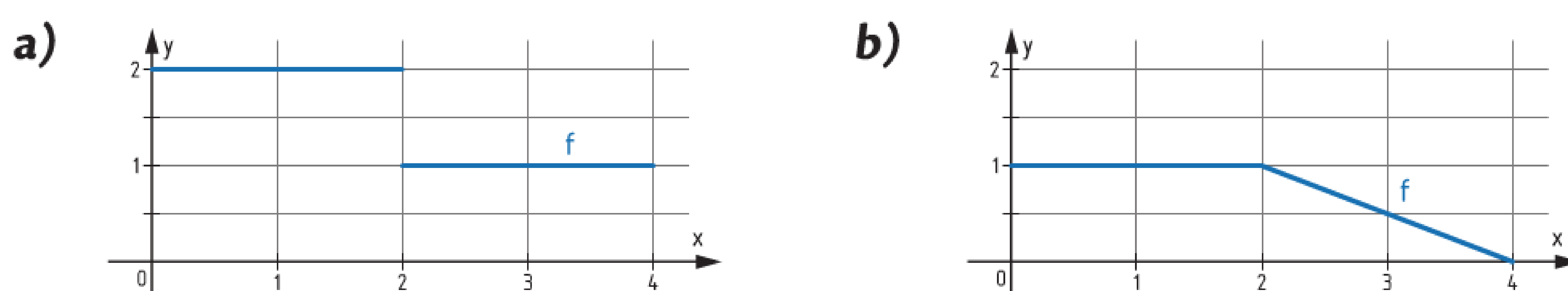
H) Ist $F(x) = x^2 + 2x - 5$ eine Stammfunktion von f(x), so ist auch $G(x) = (x + 1)^2$ eine Stammfunktion von f(x).

I) Sind F_1 und F_2 verschiedene Stammfunktionen von f, so ist auch $F_1 + F_2$ eine Stammfunktion von f.

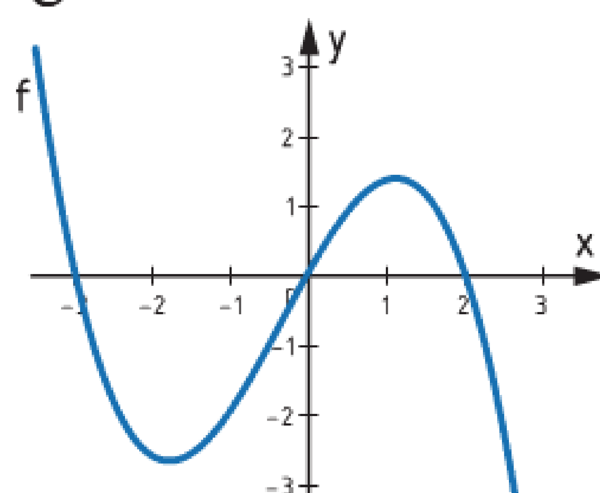
5.15 Ordne der dargestellten Funktion f alle passenden Stammfunktionen zu. AC



5.16 Skizziere zum vorgegebenen Graphen von f jene Stammfunktion F, die durch den Punkt O(0|0) verläuft und keine Sprungstelle aufweist. ABC



5.17 Gib an, welche der folgenden Aussagen richtig sind, wenn F eine Stammfunktion von f ist. Begründe deine Antworten. ACD



A) F hat in x = 2 ein Maximum.

B) F kann eine Polynomfunktion 3. Grads sein.

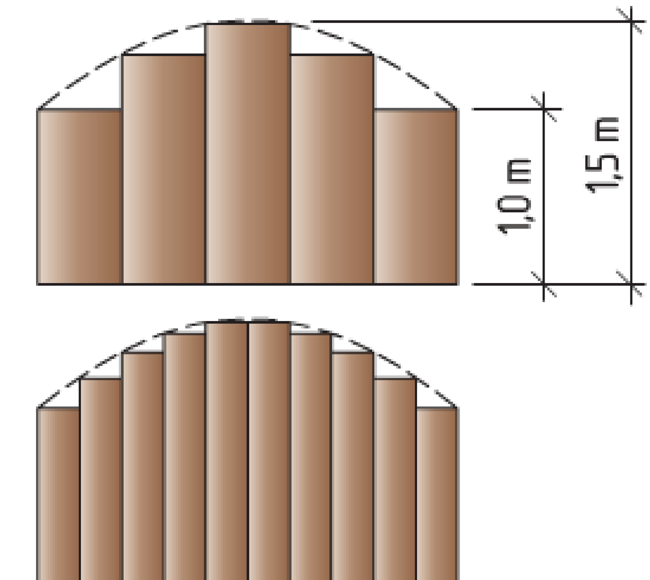
C) F ist im Intervall [1; 2] fallend.

D) F hat im Intervall [–3; 3] genau zwei Wendepunkte.

5.1.3 Bestimmtes Integral und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In Abschnitt 5.1.1 wurde am Beispiel Geschwindigkeit und Weg bereits der Zusammenhang zwischen Stammfunktion und bestimmtem Integral veranschaulicht. Dieser Zusammenhang wird im Folgenden allgemein formuliert und bewiesen.

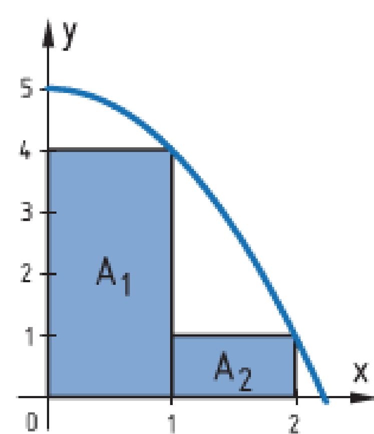
AD **5.18** Ein 2,50 m breites Holztor mit parabelförmigem Abschluss soll gebaut werden. Dazu stehen zwei mögliche Ausführungen zur Auswahl: Es können 50 cm oder 25 cm breite Bretter verwendet werden. Wie man in der Abbildung sieht, wird für das Tor mit den breiten Brettern weniger Holz verbraucht. Allerdings nähert das Tor mit den schmäleren Brettern die Form genauer an. Erkläre, wie du ermitteln kannst, wie viel Quadratmeter Holz jeweils für den Bau notwendig sind.



Obersummen und Untersummen

Es soll zum Beispiel der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = -x^2 + 5$ und der x-Achse im Bereich [0; 2] ermittelt werden. Die Fläche wird durch Rechtecke, die in einem Fall der Fläche eingeschrieben und im anderen Fall umgeschrieben sind, angenähert. Wählt man für die Breite der Rechtecke $\Delta x = 1$, so erhält man jeweils zwei Rechtecke. Die Höhen der Rechtecke ergeben sich durch Berechnung der Funktionswerte.

Eingeschriebene Rechtecke:



$h_1 = f(1) = -1^2 + 5 = 4$

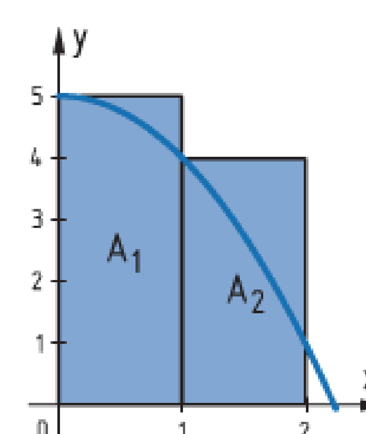
$h_2 = f(2) = 1$

$U_2 = h_1 \cdot \Delta x + h_2 \cdot \Delta x = (h_1 + h_2) \cdot \Delta x$

$U_2 = (4 + 1) \cdot 1 = 5\ E^2$

Der Flächeninhalt wird als **Untersumme** U_n (n ... Anzahl der Unterteilungen) bezeichnet.

Umgeschriebene Rechtecke:



$h_1 = f(0) = 5$

$h_2 = f(1) = 4$

$O_2 = (h_1 + h_2) \cdot \Delta x$

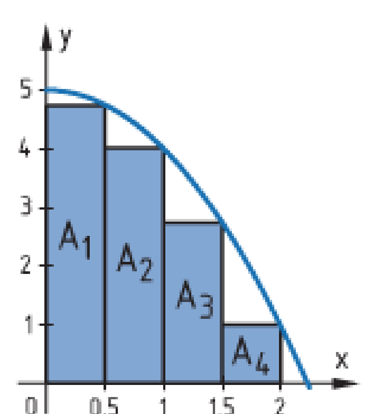
$O_2 = (5 + 4) \cdot 1 = 9\ E^2$

In diesem Fall wird der Flächeninhalt als **Obersumme** O_n bezeichnet.

Der Wert der Untersumme U_n ist kleiner, jener der Obersumme O_n größer als der gesuchte Flächeninhalt. Der tatsächliche Flächeninhalt liegt zwischen U_n und O_n, also gilt:

$$U_n \leqslant A \leqslant O_n, \text{ dh. } 5\ E^2 \leqslant A \leqslant 9\ E^2$$

Werden die Rechtecksbreiten Δx kleiner, zB $\Delta x = 0{,}5$ gewählt, erhöht sich die Genauigkeit der Näherung.



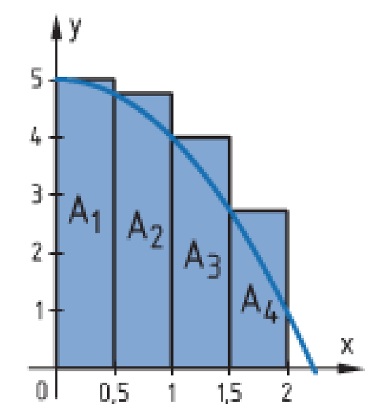
$h_1 = f(0{,}5) = 4{,}75$

$h_2 = f(1) = 4$

$h_3 = f(1{,}5) = 2{,}75$

$h_4 = f(2) = 1$

$U_4 = (4{,}75 + 4 + 2{,}75 + 1) \cdot 0{,}5 = 6{,}25\ E^2$



$h_1 = f(0) = 5$

$h_2 = f(0{,}5) = 4{,}75$

$h_3 = f(1) = 4$

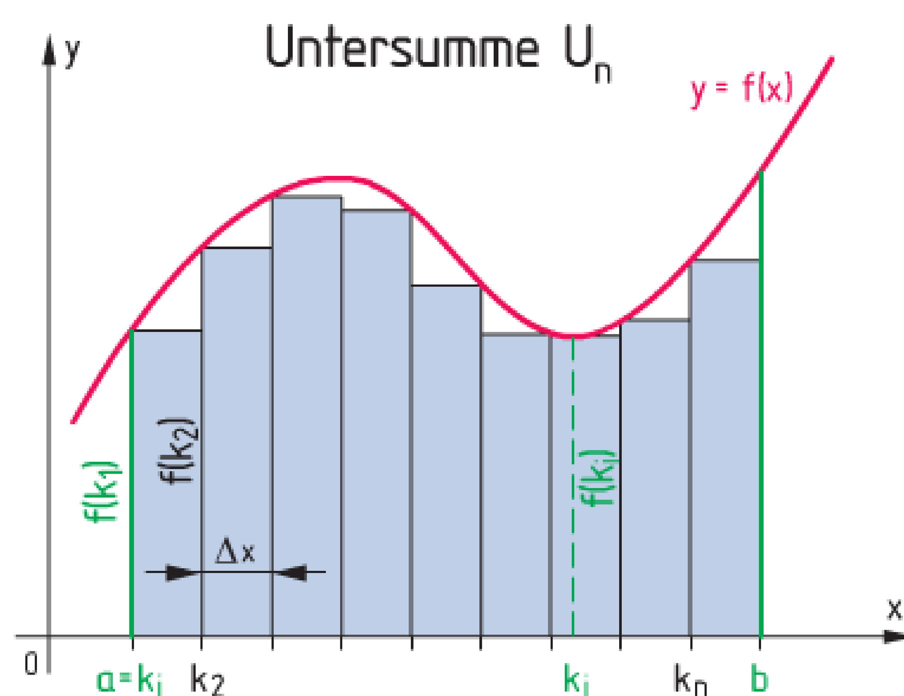
$h_4 = f(1{,}5) = 2{,}75$

$O_4 = (5 + 4{,}75 + 4 + 2{,}75) \cdot 0{,}5 = 8{,}25\ E^2$

$$6{,}25\ E^2 \leqslant A \leqslant 8{,}25\ E^2$$

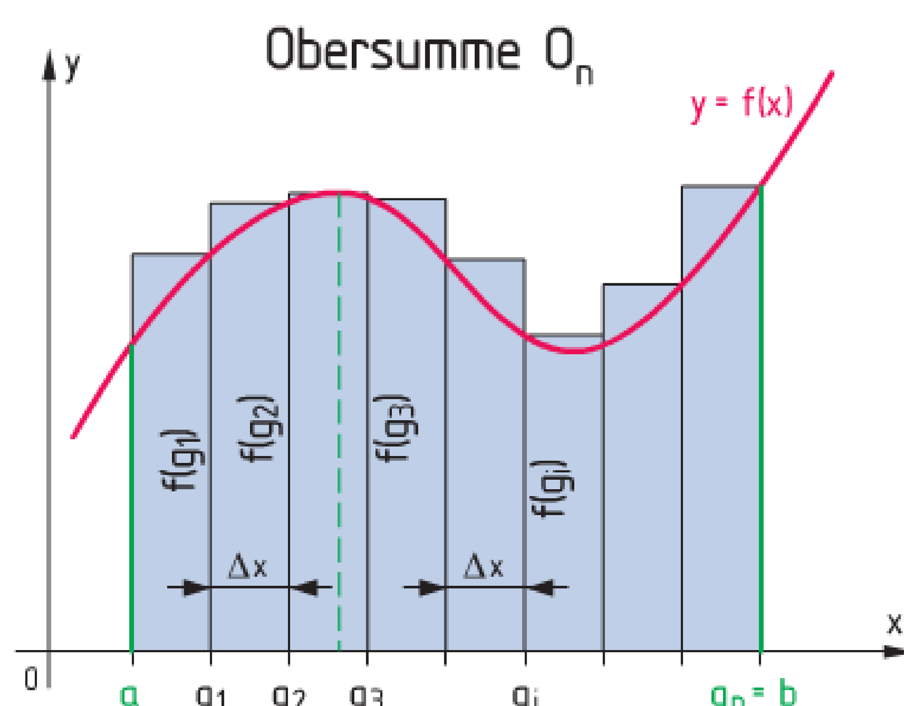
Wird die Anzahl der Unterteilungen immer weiter erhöht, also die Breite der Rechtecke immer kleiner, so nähert sich der „untere“ Flächeninhalt dem gesuchten Flächeninhalt, ebenso der „obere“. Mithilfe von Grenzwerten ausgedrückt bedeutet das: $\lim\limits_{n \to \infty}(U_n) = \lim\limits_{n \to \infty}(O_n) = A$

Nun werden diese Überlegungen allgemein durchgeführt:
Bei einer stetigen Funktion $y = f(x)$ wird das Intervall $[a; b]$, in dem $f(x) \geqslant 0$ gilt, in n Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ unterteilt.
In jedem Teilintervall wird die Stelle mit dem kleinsten bzw. größten Funktionswert als k_i bzw. g_i bezeichnet. Die eingeschriebenen bzw. umgeschriebenen Rechtecke sind jeweils so hoch wie der niedrigste bzw. höchste Punkt im Teilintervall Δx (siehe Abbildung). Das i-te eingeschriebene Rechteck hat daher den Flächeninhalt $f(k_i) \cdot \Delta x$, das i-te umgeschriebene den Flächeninhalt $f(g_i) \cdot \Delta x$.



Die Summe der Flächeninhalte der eingeschriebenen Rechtecke – die Untersumme U_n – ist eine untere Schranke für den tatsächlichen Flächeninhalt.

$$U_n = f(k_1) \cdot \Delta x + f(k_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(k_n) \cdot \Delta x = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(g_i) \cdot \Delta x$$



Die Summe der Flächeninhalte der umgeschriebenen Rechtecke – die Obersumme O_n – ist eine obere Schranke für den tatsächlichen Flächeninhalt.

$$O_n = f(g_1) \cdot \Delta x + f(g_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(g_n) \cdot \Delta x = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(g_i) \cdot \Delta x$$

Der Flächeninhalt A liegt zwischen der Unter- und der Obersumme: $U_n \leqslant A \leqslant O_n$
Wird nun die Anzahl der Teilintervalle erhöht, so werden die Untersummen größer und die Obersummen kleiner. Für $n \to \infty$ geht die Breite Δx der Rechtecke gegen 0 und wird dann mit dx bezeichnet. Konvergieren die Unter- und Obersummen gegen den gleichen Grenzwert, ist also $\lim\limits_{n \to \infty}(U_n) = \lim\limits_{n \to \infty}(O_n)$, so heißt dieser Grenzwert **bestimmtes Integral** und man schreibt:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(k_i) \cdot \Delta x\right) = \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(g_i) \cdot \Delta x\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Gegeben ist die Funktion f, die im Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt ist. Man zerlegt das Intervall in n Teilintervalle und bildet die Unter- und Obersummen.
Existiert für $n \to \infty$ der Grenzwert der Untersummen und der Grenzwert der Obersummen und sind diese gleich, so heißt die Funktion **integrierbar**.
Der Grenzwert heißt **bestimmtes Integral** der Funktion f(x) im Intervall $[a; b]$ und man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Bezeichnungen:
x ... Integrationsvariable, f(x) ... Integrand (Integrandfunktion)
a ... untere Grenze, b ... obere Grenze

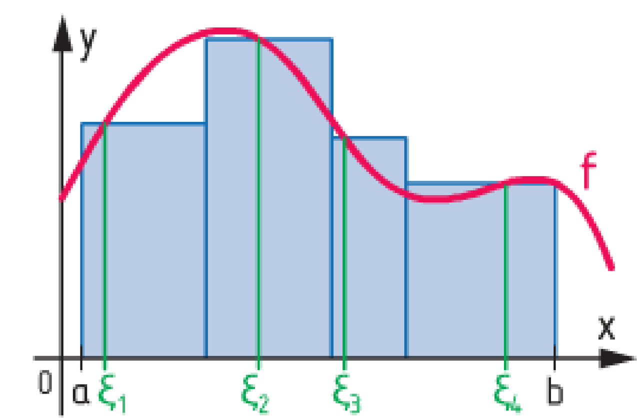
Grundlagen der Integralrechnung

Es gilt:

- Alle stetigen Funktionen sowie beschränkte Funktionen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen sind integrierbar.
- Geometrisch entspricht das bestimmte Integral dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $y = f(x)$ (mit $f(x) \geqslant 0$), der x-Achse und den Senkrechten bei $x = a$ und $x = b$. Addiert werden Rechtecke der Höhe $f(x)$ und der Breite dx, also Teilflächen mit dem Flächeninhalt $dA = f(x) \cdot dx$. Die (unendlich kleinen) Teilflächen dA werden als **Flächenelemente** bezeichnet.

Bemerkungen:

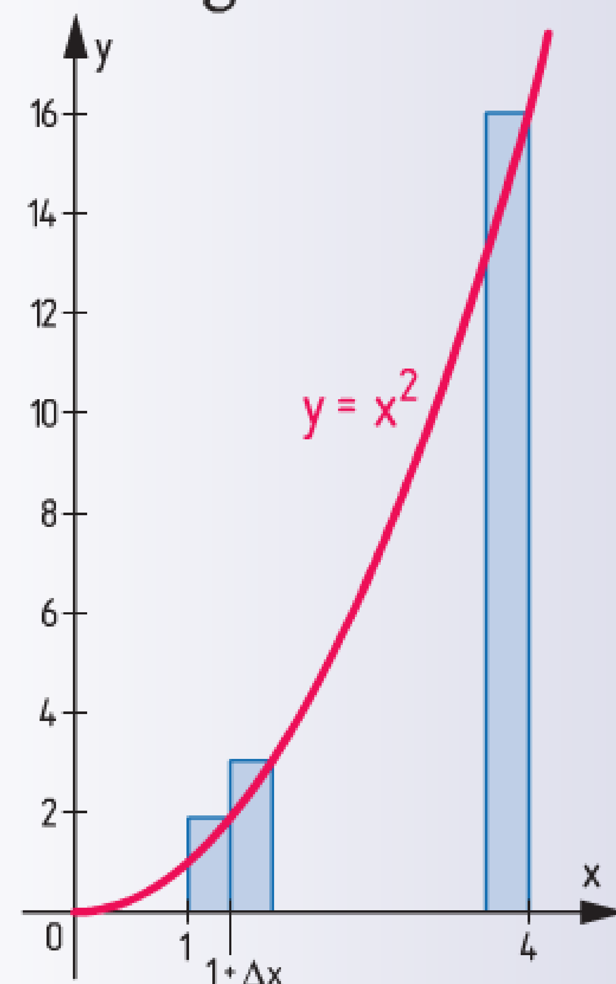
- Das Integralzeichen $\int$ stellt ein symbolisiertes S dar, das für den Grenzwert einer Summe steht. Es wurde von Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz eingeführt.
- Die Definition des bestimmten Integrals geht auf Bernhard Riemann (deutscher Mathematiker, 1826 – 1866) zurück.
  Dieser benutzte beliebige Zwischenpunkte der Teilintervalle:



$$\lim_{n \to \infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

B **5.19** Berechne das bestimmte Integral $\int_1^4 x^2\,dx$ als Grenzwert der Obersummen.

Lösung:



$$\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$g_1 = 1 + \frac{3}{n}$$

$$g_2 = 1 + 2 \cdot \frac{3}{n}$$

$$g_i = 1 + i \cdot \frac{3}{n}$$

$$h_i = f(g_i) = \left(1 + i \cdot \frac{3}{n}\right)^2$$

- Wir teilen das Intervall in n gleich breite Teilintervalle der Länge Δx und verwenden umgeschriebene Rechtecke. Der höchste Punkt liegt jeweils am rechten Rand.
- Die Höhen der Rechtecke ergeben sich aus den Funktionswerten.

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} f(g_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + i \cdot \frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 + \left(1 + 2 \cdot \frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1 + n \cdot \frac{3}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{3}{n} =$$

$$= \left(1 + 2 \cdot \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + 1 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{n} + 2^2 \cdot \frac{9}{n^2} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + 1 + 2 \cdot n \cdot \frac{3}{n} + n^2 \cdot \frac{9}{n^2}\right) \cdot \frac{3}{n} =$$

$$= \left[1 + 1 + \ldots + 1 + 2 \cdot \frac{3}{n} \cdot (1 + 2 + \ldots + n) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{9}{n^2} \cdot (1 + 2^2 + \ldots + n^2)\right] \cdot \frac{3}{n} =$$

$$= \left(n + 2 \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}\right) \cdot \frac{3}{n} = \ldots =$$

$$= \left(n + 3n + 3 + 3n + \frac{9}{2} + \frac{3}{2n}\right) \cdot \frac{3}{n} = 21 + \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty}(O_n) = \lim_{n \to \infty}\left(21 + \underbrace{\frac{45}{2n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2n^2}}_{\to 0}\right) = 21$$

- Binomische Formel anwenden, zusammenfassen und herausheben
- Summenformeln (siehe Abschnitt 1):
  $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
  $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$
- Kürzen, ausmultiplizieren und vereinfachen
- Bilden des Grenzwerts

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Zusammenhang zwischen dem unbestimmten Integral, also der Stammfunktion, und dem bestimmten Integral, also dem Flächeninhalt, wird durch den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** angegeben:

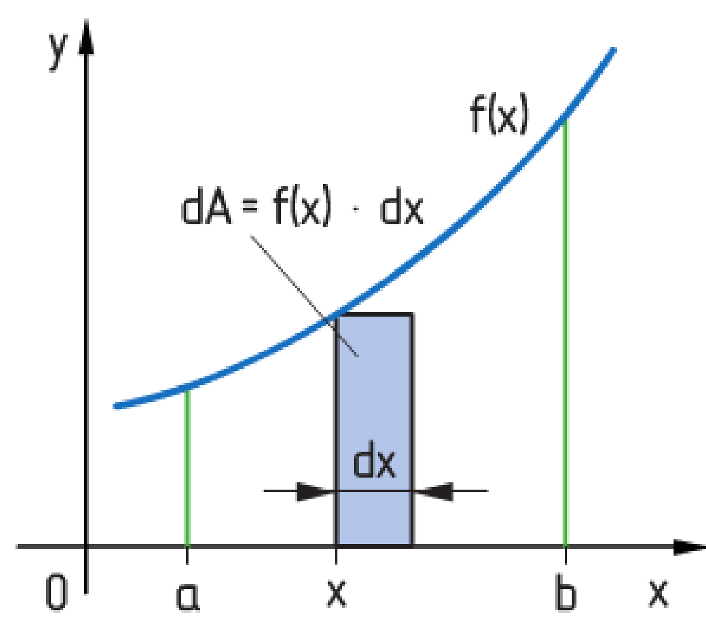
Ist f eine stetige Funktion auf einem Intervall I, dann gilt:

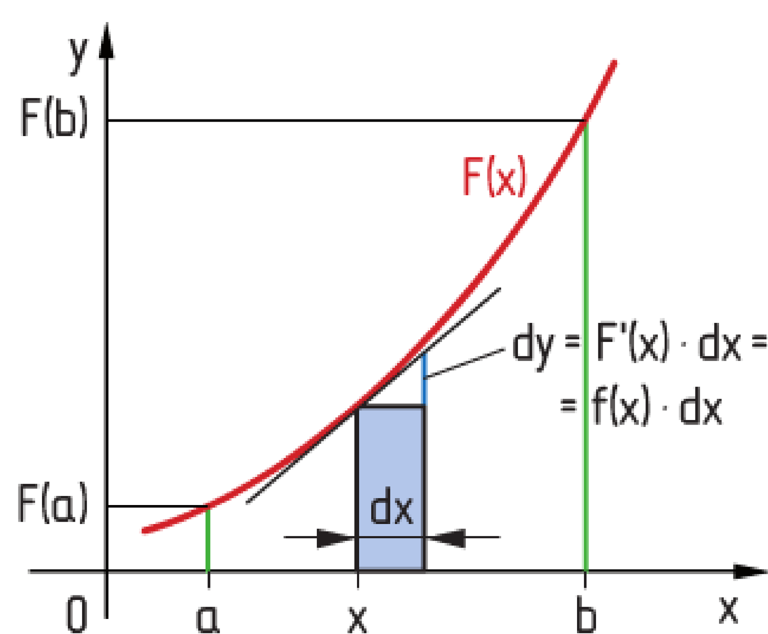
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ mit $a, x \in I$ ist eine Stammfunktion von f(x), also gilt $F'(x) = f(x)$

Ist F(x) eine beliebige Stammfunktion von f(x), so gilt:

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Wir veranschaulichen zunächst den zweiten Teil der Behauptung und betrachten die Funktion $f(x) = F'(x)$ und die Stammfunktion F(x).





Um den Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse zu bestimmen, wird das Intervall [a; b] in Teilintervalle mit der sehr kleinen Breite dx zerlegt und die Fläche durch Rechtecke angenähert. Der Flächeninhalt wächst – beginnend bei null – mit jedem Streifen um $f(x) \cdot dx$. Nun wird die Stammfunktion F(x) betrachtet.
Die Steigung der Tangente an einer Stelle x beträgt $F'(x) = f(x)$, also gilt: $dy = f(x) \cdot dx$. Ist dx sehr klein, entspricht $dy = F'(x) \cdot dx$ dem Zuwachs der Funktion F(x).
Im Intervall [a; b] beträgt der Zuwachs der Funktionswerte insgesamt $F(b) - F(a)$. Da sowohl die Flächeninhalte unter dem Funktionsgraphen von f(x) als auch die Funktionswerte von F(x) in jedem Streifen um $f(x) \cdot dx$ zunehmen, muss auch der Flächeninhalt unter der Funktion f(x) insgesamt $F(b) - F(a)$ betragen.

Wählt man eine feste untere Grenze a und eine variable obere Grenze x, so ergibt sich der erste Teil der Behauptung:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) = F(x) + C$$

Eine Folgerung aus dem Hauptsatz ist, dass zu jeder stetigen Funktion die Stammfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ existiert. F(x) kann jedoch nicht immer in geschlossener Form, also als Formel, die sich aus bekannten Funktionen zusammensetzt, angegeben werden, zum Beispiel $\int e^{x^2}\,dx$.
In diesem Fall kann der Wert des bestimmten Integrals mithilfe von Näherungsverfahren numerisch berechnet werden (siehe Abschnitt 7).

Vorgehensweise zur Berechnung des bestimmten Integrals:

1. Ermitteln der Stammfunktion mit C = 0.
2. „Obere Grenze minus untere Grenze": Die obere und die untere Grenze werden in die Stammfunktion eingesetzt und die Differenz der Funktionswerte wird berechnet.

Schreibweise: $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Grundlagen der Integralrechnung

Produktsummen

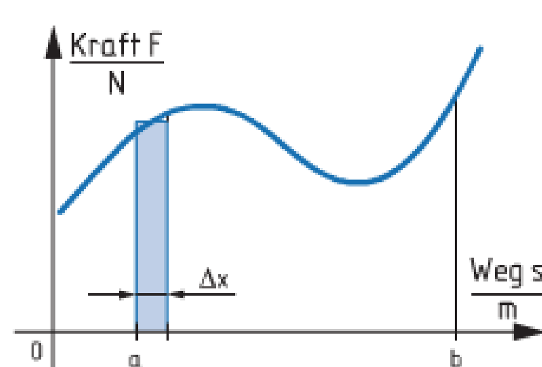
Viele physikalische, technische oder wirtschaftliche Größen werden als Produkt zweier weiterer Größen berechnet, zum Beispiel „Arbeit = Kraft mal Weg". Diese Formel gilt jedoch nur, wenn die Kraft längs des zurückgelegten Wegs konstant ist. Falls diese hingegen veränderlich, also eine Funktion des Wegs ist, ist die genaue Berechnung mit den bisherigen Methoden nicht möglich. In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt, dass das bestimmte Integral näherungsweise gleich einer Summe von Produkten ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Dabei ist die Näherung umso genauer, je kleiner Δx ist, also je schmäler die Teilintervalle sind bzw. je größer die Anzahl der Summanden im Intervall [a; b] ist. Bei einer unendlich feinen Unterteilung erhält man genau den Wert des bestimmten Integrals. Damit ist es möglich, den Wert von Produkten auch dann zu berechnen, wenn einer der Faktoren keine Konstante sondern eine Funktion ist. Der Zahlenwert des Produkts entspricht dem Zahlenwert des Flächeninhalts unter der Kurve. Die Einheiten werden bei der Berechnung oft weggelassen. Die Einheit des Ergebnisses ergibt sich aus der Einheit des Produkts $f(x) \cdot \Delta x$.
ZB: $W = F(s) \cdot \Delta s$; Einheit: 1 N · 1 m ≙ 1 J (Joule).

Im Folgenden sind einige Zusammenhänge angeführt, deren Berechnung mithilfe der Interpretation des Integrals als Produktsumme erfolgt.

- **Arbeit, Kraft und Wegstrecke**
  Ist die Kraft F längs einer Wegstrecke s konstant, so gilt $W = F \cdot s$.
  Ist hingegen die Kraft $F = F(s)$ längs des Wegs veränderlich, so kann die Arbeit ermittelt werden, indem man sich die Kraft F(s) längs (sehr) kleiner Wegstrecken Δs konstant denkt.



Für die Arbeit im i-ten Teilintervall gilt: $W_i = F(s_i) \cdot \Delta s$

Die Gesamtarbeit W in [a; b] beträgt dann näherungsweise $W \approx \sum_{i=1}^{n} F(s_i) \cdot \Delta s$

Für $\Delta s \to 0$ erhält man den genauen Wert: $W = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} F(s_i) \cdot \Delta s\right) = \int_a^b F(s)\,ds$

- **Arbeit, Leistung und Zeit**
  Für die Arbeit bei konstanter Leistung P gilt: $W = P \cdot t$
  Ist die Leistung jedoch eine zeitabhängige Funktion $P = P(t)$, so kann man analog zu den obigen Überlegungen vorgehen und es gilt:

$$W = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} P(t_i) \cdot \Delta t\right) = \int_a^b P(t)\,dt$$

- **Durchflussmenge, Durchflussgeschwindigkeit und Zeit**
  Bei konstanter Durchflussgeschwindigkeit D kann die Gesamtmenge M durch Multiplikation mit der Zeit ermittelt werden: $M = D \cdot t$
  Ist die Durchflussgeschwindigkeit $D = D(t)$ hingegen zeitabhängig, so gilt:



$$M = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} D(t_i) \cdot \Delta t\right) = \int_a^b D(t)\,dt$$

- **Ladung, Stromstärke und Zeit**
  Für die Ladung bei konstanter Stromstärke I gilt: $Q = I \cdot t$
  Ist die Stromstärke eine zeitabhängige Funktion i(t), so gilt:

$$q(t) = \int i(t)\,dt$$

5.20 Berechne die Untersumme und die Obersumme der Funktion im gegebenen Intervall für **1)** n = 4 **2)** n = 6 Teilintervalle. Vergleiche die Ergebnisse aus **1)** und **2)** und interpretiere die Unterschiede. BC

a) $f(x) = x^2$, [1; 3] **b)** $f(x) = x + 1$, [0; 3] **c)** $f(x) = 3x$, [2; 5]

5.21 Berechne das bestimmte Integral als Grenzwert der **1)** Obersummen, **2)** Untersummen. B

a) $\int_0^3 1\,dx$ **b)** $\int_0^4 2x\,dx$ **c)** $\int_1^3 x^2\,dx$ **d)** $\int_2^4 \frac{x}{2}\,dx$

5.22 Zeichne den Funktionsgraphen und ermittle den Flächeninhalt, den der Graph mit der x-Achse einschließt, mithilfe von Flächenformeln. Überprüfe das Ergebnis durch Berechnung des bestimmten Integrals. BC

a) $\int_0^3 2\,dx$ **b)** $\int_2^4 2x\,dx$ **c)** $\int_{-1}^1 (x + 1)\,dx$ **d)** $\int_1^5 (2x - 1)\,dx$

5.23 Auf einer stark befahrenen Straße wurden regelmäßig Verkehrszählungen durchgeführt. Die Anzahl der Fahrzeuge pro Minute wird im Intervall $[t_1; t_2]$ durch eine Funktion f beschrieben. Beschreibe mathematisch, wie folgende Werte ermittelt werden können: AC

1) maximale Anzahl an Fahrzeugen pro Minute

2) Gesamtanzahl an Fahrzeugen im Zeitintervall $[t_1; t_2]$

3) mittlere Anzahl an Fahrzeugen im Zeitintervall $[t_1; t_2]$

5.24 Eine Datenleitung hat normalerweise eine Übertragungsrate von 100 MBits pro Sekunde. AB

1) Welche Datenmenge wird in einer Minute übertragen?

2) Wegen Übertragungsproblemen sinkt die Übertragungsrate pro Sekunde um 50 $\frac{\text{kBits}}{\text{s}}$. Berechne, welche Datenmenge innerhalb der ersten Minute nach Auftreten des Problems übertragen wird.

5.25 Um einen vollen Maltesack zu ziehen, benötigt Bauer Mecke eine Kraft von 500 N. AB

1) Berechne die Arbeit, die verrichtet wird, wenn er den Sack 10 m weit zieht.

2) Berechne die Arbeit, die auf dieser Strecke verrichtet wird, wenn der Sack ausrinnt und dadurch die benötigte Kraft linear abnimmt, sodass sie nach 10 m nur noch 250 N beträgt.

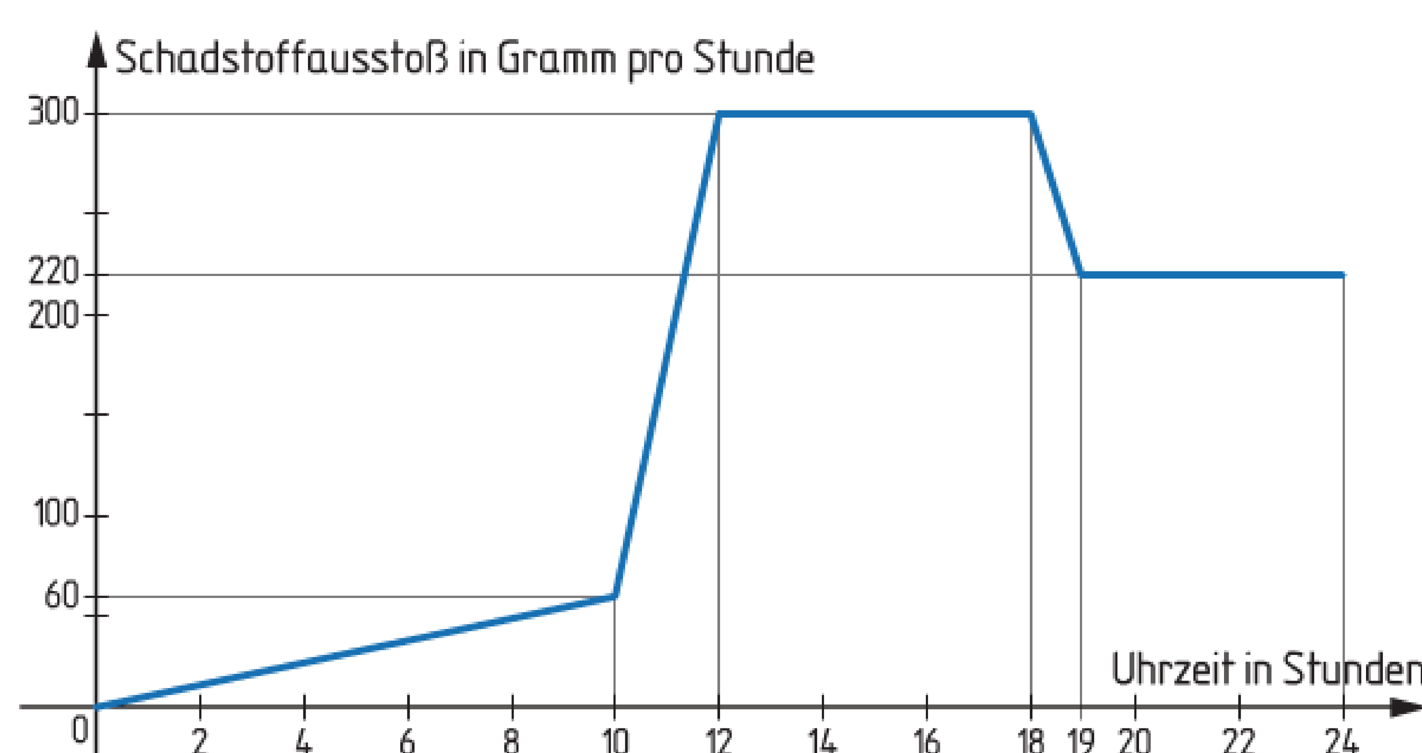
„Max und Moritz – wehe Euch! Jetzt kommt Euer letzter Streich!



Wozu müssen auch die beiden Löcher in die Säcke schneiden? Sehr, da trägt der Bauer Mecke einen seiner Maltesäcke. Aber kaum dass er von hinnen, fängt das Korn schon an zu rinnen.“

(Aus „Max und Moritz“ von Wilhelm Busch.)

5.26 Der Schadstoffausstoß eines Kamins während eines Tags ist in der Skizze dargestellt. Zeichne einen Funktionsgraphen, an dem man die Gesamtschadstoffmenge, die im Lauf dieses Tags ausgestoßen wurde, ablesen kann. ABC



5.2 Integrationsregeln

5.2.1 Grundintegrale

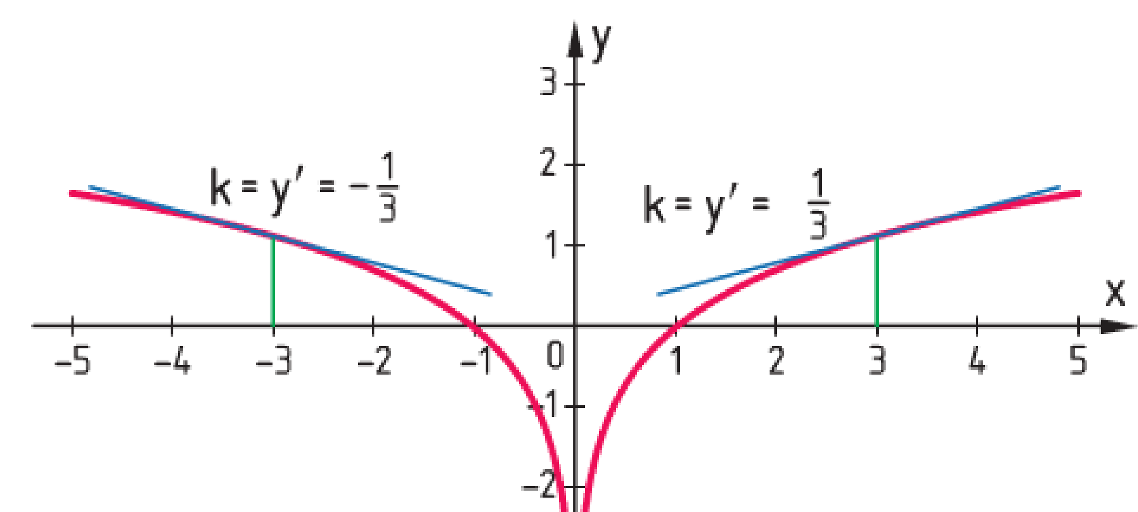
Da Integrieren das Ermitteln einer Stammfunktion – also die Umkehrung des Differenzierens – ist, lassen sich einige unbestimmte Integrale sofort angeben. Als **Grundintegrale** werden vor allem jene Integrale von Funktionen bezeichnet, die sich direkt aus den Ableitungen der Grundfunktionen ergeben.

B **5.27** Bilde die Ableitung.
1) $f_1(x) = \ln(x)$ **2)** $f_2(x) = \cos(x)$ **3)** $f_3(x) = 2x$

In Abschnitt 5.1.2 wurden bereits die Grundintegrale der Funktionen $y = x^n$, $y = e^x$, $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$ angegeben.

Die Regel für Potenzfunktionen $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ gilt allerdings nicht für $n = -1$, da in diesem Fall der Nenner null wäre.
Die Potenzfunktion für $n = -1$ ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, also die Ableitung von $F(x) = \ln(x) + C$.

Die Funktion $y = \ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert. Sie kann jedoch in der Form $y = \ln(|x|)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ erweitert werden. Der linke Ast entsteht durch Spiegelung an der y-Achse. Für die Ableitung gilt ebenfalls $y' = \frac{1}{x}$.
ZB: $y'(3) = \frac{1}{3}$; $y'(-3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$



Es gilt daher: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C,\ x \neq 0$

Bemerkung: Oft wird zum Beispiel statt $\int \frac{1}{x}\,dx$ auch $\int \frac{dx}{x}$ geschrieben.

Grundintegrale

$\int k\,dx = k \cdot x + C$	$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$	$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(\lvert x\rvert) + C \quad x \neq 0$	$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x) + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad a > 0, a \neq 1$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert\right) + C \quad \lvert x\rvert \neq 1$
$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C \quad \lvert x\rvert < 1$
$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh}(x) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcosh}(x) + C \quad \lvert x\rvert > 1$

5.28 Ermittle das unbestimmte Integral. **B**

a) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ **b)** $\int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{t^3}\,dt$

Lösung:

a) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{x^5} + C = \frac{3}{5}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2} + C$

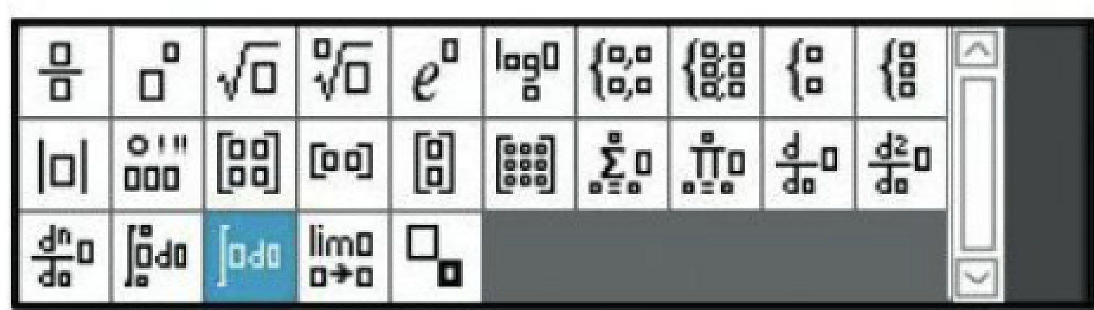
b) $\int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{t^3}\,dt = \int t^{\left(\frac{1}{2}-3\right)}\,dt = \int t^{-\frac{5}{2}}\,dt = \frac{t^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + C = \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^3}} + C = -\frac{2}{3t\sqrt{t}} + C$

Technologieeinsatz: Grundintegrale
TI-Nspire:



Mathcad: www.hpt.at

Das Integral kann über das Menü **4: Analysis, 3: Integral** oder aus den **mathematischen Vorlagen** ausgewählt werden.





- Das unbestimmte Integral wird ohne Integrationskonstante C ausgegeben.

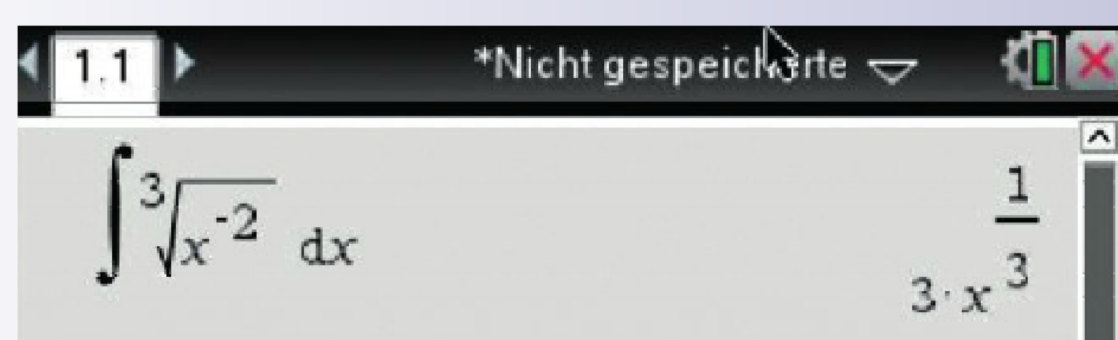
5.29 Ermittle das unbestimmte Integral $\int \sqrt[3]{x^{-2}}\,dx$ ***1)*** ohne ***2)*** mithilfe von Technologieeinsatz und interpretiere die unterschiedlichen Ergebnisse. **BC**



Lösung:

1) $\int \sqrt[3]{x^{-2}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\cdot\sqrt[3]{x} + C$

2) zB: TI-Nspire:



Das Ergebnis wird mit rationalem Exponenten anstelle des Wurzelzeichens ausgegeben.
Das unbestimmte Integral wird ohne Angabe einer Integrationskonstanten ausgegeben.

Aufgaben 5.30 – 5.35: Ermittle die unbestimmten Integrale und überprüfe die Ergebnisse mithilfe von Technologieeinsatz.

5.30 **a)** $\int 0\,dx$ **b)** $\int x\,dx$ **c)** $\int t^7\,dt$ **d)** $\int 1\,dx$ **e)** $\int u^4\,du$ **B**

5.31 **a)** $\int x^{-2}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{t^3}\,dt$ **c)** $\int x^{-1}\,dx$ **d)** $\int \frac{1}{x^5}\,dx$ **e)** $\int \frac{du}{u^4}$ **B**

5.32 **a)** $\int x^{\frac{3}{4}}\,dx$ **b)** $\int x^{\frac{2}{5}}\,dx$ **c)** $\int x^{\frac{7}{3}}\,dx$ **d)** $\int u^{-\frac{1}{3}}\,du$ **e)** $\int x^{-\frac{5}{2}}\,dx$ **B**

5.33 **a)** $\int \sqrt[7]{x^5}\,dx$ **b)** $\int \frac{du}{\sqrt[3]{u^5}}$ **c)** $\int x^3\cdot\sqrt{x}\,dx$ **d)** $\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t}}\,dt$ **e)** $\int \sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}\,dx$ **B**

5.34 **a)** $\int 3^x\,dx$ **b)** $\int \left(\frac{1}{2}\right)^x\,dx$ **c)** $\int 5^x\,dx$ **d)** $\int \left(\frac{2}{3}\right)^x\,dx$ **e)** $\int 5^{-x}\,dx$ **B**

5.35 **a)** $\int \cos(t)\,dt$ **b)** $\int e^u\,du$ **c)** $\int \sin(t)\,dt$ **d)** $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$ **e)** $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **B**

5.2.2 Faktor- und Summenregel

Aus den Rechenregeln für das Differenzieren von Funktionen folgen Rechenregeln für das Integrieren. Sie ermöglichen es, ein Integral von kombinierten Funktionen mithilfe der Grundintegrale zu lösen. Die folgenden Regeln können mithilfe der Definition des bestimmten Integrals oder der Differentialrechnung bewiesen werden. Sie gelten sowohl für das unbestimmte als auch für das bestimmte Integral, werden hier aber nur für das unbestimmte Integral angegeben.

Faktorregel

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$$

Ein konstanter Faktor kann „vor das Integral" geschrieben werden.

Summenregel

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Summen (Differenzen) von Funktionen können einzeln integriert werden.

ZB: $\int (3x + e^x - 2)\,dx$

Die Summanden werden in Einzelintegrale aufgeteilt und anschließend die konstanten Faktoren jeweils vor das Integral geschrieben.

$$\int 3x\,dx + \int e^x\,dx - \int 2\,dx = 3 \cdot \int x\,dx + \int e^x\,dx - 2 \cdot \int 1\,dx = 3 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + (e^x + C_2) - 2 \cdot (x + C_3)$$

Da die Integrationskonstanten zu einer Konstanten $C = 3C_1 + C_2 - 2C_3$ zusammengefasst werden können, kann das Anschreiben der einzelnen Integrationskonstanten auch entfallen.

$$\int (3x + e^x - 2)\,dx = \frac{3x^2}{2} + e^x - 2x + C$$

B **5.36** Gib das unbestimmte Integral an.

a) $\int 6x^2\,dx$ **b)** $\int \frac{da}{a \cdot t}$ **c)** $\int \frac{4x^3 + 2x - 1}{x}\,dx$

Lösung:

a) $\int 6x^2\,dx = 6 \cdot \int x^2\,dx = 6 \cdot \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) = 2x^3 + C$

b) $\int \frac{da}{a \cdot t} = \frac{1}{t} \cdot \int \frac{da}{a} = \frac{1}{t} \cdot \left(\ln(|x|) + C_1\right) = \ln\left(\sqrt[t]{|a|}\right) + C$

- Der Faktor wird vor das Integral geschrieben. Danach wird integriert und vereinfacht.

c) $\int \frac{4x^3 + 2x - 1}{x}\,dx = \int \left(\frac{4x^3}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{1}{x}\right) dx =$

$= \int 4x^2\,dx + \int 2\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x - \ln(|x|) + C$

- Der Bruch wird in Summanden zerlegt und diese werden einzeln integriert.

B **5.37** Schreibe das Integral vor dem Integrieren in der Form $a \cdot \int x^n\,dx$ ($n \in \mathbb{Q}$) an und ermittle es anschließend.

1) $\int \frac{x}{3}\,dx$ **2)** $\int \frac{3}{x}\,dx$ **3)** $\int \sqrt{3} \cdot x\,dx$ **4)** $\int \sqrt{3x}\,dx$ **5)** $\int \sqrt{\frac{3}{x}}\,dx$

Aufgaben 5.38 – 5.39: Gib die unbestimmten Integrale an.

B **5.38** **a)** $\int \frac{2}{t^4}\,dt$ **b)** $\int \frac{3}{4x}\,dx$ **c)** $\int \frac{2}{3r^2}\,dr$ **d)** $\int \frac{4}{7}x^{-3}\,dx$ **e)** $\int \frac{1}{5x^3}\,dx$

B **5.39** **a)** $\int \sqrt{3x}\,dx$ **b)** $\int 2\sqrt[3]{t^2}\,dt$ **c)** $\int \sqrt{\frac{5}{u}}\,du$ **d)** $\int \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}$ **e)** $\int \frac{2\sqrt{x}}{5x}\,dx$

Aufgaben 5.40 – 5.45: Gib die unbestimmten Integrale an.

5.40 **a)** $\int e^2\,dx$ **b)** $\int a \cdot e^x\,dx$ **c)** $\int y_0 \cdot \sin(t)\,dt$ **d)** $\int \frac{b}{\cos^2(x)}\,dx$ **e)** $\int A \cdot \cos(t)\,dt$ B

5.41 **a)** $\int (3x^2 + 1)\,dx$ **b)** $\int \left(5t^4 + \frac{t^2}{2} - 2t\right) dt$ **c)** $\int \left(\frac{3}{x^2} - 4\right) dx$ B

5.42 **a)** $\int (a + r^3 \cdot \sqrt[4]{r} - 3r^2)\,dr$ **b)** $\int \left(2 \cdot \sin(x) - 5 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$ **c)** $\int \left(2 \cdot e^t + \frac{1}{2t} - \frac{4}{t^5}\right) dt$ B

5.43 **a)** $\int \frac{4 - x}{2x}\,dx$ **b)** $\int \frac{3x^3 + 5x + 3}{5x^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{a + bx^2 - cx^3}{x^3}\,dx$ B

5.44 **a)** $\int \frac{3}{2 \cdot \sqrt{1 - x^2}}\,dx$ **b)** $\int \frac{dx}{3 - 3x^2}$ **c)** $\int \frac{2}{\sqrt{4t^2 + 4}}\,dt$ **d)** $\int \frac{5}{2u^2 + 2}\,du$ B

5.45 **a)** $\int x\,dt$ **b)** $\int k \cdot \frac{dv}{V}$ **c)** $\int \frac{\rho}{2\pi r^2 \cdot (1 - \cos(\alpha))}\,dr$ **d)** $\int \frac{F}{E \cdot I} \cdot (\ell - x)\,dx$ B

Aufgaben 5.46 – 5.47: Gib die unbestimmten Integrale an und beschreibe die Unterschiede.

5.46 **1)** $\int (a \cdot x + b)\,dx$ **2)** $\int (a \cdot x + b)\,da$ **3)** $\int (a \cdot x + b)\,db$ **4)** $\int (a \cdot x + b)\,dt$ BC

5.47 **1)** $\int \frac{r \cdot t + s}{r}\,dt$ **2)** $\int \frac{r \cdot t + s}{r}\,dr$ **3)** $\int \frac{r \cdot t + s}{r}\,ds$ **4)** $\int \frac{r \cdot t + s}{r}\,dx$ BC

Aufgaben 5.48 – 5.49: Ermittle jeweils die gesuchte Stammfunktion.

5.48 **a)** $F(x) = \int (2x + 1)\,dx;\; F(0) = 2$ **b)** $F(t) = \int t^2\,dt;\; F(0) = 0$ B

5.49 **a)** $y(t) = \int \sin(t)\,dt;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ **b)** $h(t) = \int -g \cdot t\,dt;\; h(0) = h_0$ B

5.50 Tina hat ein unbestimmtes Integral folgendermaßen ermittelt: CD



$$\int (x + 1)^2\,dx = \int (x^2 + 2x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$$

Manuel hat das Integral mithilfe des Taschenrechners ermittelt:

$\int (x+1)^2\,dx$	$\frac{(x+1)^3}{3}$
$\text{expand}\left(\frac{(x+1)^3}{3}\right)$	$\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}$

Er gibt als Lösung an:

$$\int (x + 1)^2\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3} + C$$

Erkläre, ob eine, keine oder beide Lösungen richtig sind.

5.51 In einem Hausübungsheft stehen folgende Berechnungen. Erkläre, welcher Fehler jeweils gemacht wurde und gib das richtige Ergebnis an. BD

1) $\int (5x^3 + 3x^2)\,dx = 5 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + C$

2) $\int (a \cdot x^b + b \cdot a^x)\,dx = a \cdot \frac{x^{b+1}}{b+1} + b \cdot \frac{a^{x+1}}{x+1} + C$

5.2.3 Berechnungen mit bestimmten Integralen

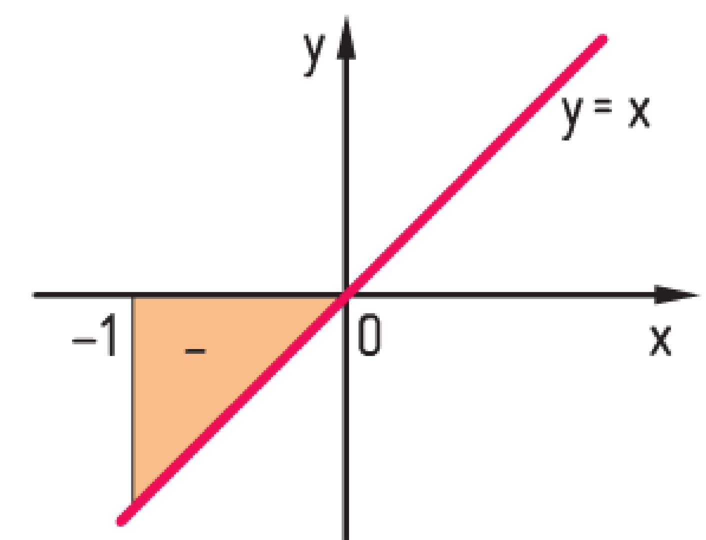
Für die Berechnung von bestimmten Integralen gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Bei der Interpretation des bestimmten Integrals als Flächeninhalt wurden bisher nur Funktionen mit $f(x) \geqslant 0$ behandelt. Im Folgenden wird dies verallgemeinert und anschließend genauer untersucht.

BCD **5.52** Berechne $\int_0^3 x\,dx$, $\int_{-3}^0 x\,dx$ und $\int_{-3}^3 x\,dx$. Vergleiche die Ergebnisse und veranschauliche die bestimmten Integrale grafisch. Was fällt dir auf?

Orientierter Flächeninhalt

In Abschnitt 5.1.3 wurde das bestimmte Integral als Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f(x) und der x-Achse im Intervall [a; b] interpretiert. Berechnet man zum Beispiel das bestimmte Integral $\int_{-1}^0 x\,dx$, so erhält man $\int_{-1}^0 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 = \frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = -\frac{1}{2}$.

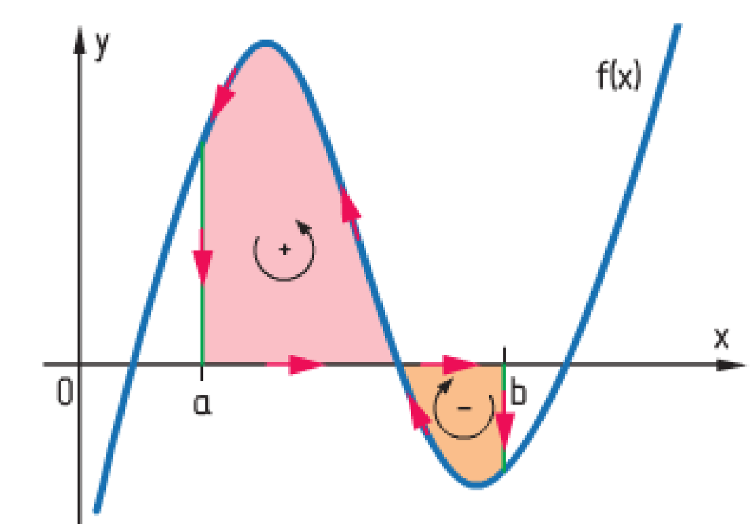
Dieser Wert ist negativ.



Liegt der Graph von f(x) unterhalb der x-Achse, so sind die Funktionswerte negativ, also auch die Produkte $f(x) \cdot \Delta x$. Da das bestimmte Integral als Summe definiert ist, ist diese ebenfalls negativ. Der Wert des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ $(a < b)$ ist positiv, wenn $f(x) > 0$ ist, also der Graph oberhalb der x-Achse liegt. Er ist negativ, wenn $f(x) < 0$ ist.

Dies entspricht dem **orientierten Flächeninhalt** einer Fläche. Dieser hängt vom Umlaufsinn ab. Er ist positiv, wenn der Rand einer Fläche gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) durchlaufen wird, sonst negativ. Beim bestimmten Integral wird bei der unteren Grenze a begonnen und in Richtung der oberen Grenze b fortgesetzt.

Liegt der Funktionsgraph teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse, so ergibt sich das bestimmte Integral aus der Summe der positiven und negativen Teilwerte. Es kann daher sein, dass das Ergebnis auch negativ oder null ist. Das bestimmte Integral kann dann nicht als Flächeninhalt zwischen der Kurve und der x-Achse interpretiert werden. Der Flächeninhalt ergibt sich aus den Beträgen der Teilintegrale (siehe Abschnitt 6.1).

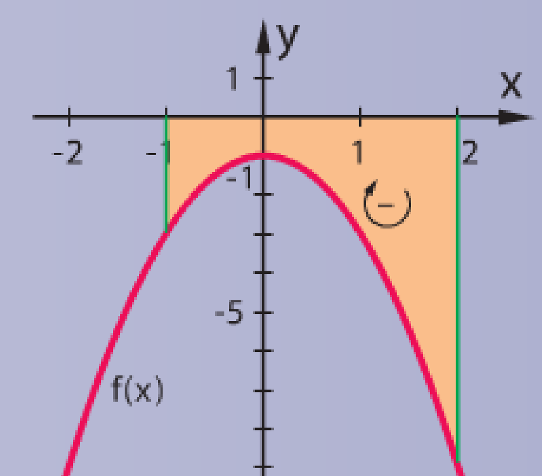


BC **5.53** Berechne das bestimmte Integral $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 1)\,dx$ und interpretiere das Ergebnis.

Lösung:

$$\int_{-1}^2 (-2x^2 - 1)\,dx = \left(-2 \cdot \frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_{-1}^2 = \left(-2 \cdot \frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(-2 \cdot \frac{(-1)^3}{3} - (-1)\right) =$$
$$= -\frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3} - 1 = -9$$

Die Funktion liegt komplett unterhalb der x-Achse. Der Wert des bestimmten Integrals ist negativ.



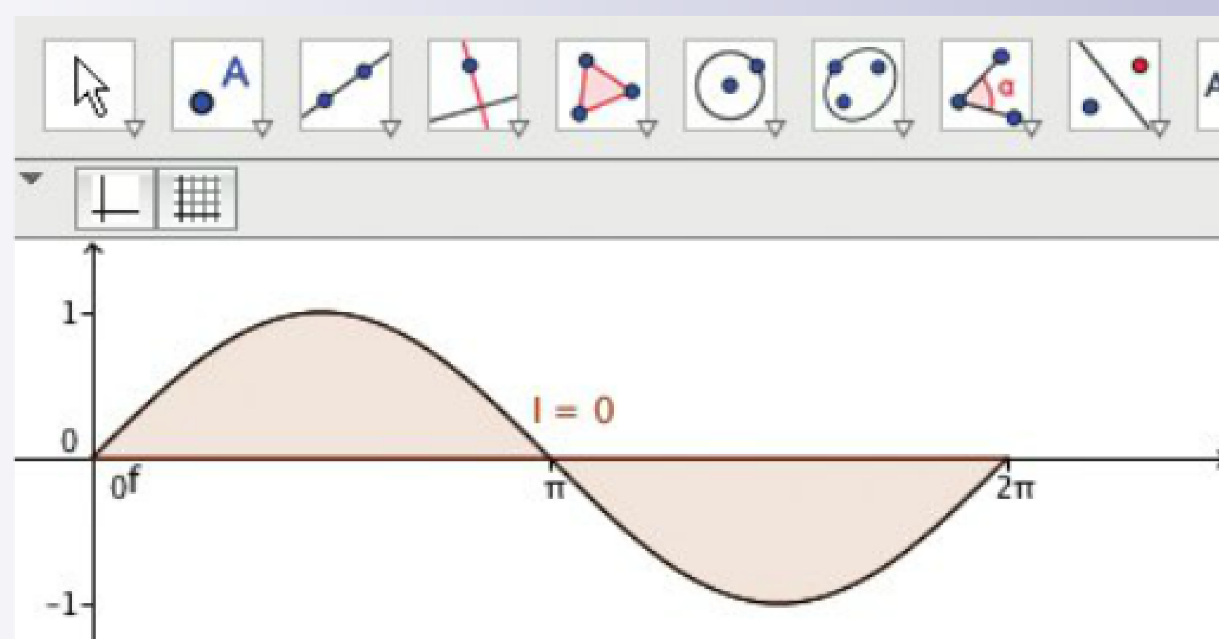
BC

TE

5.54 ***1)*** Berechne das bestimmte Integral $I = \int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$ und veranschauliche das Ergebnis mit GeoGebra.
2) Berechne den Inhalt der Fläche, die der Funktionsgraph mit der x-Achse einschließt. Überprüfe das Ergebnis mit GeoGebra und stelle den Unterschied zu ***1)*** grafisch dar.

Lösung:

1) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} =$
$= -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$



- Der Integrand wird als Funktion in einem vorgegebenen Intervall definiert:

Eingabe: **Funktion[sin(x),0,2π]**

- Mithilfe des Befehls **Integral** wird die Fläche zwischen dem Integranden und der x-Achse markiert und das Ergebnis der Berechnung angezeigt.

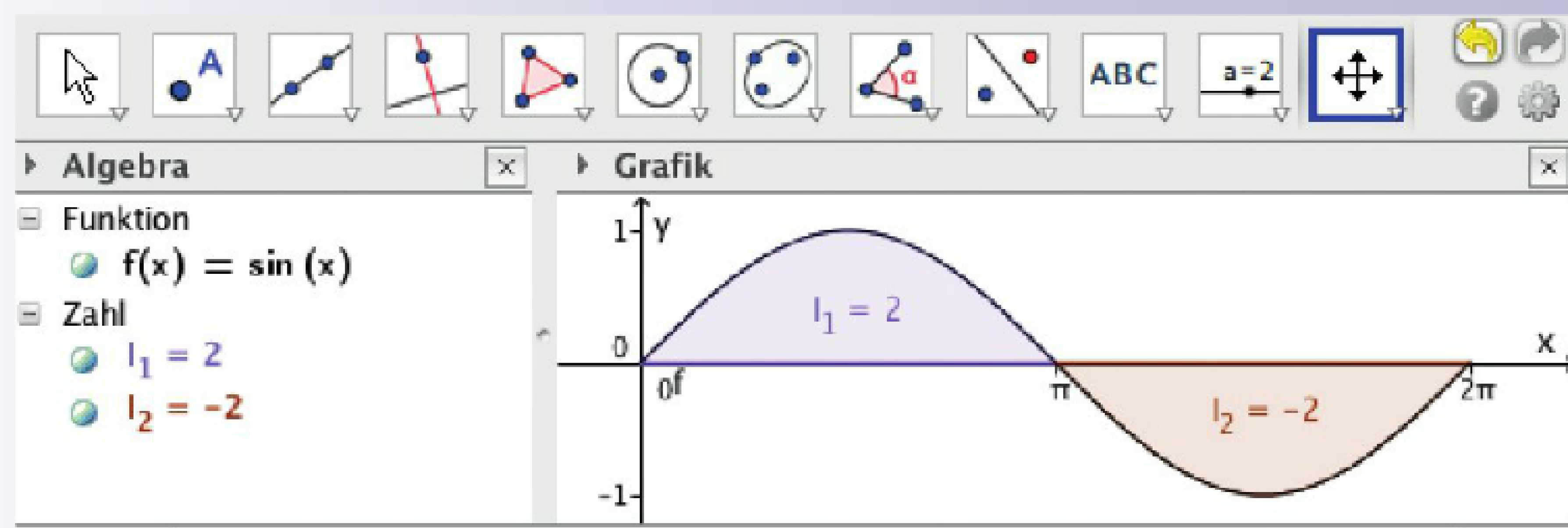
Eingabe: **Integral[sin(x),0,2π]**

Die Funktion liegt zu gleichen Teilen ober- und unterhalb der x-Achse. Das bestimmte Integral ist daher 0.

2) $I_1 = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$

$I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -1 - 1 = -2$

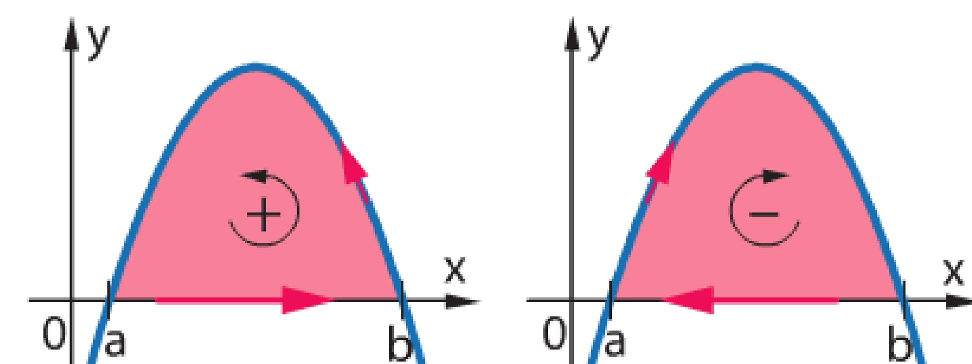
$A = I_1 + |I_2| = 4\,E^2$



Die Fläche ergibt sich aus den Beträgen der Teilintegrale und beträgt 4 E^2.

Vertauschen der Grenzen

Werden die Integrationsgrenzen vertauscht, so ändert sich der Umlaufsinn und daher das Vorzeichen des Integrals.



$$\left.\begin{aligned} \int_b^a f(x)\,dx &= F(b) - F(a) \\ \int_b^a f(x)\,dx &= F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Stückweise Integration

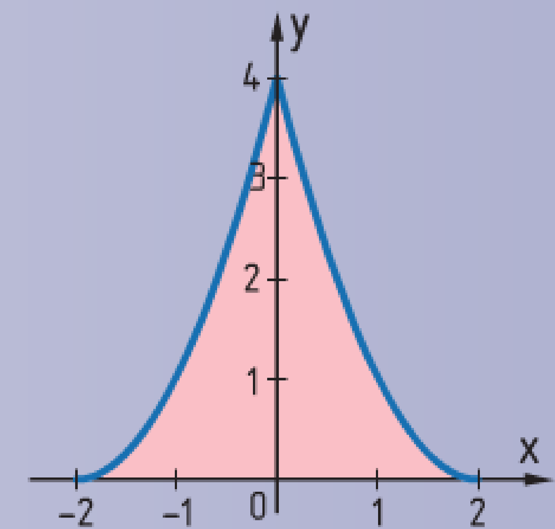
Für jedes c aus dem Intervall [a; b] gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (siehe Aufgabe 5.70)

Das bestimmte Integral hätte zum Beispiel in Aufgabe 5.54 auch mithilfe von Teilintegralen berechnet werden können:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx = 2 + (-2) = 0$$

Ist eine Funktion aus stückweise stetigen Funktionen zusammengesetzt, so muss eine Unterteilung des Integrationsintervalls erfolgen. Entstehen dadurch offene Integrationsintervalle, so können diese wie geschlossene Intervalle behandelt werden.

B **5.55** Die obere Begrenzungslinie der dargestellten Fläche setzt sich aus zwei Parabelbögen zusammen. Berechne das bestimmte Integral.



Lösung:

Funktionsgleichung

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{für } -2 \leqslant x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+2)^2\,dx + \int_{0}^{2} (x-2)^2\,dx = \int_{-2}^{0} (x^2 + 4x + 4)\,dx + \int_{0}^{2} (x^2 - 4x + 4)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big|_{0}^{2} = 0 - \left(\frac{-8}{3} + 8 - 8\right) + \frac{8}{3} - 8 + 8 - 0 = \frac{16}{3}$$

CD **5.56** Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründe deine Antwort.

1) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 0$

2) $\int_{2}^{0} x\,dx = -\int_{0}^{2} x\,dx$

3) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

4) $\int_{1}^{8} f(x)\,dx = \int_{1}^{4} f(x)\,dx + \int_{8}^{4} f(x)\,dx$

CD **5.57** Gib an, welche der folgenden Behauptungen auf die in der Abbildung dargestellte Funktion f zutreffen und welche nicht. Begründe deine Antworten.

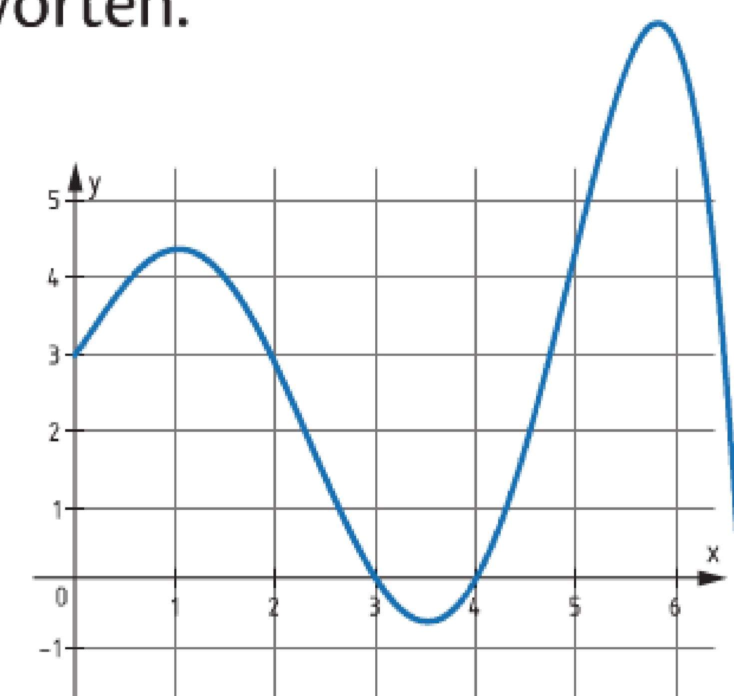
A) $\int_{0}^{6} f(x)\,dx > 0$

B) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx > 7$

C) $\int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{3} f(x)\,dx - \int_{3}^{4} f(x)\,dx$

D) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx > \int_{0}^{4} f(x)\,dx$

E) $\int_{4}^{3} f(x)\,dx < 0$



BC **5.58** Ermittle das bestimmte Integral mithilfe einer Skizze, ohne es zu berechnen.

a) $\int_{-3}^{3} x\,dx$ **b)** $\int_{-4}^{4} x^3\,dx$ **c)** $\int_{0}^{\pi} \cos(x)\,dx$ **d)** $\int_{3}^{3} 2^x\,dx$

BC **5.59** Berechne das bestimmte Integral und interpretiere es geometrisch.

a) $\int_{0}^{2} (-x+1)\,dx$ **b)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)\,dt$ **c)** $\int_{2}^{0} (x^2 - 4)\,dx$ **d)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t)\,dt$

Aufgaben 5.60 – 5.66: Berechne die bestimmten Integrale.

5.60 **a)** $\int_{-3}^{0} x^3\,dx$ **b)** $\int_{-4}^{2} x\,dx$ **c)** $\int_{2}^{4} \frac{dt}{t^2}$ **d)** $\int_{-2}^{-1} x^{-5}\,dx$ **e)** $\int_{1}^{3} \frac{1}{u}\,du$ B

5.61 **a)** $\int_{0}^{2} \sqrt{x}\,dx$ **b)** $\int_{1}^{4} x\sqrt{x}\,dx$ **c)** $\int_{1}^{8} \sqrt[8]{t^2}\,dt$ **d)** $\int_{0}^{1} \sqrt[4]{x}\,dx$ B

5.62 **a)** $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$ **b)** $\int_{1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ **c)** $\int_{1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ **d)** $\int_{1}^{2} \frac{du}{\sqrt[5]{u^3}}$ B

5.63 **a)** $\int_{0}^{2} e^x\,dx$ **b)** $\int_{-2}^{2} e^t\,dt$ **c)** $\int_{-3}^{0} \left(\frac{e^x}{2} + 2\right)dx$ **d)** $\int_{-1}^{0} (1 - 3e^x)\,dx$ B

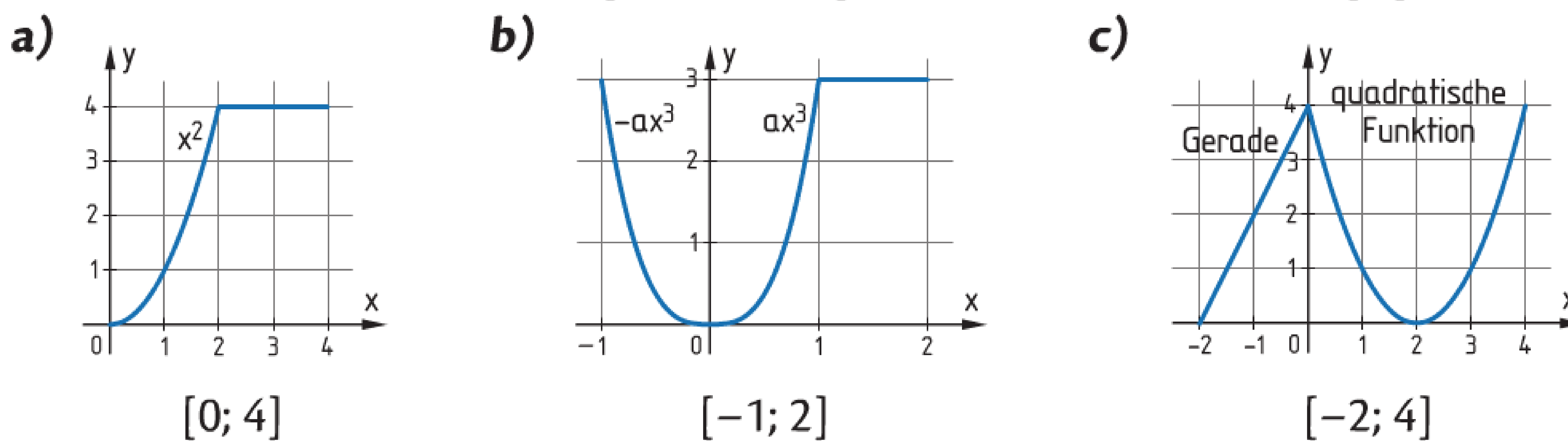
5.64 **a)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt$ **b)** $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\,dt$ **c)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$ **d)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$ B

5.65 **a)** $\int_{1}^{3} (4x^3 - x + 2)\,dx$ **b)** $\int_{1}^{4} \left(\frac{x^2}{2} + 4 \cdot \sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx$ **c)** $\int_{1}^{8} \left(\frac{2}{\sqrt{t}} + 3 \cdot \sqrt[3]{t} - 1\right)dt$ B

5.66 **a)** $\int_{0}^{\pi} (1 + \cos(t))\,dt$ **b)** $\int_{0}^{\pi} (\sin(t) - 1)\,dt$ **c)** $\int_{-\pi}^{\pi} (2 \cdot \sin(t) + t)\,dt$ B

5.67 Berechne das bestimmte Integral der dargestellten Funktion im angegebenen Intervall. ABC

a) **b)** **c)**



[0; 4] [−1; 2] [−2; 4]

5.68 Berechne die fehlende Grenze des bestimmten Integrals $\int_{a}^{5} (x - 1)\,dx = 7{,}5$. BC

Dokumentiere deine Vorgehensweise und veranschauliche das Ergebnis.

Lösung:

$\int_{a}^{5} (x - 1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_a^5 =$

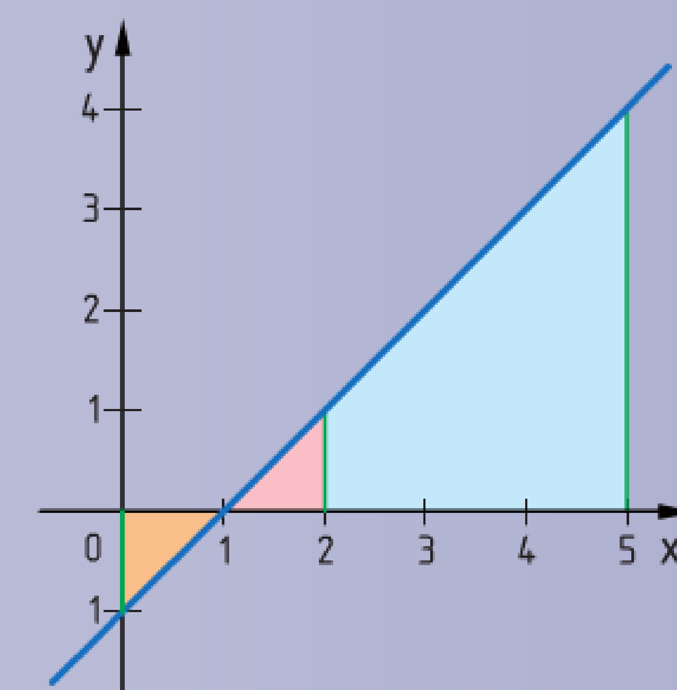
$= \frac{25}{2} - 5 - \left(\frac{a^2}{2} - a\right)$

$7{,}5 - \frac{a^2}{2} + a = 7{,}5$

$-a^2 + 2a = 0$

$a_1 = 0$ oder $a_2 = 2$

Das bestimmte Integral wird wie üblich berechnet. Für die untere Grenze wird die Unbekannte a eingesetzt.
Man erhält eine quadratische Gleichung. Beide Lösungen sind möglich.



5.69 Berechne die fehlende Grenze des bestimmten Integrals. B

a) $\int_{1}^{b} 3x^2\,dx = 7$ **b)** $\int_{a}^{2} (2x + 3)\,dx = 6$ **c)** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}$

5.70 Zeige für $c \in [a; b]$: $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$ BD

Erkläre mithilfe einer Skizze, warum die Behauptung auch für $c \notin [a; b]$ richtig ist.

5.3 Integrationsmethoden

Viele Funktionen sind nicht mithilfe der behandelten Regeln integrierbar, wie zum Beispiel zusammengesetzte Funktionen wie $y = \sin(2x)$ oder Produkte von Funktionen wie $y = x \cdot e^x$. Im Folgenden werden einige Methoden vorgestellt, um auch für solche Funktionen das unbestimmte Integral explizit angeben zu können. Es gibt jedoch – im Gegensatz zum Differenzieren – keine eindeutigen Regeln, welche Methode die „richtige“, also zielführende, für eine bestimmte Funktion ist. Außerdem gibt es Funktionen, für die die Stammfunktion nicht als geschlossene Formel angebbar ist und Funktionen, für die diese nicht existiert.

5.3.1 Integration durch Substitution

BC **5.71** Differenziere die folgenden Funktionen und gib an, welche Regel du dabei anwendest.

1) $f(x) = (3x + 5)^2$ ***2)*** $y(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ ***3)*** $f(t) = e^{-a \cdot t}$

Um verkettete Funktionen zu differenzieren, wird die Kettenregel verwendet. Dabei wird formal zuerst die „innere“ Funktion durch eine Variable ersetzt und dann kann die „äußere“ Funktion abgeleitet werden. Anschließend wird mit der „inneren“ Ableitung multipliziert.

$$y(x) = \mathbf{f(u(x))} \Rightarrow y'(x) = \mathbf{f'(u(x))} \cdot \mathbf{u'(x)}$$

oder kurz $y' = \mathbf{f'(u)} \cdot \mathbf{u'}$

bzw. $\frac{dy}{dx} = \frac{\mathbf{df}}{\mathbf{du}} \cdot \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}$

- Im Zusammenhang mit der Integration durch Substitution wird die **innere Funktion** meist mit dem Buchstaben **u** bezeichnet.

Integrale von verketteten Funktionen können oft ebenfalls durch **Substituieren** (Ersetzen) auf Grundintegrale umgeformt werden. Es werden nun einige Arten von Integralen angegeben, bei denen eine Integration durch Substitution möglich ist.

Lineare Substitution

Aufgrund der Kettenregel ist bekannt, wie man eine Funktion eines linearen Terms, also $f(a \cdot x + b)$, differenziert: $(f(a \cdot x + b))' = f'(a \cdot x + b) \cdot a$

ZB: $y(t) = \sin(3t + \pi)$

$y'(t) = \cos(3t + \pi) \cdot 3$

- Die Sinusfunktion bezieht sich nicht auf die Variable t sondern auf einen linearen Ausdruck der Form $(a \cdot t + b)$. Beim Differenzieren wird die Kettenregel angewendet, die innere Funktion ist dabei $u(t) = 3t + \pi$.

$\int \cos(3t + \pi) \cdot 3\, dt =$

- Soll diese Funktion nun integriert werden, so substituiert man die innere Funktion $(3t + \pi)$ durch u.

$u = 3t + \pi$

$\frac{du}{dt} = 3 \Rightarrow dt = \frac{du}{3}$

- Die neue Integrationsvariable ist u. Nun wird $u = u(t)$ nach t abgeleitet, damit man auch dt durch du ausdrücken kann.

$= \int \cos(u) \cdot \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} du =$

$= \int \cos(u)\, du =$

- Durch Einsetzen erhält man ein Integral in der neuen Variablen u, das mithilfe von Grundintegralen berechnet werden kann.

$= \sin(u) + C = \sin(3t + \pi) + C$

- Anschließend wird rücksubstituiert, also u wieder durch $(3t + \pi)$ ersetzt.

B

5.72 Ermittle das unbestimmte Integral.

a) $\int \cos(5t + 1)\,dt$ **b)** $\int \frac{3}{x-2}\,dx$

Lösung:

a) $u = 5t + 1 \quad \frac{du}{dt} = 5 \Rightarrow dt = \frac{du}{5}$ • Substitution

$\int \cos(5t+1)\,dt = \int \cos(u)\,\frac{du}{5} = \frac{1}{5} \cdot \int \cos(u)\,du =$ • Integration

$= \frac{1}{5} \cdot \sin(u) + C = \frac{1}{5} \cdot \sin(5t+1) + C$ • Rücksubstitution

$\int \cos(5t+1)\,dt = \frac{\sin(5t+1)}{5} + C$

b) $\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x-2}\,dx$ • Faktor herausheben

$u = x - 2 \quad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$ • Substitution

$3 \cdot \int \frac{1}{x-2}\,dx = 3 \cdot \int \frac{1}{u}\,du = 3 \cdot \ln(|u|) + C$ • Integration

$\int \frac{3}{x-2}\,dx = 3 \cdot \ln(|x-2|) + C$ • Rücksubstitution

Allgemein gilt für Integranden der Form $f(a \cdot x + b)$:

$$\int f(a \cdot x + b)\,dx = \int f(u) \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \cdot \int f(u)\,du = \frac{F(u)}{a} + C = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + C$$

$$u = a \cdot x + b \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$$

Lineare Substitution:

$$\int f(a \cdot x + b)\,dx = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + C$$

Beim Ermitteln der Stammfunktion von $f(a \cdot x + b)$ wird durch den Koeffizienten a dividiert.

Integrale der Form „verkettete Funktion · innere Ableitung“

Die Integration durch Substituieren kann immer dann angewendet werden, wenn durch Substitution alle Terme, die die ursprüngliche Integrationsvariable (x) enthalten, ersetzt bzw. gekürzt werden können. Man erhält ein Integral, in dem ausschließlich die neue Variable (u) vorkommt. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn der Integrand – bis auf konstante Faktoren – ein Produkt der Form **„verkettete Funktion · innere Ableitung“** ist.

ZB: Die Funktion $f(x) = 8x \cdot (x^2 + 4)^3$ soll integriert werden.

$$\int 8x \cdot (x^2+4)^3\,dx = \int 8x \cdot u^3\,dx =$$

$$u = x^2 + 4$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \int \overset{4}{\cancel{8x}} \cdot u^3 \cdot \frac{du}{\cancel{2x}} =$$

$$= 4 \cdot \int u^3\,du =$$

$$= 4 \cdot \frac{u^4}{4} + C = u^4 + C$$

$$= (x^2 + 4)^4 + C$$

- Man substituiert $(x^2 + 4)$ durch $u = u(x)$.
- Die neue Integrationsvariable ist nun u. Daher muss dx durch du ausgedrückt werden.
- Der erhaltene Ausdruck wird anstelle von dx in das Integral eingesetzt.
- Im so entstandenen Integral können alle Terme, die x enthalten, gekürzt werden. Man erhält ein Integral in der Variablen u.
- Das Integral kann mithilfe von Grundintegralen gelöst werden.
- Anschließend wird wieder rücksubstituiert.

Grundlagen der Integralrechnung

Allgemein gilt:
Hat die Integrandfunktion die Form „verkettete Funktion · innere Ableitung“, so wird die innere Funktion durch $u = u(x)$ substituiert. Durch Bilden der Ableitung ergibt sich:
$\frac{du}{dx} = u'(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{u'(x)}$. Im Integranden werden $u(x)$ durch u und dx durch $\frac{du}{u'(x)}$ ersetzt:
$\int f[u(x)] \cdot u'(x)\,dx = \int f(u) \cdot \cancel{u'(x)} \frac{du}{\cancel{u'(x)}} = \int f(u)\,du$. Man erhält ein Integral in der Variablen u.

Bei der **Integration mittels Substitution** wird ein Term im Integranden so ersetzt, dass ein einfaches Integral entsteht: $\int f[u(x)] \cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

BC **5.73** Ermittle das unbestimmte Integral $\int x^2 \cdot \sqrt{2x^3+5}\,dx$ und beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:

$\int x^2 \cdot \sqrt{2x^3+5}\,dx$

$u = 2x^3 + 5 \qquad \frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$

$\int x^2 \cdot \sqrt{u}\,\frac{du}{6x^2} = \frac{1}{6} \cdot \int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{6} \cdot \int u^{\frac{1}{2}}\,du =$

$\sqrt{2x^3+5}$ ist die verkettete Funktion, die innere Ableitung ergibt $6x^2$. x^2 entspricht – bis auf den Faktor 6 – der Ableitung der inneren Funktion. Daher wird substituiert.

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{18} \cdot \sqrt{u^3} + C =$ Integration

$= \frac{1}{9} \cdot (2x^3 + 5) \cdot \sqrt{2x^3+5} + C$ Rücksubstitution

- Für die Integration mittels Substitution sind auch andere Schreibweisen üblich. Geht man davon aus, dass die Substitution dann möglich ist, wenn das entstandene Integral die Form $\int f(u)\,du$ hat, so muss im ursprünglichen Integranden $du = u'(x)\,dx$ gelten. Es kann daher auch das Produkt $u'(x) \cdot dx$ direkt eingesetzt werden.

  ZB: $\int \underbrace{(x^3 + 4)^5}_{u^5} \cdot \underbrace{3x^2\,dx}_{du}$ mit $u = x^3 + 4$ und $du = 3x^2 \cdot dx$

- Unterscheidet sich die innere Ableitung $u'(x)$ um einen konstanten Faktor von der gegebenen Funktion, so kann auch ein **korrigierender Faktor** verwendet werden.

  ZB: $\int x^2 \cdot \underbrace{\sqrt{2x^3+5}}_{\sqrt{u}}\,dx$, $u'(x) = 6x^2$. Da $\frac{1}{6} \cdot 6x^2 = x^2$ fügt man $\frac{1}{6}$ ein: $\frac{1}{6}\int 6x^2 \cdot \sqrt{2x^3+5}\,dx$

Beachte, dass das Anwenden verschiedener Integrationsmethoden auf das gleiche Integral zu unbestimmten Integralen führen kann, die sich in den additiven Konstanten unterscheiden. Bei der Ermittlung einer speziellen Stammfunktion erhält man immer dieselbe Lösung.

ZB: $\int 2x \cdot (x^2 + 1)\,dx$, die Stammfunktion verläuft durch $P(1|0)$

Ausmultiplizieren:

$F_1(x) = \int (2x^3 + 2x)\,dx = \frac{x^4}{2} + x^2 + C_1$

$F_1(1) = \frac{1}{2} + 1 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2}$

$F_P(x) = \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{3}{2}$

Substitution: $u = x^2 + 1$

$F_2(x) = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C_2 = \frac{(x^2+1)^2}{2} + C_2 = \frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{1}{2} + C_2$

$F_2(1) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -2$

$F_P(x) = \frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{3}{2}$

Wird ein bestimmtes Integral mittels Substitution berechnet, so kann man entweder unbestimmt integrieren und die Grenzen nach der Rücksubstitution einsetzen oder die Integrationsgrenzen ebenfalls substituieren und direkt einsetzen.

ZB: $\int_0^3 2x \cdot (x^2 + 1)\,dx$, $u = x^2 + 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

- **Grenzen beibehalten:**

$\int 2x \cdot (x^2 + 1)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C$

$\int_0^3 2x \cdot (x^2 + 1)\,dx = \frac{(x^2 + 1)^2}{2}\Big|_0^3 =$

$= \frac{(3^2 + 1)^2}{2} - \frac{(0^2 + 1)^2}{2} = \frac{99}{2} = 49{,}5$

- Das Integral wird unbestimmt gelöst. Die Integrationsgrenzen werden erst nach der Rücksubstitution wieder berücksichtigt.

- **Grenzen mitsubstituieren:**

neue Integrationsgrenzen mit $u = x^2 + 1$

$x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0^2 + 1 = 1$

$x_2 = 3 \Rightarrow u_2 = 3^2 + 1 = 10$

$\int_1^{10} u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_1^{10} = \frac{10^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{99}{2} = 49{,}5$

- Die Integrationsgrenzen werden auf die neue Variable u „umgerechnet“. Die Rücksubstitution erübrigt sich in diesem Fall.

Integranden der Form $\frac{\text{„Ableitung der Funktion im Nenner“}}{\text{Funktion}}$

Ein Spezialfall der Form „verkettete Funktion · innere Ableitung“ ist das Integral der Form $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$, also ein Bruch, dessen Zähler die Ableitung des Nenners ist. Wird $y = \ln(u(x))$ nach der Kettenregel differenziert, so erhält man $\frac{d}{dx}\ln(u(x)) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Daher ergibt sich für diese Form des Integrals: $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln(|u(x)|) + C$

Für Integranden der Form $\frac{\text{„Ableitung“}}{\text{Funktion}}$ gilt:

$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln(|u(x)|) + C$

5.74 Ermittle das unbestimmte Integral. B

a) $\int \frac{e^t}{1 + e^t}\,dt$ **b)** $\int \tan(x)\,dx$

Lösung:

a) $\int \frac{e^t}{1 + e^t}\,dt =$

$u = 1 + e^t \quad \frac{du}{dt} = e^t \Rightarrow du = e^t\,dt$

$= \ln(1 + e^t) + C$

- Der Term im Zähler des Bruchs ist die Ableitung der Funktion im Nenner des Bruchs.

b) $\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

$u = \cos(x) \qquad u' = \frac{du}{dx} = -\sin(x)$

$-\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- Da sich die Ableitung um den Faktor (−1) unterscheidet, verwendet man einen korrigierenden Faktor (−1) und erhält einen Integranden der Form $\frac{u'}{u}$.

Grundlagen der Integralrechnung

C **5.75** Kreuze an, welche der angegebenen Integrale von der Form $\int f(a \cdot x + b)\,dx$ sind.

☐ $\int (x^2 + 7)^2\,dx$ ☐ $\int a^2 \cdot x\,dx$ ☐ $\int \ln\left(\frac{7}{3} + x\right)dx$

☐ $\int \left(\frac{x}{3} + 7\right)^3 dx$ ☐ $\int \sqrt{\frac{x}{3} + 7}\,dx$ ☐ $\int \left(\sqrt{\frac{x}{3}} + 7\right)dx$

CD **5.76** Ordne jedem der Integrale eine der drei Aussagen zu und begründe deine Antworten.

A) Der Integrand ist von der Form „verkettete Funktion · innere Ableitung“.

B) Der Integrand unterscheidet sich von der Form „verkettete Funktion · innere Ableitung“ nur um einen konstanten Faktor.

C) Weder ***A)*** noch ***B)*** trifft zu.

☐ $\int x \cdot (x^2 + 1)^{20}\,dx$ ☐ $\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{2t}\,dt$ ☐ $\int \frac{\sqrt{a \cdot x + 1}}{\sqrt{x}}\,dx$

☐ $\int 2x \cdot \sqrt{x^2 + 1}\,dx$ ☐ $\int (1 + \sin(t))^2 \cdot \cos(t)\,dt$ ☐ $\int \sqrt{x^3 + 1} \cdot 3x\,dx$

☐ $\int 2t \cdot e^{t^2 + 1}\,dt$ ☐ $\int \sqrt[3]{5 - x^2} \cdot (-2x^2)\,dx$ ☐ $\int \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{3t^2}\,dt$

C **5.77** Ordne jedem Integral die geeignete Substitution zu.

1) $\int \frac{t}{1 + t^2}\,dt$ ***3)*** $\int t \cdot (1 + e^{t^2})\,dt$ ***5)*** $\int \frac{t}{2} \cdot e^{t^2 + 1}\,dt$

2) $\int \sqrt{2 + 2t}\,dt$ ***4)*** $\int \frac{1}{1 + t}\,dt$ ***6)*** $\int \frac{2t}{\sqrt{t^2 + 1}}\,dt$

A) $u = t^2$ ***B)*** $u = 1 + t^2$ ***C)*** $u = 1 + t$

Aufgaben 5.78 – 5.86: Ermittle die unbestimmten Integrale.

B **5.78** **a)** $\int (3x - 2)^3\,dx$ **b)** $\int (2u + 1)^2\,du$ **c)** $\int (6x - b)^4\,dx$ **d)** $\int (4t - 5)^{\frac{3}{2}}\,dt$

B **5.79** **a)** $\int \frac{3}{(2 - 5t)^2}\,dt$ **b)** $\int \frac{1}{4 \cdot (5x - 2)^3}\,dx$ **c)** $\int \frac{5}{2 \cdot (x + 1)^4}\,dx$ **d)** $\int \frac{4}{(7s + 3)^5}\,ds$

B **5.80** **a)** $\int \frac{a}{\sqrt{x + 2}}\,dx$ **b)** $\int \sqrt[3]{4s - 3}\,ds$ **c)** $\int \frac{2}{\sqrt[2]{2x - 5}}\,dx$ **d)** $\int \frac{\sqrt{3t + 4}}{2}\,dt$

B **5.81** **a)** $\int \frac{1}{x - 3}\,dx$ **b)** $\int \frac{4}{2x + 1}\,dx$ **c)** $\int \frac{3}{3t + s}\,dt$ **d)** $\int \frac{3}{3t + s}\,ds$

B **5.82** **a)** $\int e^{x + 1}\,dx$ **b)** $\int e^{-3t}\,dt$ **c)** $\int e^{2s - t}\,ds$ **d)** $\int e^{2s - t}\,dt$

B **5.83** **a)** $\int 2^{t - 2}\,dt$ **b)** $\int 3 \cdot 10^{-x}\,dx$ **c)** $\int \frac{5^{2x - 1}}{3}\,dx$ **d)** $\int a^{2t + 3}\,dt$

B **5.84** **a)** $\int \sin(5t)\,dt$ **b)** $\int 2 \cdot \cos(t + 1)\,dt$ **c)** $\int \cos(3x + 2)\,dx$ **d)** $\int A \cdot \sin(\omega t + \varphi)\,dt$

B **5.85** **a)** $\int x \cdot (x^2 - 3)^3\,dx$ **b)** $\int 3r \cdot \sqrt{4 - r^2}\,dr$ **c)** $\int x^2 \cdot (4x^3 + 5)^4\,dx$ **d)** $\int \frac{x - 2}{(x^2 - 4x + 5)^3}\,dx$

B **5.86** **a)** $\int \frac{2x}{1 - x^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x + 2}{x^2 + 4x - 3}\,dx$ **c)** $\int \frac{3s^2 + 1}{s^3 + s - 1}\,ds$ **d)** $\int \frac{t^2}{2t^3 + 1}\,dt$

Aufgaben 5.87 – 5.88: Ermittle die unbestimmten Integrale.

B **5.87** **a)** $\int x \cdot e^{x^2}\,dx$ **b)** $\int \sin(t) \cdot \cos(t)\,dt$ **c)** $\int x^2 \cdot e^{x^3 + 1}\,dx$ **d)** $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$

B **5.88** **a)** $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)}\,dx$ **c)** $\int \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}\,dx$ **d)** $\int \frac{e^x}{2 - e^x}\,dx$

Aufgaben 5.89 – 5.90: Ermittle die unbestimmten Integrale.

5.89 **a)** $\int \frac{1}{\cos^2(3x)}\,dx$ **b)** $\int \frac{3}{\cos^2(x-1)}\,dx$ **c)** $\int \frac{2}{5\cdot\cos^2(2x+1)}\,dx$ **d)** $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$ B

5.90 **a)** $\int \sinh(x+4)\,dx$ **b)** $\int \cosh(5t)\,dt$ **c)** $\int \sinh(3x-2)\,dx$ **d)** $\int \frac{1}{\cosh^2(4x)}\,dx$ B

5.91 Bei diesen Hausübungen sind Fehler passiert. Korrigiere sie, wenn möglich bzw. gib an, wenn das Integral mit keiner der bisher vorgestellten Methoden lösbar ist. BC

1)

$\int e^{\frac{1}{t}}\,dt = \int e^{u}\,du = e^{u} + C = e^{\frac{1}{t}} + C$

$u = \frac{1}{t}$

$\frac{du}{dt} = 1 \Rightarrow dt = du$

2)

$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{u+4}\cdot\frac{du}{2x} = \int \frac{du}{u+4}$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

nicht mittels Substitution integrierbar, da kein Grundintegral entstanden

3)

$\int \sin(\omega t + \varphi)\,dt = \int \sin(u)\cdot\omega\cdot du = \omega\cdot\cos(u) + C = \omega\cdot\cos(\omega t + \varphi) + C$

$u = \omega\cdot t + \varphi$

$\frac{du}{dt} = \omega \Rightarrow dt = \omega\cdot du$

Aufgaben 5.92 – 5.93: Ermittle die bestimmten Integrale.

5.92 **a)** $\int_1^2 (2x+1)^3\,dx$ **b)** $\int_{-1}^3 t\cdot(t^2-1)^3\,dt$ **c)** $\int_3^{31} \sqrt[3]{2x+2}\,dx$ **d)** $\int_1^5 \frac{2}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ B

5.93 **a)** $\int_0^8 e^{\frac{t}{4}}\,dt$ **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cdot e^{\cos(t)}\,dt$ **d)** $\int_0^{2\pi} \cos(\frac{t}{4})\,dt$ B

5.94 Manche Integrale lassen sich durch Substituieren eines Terms anstelle der Variablen vereinfachen. BCD

1) Erkläre, wie das angegebene Integral gelöst wurde.

2) Verwende diese Methode, um $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ zu berechnen.

3) Überprüfe das Ergebnis deiner Rechnung, indem du $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ grafisch interpretierst.

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = ?$

Substitution: $x = a\cdot\sin(t)$

$\frac{dx}{dt} = a\cdot\cos(t),\ dx = a\cdot\cos(t)\,dt$

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\cdot\sin^2(t)} = \sqrt{a^2(1-\sin^2(t))} = \sqrt{a^2\cdot\cos^2(t)} = a\cdot\cos(t)$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\cdot\cos(t)\cdot a\cdot\cos(t)\,dt = a^2\cdot\int\cos^2(t)\,dt = \frac{a^2}{2}\cdot\int(1+\cos(2t))\,dt =$

$= \frac{a^2}{2}\cdot\left(t + \frac{\sin(2t)}{2} + C_1\right) = \frac{a^2}{2}\cdot t + \frac{a^2}{2}\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) + C =$

Da $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos(t)$ gilt:

$\cos(t) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + C$

5.3.2 Partielle Integration

Viele Integrale, deren Integrand ein Produkt von Funktionen ist, lassen sich mithilfe der **partiellen Integration** lösen. Dabei wird ein Integral so umgeformt, dass ein einfach zu lösendes Integral entsteht.

Wir gehen von der Ableitung des Produkts $u(x) \cdot v(x)$, kurz $u \cdot v$, mithilfe der Produktregel der Differentialrechnung aus:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

- Dabei wird jeweils nach x differenziert, also $\frac{d\,(u \cdot v)}{dx} = (u \cdot v)'$.

$$\int (u \cdot v)'\,dx = \int u' \cdot v\,dx + \int u \cdot v'\,dx$$
$$u \cdot v = \int u' \cdot v\,dx + \int u \cdot v'\,dx$$

- Die Gleichung wird nach x integriert und es gilt: $\int \frac{d\,(u \cdot v)}{dx}\,dx = \int (u \cdot v)'\,dx = u \cdot v$

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

- Umformen auf $\int u \cdot v'\,dx$.

Partielle Integration

$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$ Merkhilfe: $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

B **5.95** Ermittle das Integral $\int x \cdot \sin(x)\,dx$.

Lösung:

$u = x \quad \Rightarrow \quad u' = 1$
$v' = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad v = -\cos(x)$

- x wird als u(x) festgelegt, da $u'(x) = 1$ gilt. $v'(x)$ ist daher $\sin(x)$.

$$\int x \cdot \sin(x)\,dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{v}\,dx =$$

- Nach dem Ableiten bzw. Integrieren wird in die Formel eingesetzt und vereinfacht.

$$= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\,dx =$$
$$= -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$$

- Das entstandene Integral ist ein Grundintegral.

Bemerkungen:

- Der Name dieser Integrationsmethode erklärt sich daraus, dass nach der Integration noch ein Integral vorhanden ist, also nur teilweise (partiell) integriert wurde.
- In manchen Formelsammlungen findet man auch die Form: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
- Der Integrand wird als Produkt aus einer Funktion und einer Ableitung aufgefasst. Die Festlegung, welcher Faktor u(x) bzw. v′(x) ist, hängt von der konkreten Angabe ab. Dabei sollte das Integral $\int u' \cdot v\,dx$ „einfacher lösbar" sein als das ursprüngliche. Meist wird als u(x) jene Funktion gewählt, die beim Differenzieren einfacher wird, zum Beispiel Potenzfunktionen oder ln(x), und v′(x) sollte eine einfach zu integrierende Funktion sein, zum Beispiel sin(x), cos(x), e^x.
- Manche Integrale erfordern ein mehrmaliges Anwenden dieser Methode.

B

5.96 Ermittle das Integral. **a)** $\int x^2 \cdot e^x\,dx$ **b)** $\int \cos^2(x)\,dx$

Lösung:

a) $\int x^2 \cdot e^x\,dx$

$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$\int x^2 \cdot e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\,dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

- Das nach der ersten Integration verbleibende Integral ist noch kein Grundintegral. Daher wendet man die partielle Integration ein weiteres Mal an.

$$\int x^2 \cdot e^x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - \int e^x\,dx) =$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C =$$
$$= e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + C$$

b) $\int \cos^2(x)\,dx = \int \cos(x) \cdot \cos(x)\,dx$

$u = \cos(x) \Rightarrow u' = -\sin(x)$

$v' = \cos(x) \Rightarrow v = \sin(x)$

- Man schreibt $\cos^2(x)$ als Produkt an und integriert partiell.

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \cos(x) \cdot \cos(x)\,dx =$$
$$= \cos(x) \cdot \sin(x) - \int -\sin(x) \cdot \sin(x)\,dx =$$
$$= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int \sin^2(x)\,dx =$$
$$= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int (1 - \cos^2(x))\,dx =$$
$$= \cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \cos^2(x)\,dx$$

- Das erhaltene Integral ist kein Grundintegral und auch die nochmalige partielle Integration wäre nicht zielführend. Wir verwenden den Zusammenhang $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, um nochmals das Ausgangsintegral zu erhalten.

$$\int \cos^2(x)\,dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \cos^2(x)\,dx$$
$$2 \cdot \int \cos^2(x)\,dx = \cos(x) \cdot \sin(x) + x$$
$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{\cos(x) \cdot \sin(x) + x}{2} + C$$

- Die nun erhaltene Gleichung wird nach $\int \cos^2(x)\,dx$ umgeformt.

Bemerkung:
Das Integral $\int \cos^2(x)\,dx$ aus Aufgabe 5.96 kann auch mithilfe der Summensätze ermittelt werden:

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin(2x)}{2}\right) + C = \frac{x + \cos(x) \cdot \sin(x)}{2} + C$$

Mithilfe der partiellen Integration kann nun das **Integral der Funktion y = ln(x)** ermittelt werden.

$\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$

$u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \Rightarrow v = x$

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx = x \cdot \ln(x) - x + C = x \cdot (\ln(x) - 1) + C$$

Umbestimmtes Integral der Logarithmusfunktion y = ln(x)

$$\int \ln(x)\,dx = x \cdot (\ln(x) - 1) + C$$

C **5.97** Gib jeweils an, welcher der folgenden Lösungswege für die Berechnung des Integrals geeignet ist und beschreibe deine Überlegungen.
A) Grundintegral
B) Integration mittels linearer Substitution
C) Substitution, aber keine lineare Substitution
D) Partielle Integration

☐ $\int a \cdot \sin(t)\,dt$ ☐ $\int a \cdot t \cdot \sin(t^2)\,dt$ ☐ $\int e^{3x}\,dx$ ☐ $\int 3x \cdot e^x\,dx$
☐ $\int 3x \cdot e^{3x^2+1}\,dx$ ☐ $\int t \cdot \sin(t)\,dt$ ☐ $\int 3e^x\,dx$ ☐ $\int a \cdot \sin(\omega t + \varphi)\,dt$

Aufgaben 5.98 – 5.104: Ermittle die unbestimmten Integrale.

B **5.98** **a)** $\int t \cdot \cos(t)\,dt$ **b)** $\int x \cdot e^x\,dx$ **c)** $\int x \cdot \ln(x)\,dx$ **d)** $\int t \cdot 3^t\,dt$

B **5.99** **a)** $\int x^2 \cdot \sin(x)\,dx$ **b)** $\int t^2 \cdot \cos(t)\,dt$ **c)** $\int t^2 \cdot \ln(t)\,dt$ **d)** $\int x^2 \cdot \cosh(x)\,dx$

B **5.100** **a)** $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ **b)** $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ **c)** $\int x^3 \cdot \ln(x)\,dx$ **d)** $\int 2x \cdot \ln(x)\,dx$

B **5.101** **a)** $\int \sin(t) \cdot \cos(t)\,dt$ **b)** $\int \sin^2(x)\,dx$ **c)** $\int e^x \cdot \sin(x)\,dx$ **d)** $\int \frac{\sin(t)}{e^t}\,dt$

B **5.102** **a)** $\int t \cdot \sin(3t)\,dt$ **b)** $\int t \cdot e^{-t}\,dt$ **c)** $\int 2x \cdot \ln(3x)\,dx$ **d)** $\int x \cdot \cos(2x)\,dx$

B **5.103** **a)** $\int \sin^2(x) \cdot e^{2x}\,dx$ **b)** $\int (2t - 1) \cdot e^{-s \cdot t}\,dt$ **c)** $\int r \cdot \cos(\varphi) \cdot e^{k \cdot \varphi}\,d\varphi$ **d)** $\int x \cdot \sqrt{x + 1}\,dx$

B **5.104** **a)** $\int (x^2 + 1) \cdot \ln(x)\,dx$ **b)** $\int \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)\,dt$ **c)** $\int (2t - 1) \cdot \cos(t - 1)\,dt$

B **5.105** Multipliziere den Integranden mit 1, um die partielle Integration anwenden zu können.
a) $\int \arccos(x)\,dx$ **b)** $\int \operatorname{arsinh}(x)\,dx$ **c)** $\int \ln(x^2)\,dx$ **d)** $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$

B **5.106** Berechne das bestimmte Integral.

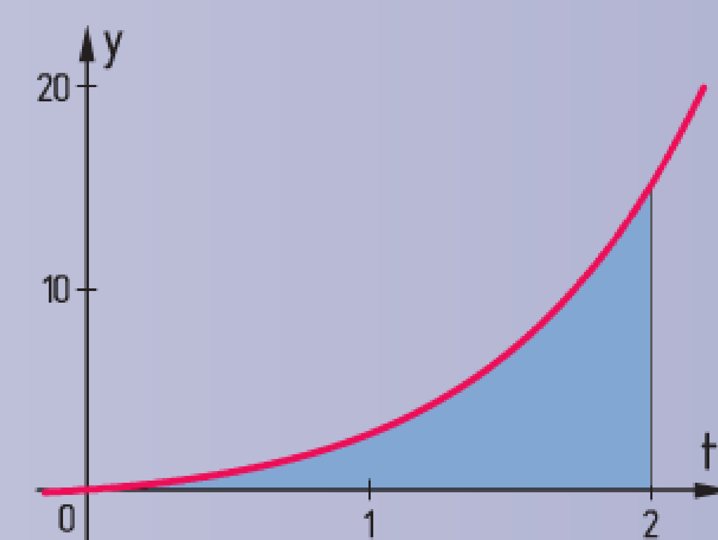
$$\int_0^2 t \cdot e^t\,dt$$

Lösung:

$$\int_0^2 t \cdot e^t\,dt$$

$u = t \quad \Rightarrow \quad u' = 1$
$v' = e^t \quad \Rightarrow \quad v = e^t$

$$\int_0^2 t \cdot e^t\,dt = t \cdot e^t\Big|_0^2 - \int_0^2 e^t\,dt = t \cdot e^t\Big|_0^2 - e^t\Big|_0^2 =$$
$$= 2 \cdot e^2 - 0 - (e^2 - e^0) =$$
$$= e^2 + 1 \approx 8{,}39$$



● Für die bestimmte Integration gilt:
$$\int_a^b u \cdot v'\,dx = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b u' \cdot v\,dx$$

Aufgaben 5.107 – 5.108: Ermittle die bestimmten Integrale.

B **5.107** **a)** $\int_0^1 x \cdot e^{2x}\,dx$ **b)** $\int_1^2 x \cdot \ln(x)\,dx$ **c)** $\int_0^1 t \cdot (1 + t)^5\,dt$ **d)** $\int_1^2 t^2 \cdot e^t\,dt$

B **5.108** **a)** $\int_0^{\pi} t \cdot \cos(t)\,dt$ **b)** $\int_0^{\pi} t \cdot \sin(2t + 1)\,dt$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sin(x)\,dx$ **d)** $\int_0^2 s \cdot 2^s\,ds$

5.109 Erkläre, warum folgende Substitution nicht zum Ziel führt: CD

$\int e^{3t} \cdot (3t + 1)\, dt$

$u = e^{3t}$

$v' = 3t + 1$

5.110 Es gilt: $\int_0^{2\pi} \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\, dx = 0$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b$ BCD

1) Überprüfe die Behauptung grafisch anhand von mehreren selbstgewählten Beispielen.
2) Zeige die Richtigkeit der Behauptung durch partielles Integrieren.
3) Stelle den Integranden für a = b = 1 und für a = b = 3 grafisch dar und beschreibe den Unterschied zu den Darstellungen aus ***1)***.
4) Berechne das Integral $\int_0^{2\pi} \sin(a \cdot x) \cdot \sin(b \cdot x)\, dx$ für a = b und zeige, dass das Ergebnis nicht von a (bzw. b) abhängt.

5.111 Zeige, dass gilt: BD

$\int x^n \cdot \ln(x)\, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot [(n+1) \cdot \ln(x) - 1] + C, n \neq -1$

5.112 In gewissen Fällen kann man, anstelle partiell zu integrieren, die im Folgenden beschriebene Tabellenmethode anwenden: BD

zB: $\int x \cdot \sin(x)\, dx = ?$

u	v′	±1
x	sin(x)	+1
1	−cos(x)	−1
0	−sin(x)	+1
		−1

- In der ersten Spalte wird der Faktor **u** und dessen **Ableitungen** eingetragen.
- In der zweiten Spalte wird der Faktor **v′** eingetragen und jeweils **integriert**.
- In der letzten Spalte wird in der ersten Zeile +1 eingetragen, darunter abwechselnd −1 und +1.
- Die ersten beiden Spalten werden solange berechnet, bis in der ersten Spalte 0 steht, die letzte Spalte noch eine Zeile länger.
- Dann werden Pfeile von links oben nach rechts unten gesetzt, solange in der ersten Spalte nicht Null steht.

Die Produkte längs der Pfeile geben nun die Summanden des Ergebnisses der partiellen Integration an:

$$\int x \cdot \sin(x)\, dx = x \cdot \big(-\cos(x)\big) \cdot (+1) + 1 \cdot \big(-\sin(x)\big) \cdot (-1) + C = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$$

1) Prüfe die Methode für $\int x \cdot \cos(x)\, dx$ nach.
2) Erkläre mit eigenen Worten, warum und unter welchen Bedingungen die Methode zielführend ist.

5.113 Erkläre, warum nur eines der beiden folgenden Integrale mithilfe der Tabellenmethode aus Aufgabe 5.112 gelöst werden kann und ermittle dessen Lösung. BD

A) $\int \cos(x) \cdot \sin(x)\, dx$ ***B)*** $\int x^2 \cdot e^x\, dx$

5.3.3 Integration durch Partialbruchzerlegung

Gebrochen rationale Funktionen können oft nicht mit den bisher besprochenen Methoden integriert werden. Sie können jedoch integriert werden, indem sie in Teilbrüche zerlegt werden.

BC **5.114** Bringe die Terme auf gemeinsamen Nenner und vereinfache sie soweit wie möglich. Vergleiche den Grad von Zähler und Nenner. Was fällt dir auf?

1) $\frac{5}{x-4} + \frac{3}{x+1}$ **2)** $\frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}$ **3)** $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-3}$

BC **5.115** Der Hauptnenner einer Summe von Brüchen lautet: HN = $x^4 + x^3$
Gib alle Terme an, die für die Einzelnenner in Frage kommen können.

BC **5.116** Zerlege die Nenner der Brüche $\frac{x+1}{x^3 + 2x^2 - 15x}$ sowie $\frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 5x}$ soweit wie möglich in Faktoren. Beschreibe die Unterschiede der Ergebnisse möglichst genau.

Anhand von Beispielen wird nun eine Methode gezeigt, mit deren Hilfe man eine reelle echt gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ in Teilbrüche zerlegen kann.



ZB: $f(x) = \frac{3x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

Um den Nenner der Funktion in Linearfaktoren zu zerlegen, ermittelt man die Nullstellen x_1 und x_2 der zugehörigen quadratischen Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$:
$x_1 = 1, x_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = (x - 1) \cdot (x + 3)$

Somit kann der Bruchterm auch folgendermaßen angeschrieben werden: $\frac{3x+5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3x+5}{(x-1)\cdot(x+3)}$

Dieser Bruchterm kann in zwei Summanden mit dem Nenner $(x - 1)$ und dem Nenner $(x + 3)$ zerlegt werden. Da der ursprüngliche Zähler den Grad 1 hat und die neuen Einzelbrüche mit $(x + 3)$ bzw. $(x - 1)$ erweitert werden, sind deren Zähler reelle Zahlen A und B, also
$\frac{3x+5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3x+5}{(x-1)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$.

Die Zerlegung in Teilbrüche (Partialbrüche) wird als **Partialbruchzerlegung** bezeichnet. Die erhaltenen Partialbrüche können dann integriert werden.

Die Zerlegung ist bei jeder reellen echt gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ möglich. Ist die Funktion unecht gebrochen rational, so wird sie mithilfe der Polynomdivision in eine Summe aus einer Polynomfunktion und einer echt gebrochen rationalen Funktion zerlegt.

Die Art der Teilbrüche hängt von den Nullstellen des Nenners ab.
ZB: Nenner = $(x - 1) \cdot (x - 2)^3 \cdot (x^2 + 2x + 10)$

- Die Faktoren $(x - 1)$ und $(x - 2)^3$ haben **reelle Nullstellen**, da es reelle Zahlen gibt (hier: $x = 1$ bzw. $x = 2$), für die diese Faktoren den Wert null annehmen.
- $(x - 1)$ hat eine **einfache** reelle Nullstelle, weil dieser Faktor im gegebenen Nenner nur einmal auftritt.
  $(x - 2)^3$ bedeutet, dass der Faktor $(x - 2)$ dreimal, das heißt mit der **Vielfachheit** drei im gegebenen Nenner enthalten ist. Man spricht bei $x = 2$ dann von einer **mehrfachen** reellen Nullstelle.
- Setzt man den Faktor $(x^2 + 2x + 10)$ gleich null, so hat die Gleichung keine reelle Lösung, der quadratische Ausdruck ist daher nicht in Linearfaktoren zerlegbar, er hat nur **komplexe Nullstellen**.

Einfache reelle Nullstellen

ZB: $\frac{3x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

- Bestimmen der Nullstellen des Nennerploynoms

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = -3$

- Jede Nullstelle ist **einfach**, in diesem Fall wird der Ansatz $\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$ verwendet.

$\frac{3x + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}$

$\frac{3x + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A \cdot (x + 3) + B \cdot (x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 3)} \quad | \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$

$3x + 5 = A \cdot (x + 3) + B \cdot (x - 1)$

- Mit gemeinsamem Nenner anschreiben und A und B mittels Koeffizientenvergleich oder Einsetzen der Nullstellen ermitteln

Koeffizientenvergleich:

$3x + 5 = Ax + 3A + Bx - B$

$\mathbf{3}x + \mathbf{5} = (\mathbf{A + B}) \cdot x + (\mathbf{3A - B})$

$\mathbf{x^1}: 3 = A + B$

$\mathbf{x^0}: 5 = 3A - B$

$A = 2$ und $B = 1$

- Beim **Koeffizientenvergleich** werden die Koeffizienten jeweils gleicher Potenzen von x zusammengefasst. Diese müssen auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen. Man erhält ein Gleichungssystem.

Einsetzen der Nullstellen:

$3x + 5 = A \cdot (x + 3) + B \cdot (x - 1)$

$x = 1: \quad 3 \cdot 1 + 5 = A \cdot (1 + 3) + B \cdot (1 - 1)$
$A = 2$

$x = -3: \quad 3 \cdot (-3) + 5 = A \cdot (-3 + 3) + B \cdot (-3 - 1)$
$B = 1$

- Eine andere Möglichkeit, die gesuchten Werte für die Konstanten A und B zu ermitteln, ist das Einsetzen von konkreten Werten für x. Man verwendet dabei die Nullstellen des Nenners, weil so der Rechenaufwand am geringsten ist. Beim Einsetzen der Nullstellen werden die Erweiterungsfaktoren nicht ausmultipliziert. Durch das Einsetzen der Nullstellen fällt jeweils ein Term mit einer Variablen weg.
  Beide Methoden können auch kombiniert werden.

$\frac{3x + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 3}$

- Man erhält die Zerlegung in Partialbrüche.

Technologieeinsatz: Partialbruchzerlegung GeoGebra:



Eingabe: Partialbruch[(3x+5)/(x^2+2x-3)]

$f(x) = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 3}$

CAS

1 Partialbruch[(3x+5)/(x^2+2x-3)]

$\rightarrow \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 3}$

- Der Befehl **Partialbruch[Funktion]** steht im Algebra-Fenster und im CAS-Fenster zur Verfügung.

TI-Nspire:

$\text{expand}\left(\frac{3\cdot x+5}{x^2+2\cdot x-3}\right) \qquad \frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-1}$

- Man erhält die Zerlegung in Partialbrüche mittels Menü **3: Algebra**, **3: Entwickle**.

MathCad:

Die Zerlegung erfolgt über **Auswertung symbolischer Kennwörter** (Tastenkombination: STRG Umschalt .) mit den Wörtern: **konvertieren,teilbruch,** gefolgt vom Variablennamen.

$$\frac{x^4-13x^2+29x-37}{x^3-13x+12} \text{ konvertieren, teilbruch, } x \rightarrow x+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+4}$$

Verwendet man den Befehl **Partialbruchzerlegung**, der sich im Menü **Symbolik**, **Variable** befindet, so muss eine Variable des Terms markiert sein.

B **5.117** Integriere mithilfe der Partialbruchzerlegung: $\int \frac{2x^3-5x^2-4x-3}{x^2-x-2}\,dx$

Lösung:

$(2x^3-5x^2-4x-3):(x^2-x-2) = 2x-3$
$\underline{-2x^3+2x^2+4x}$
$-3x^2 \quad -3$
$\underline{+3x^2-3x-6}$
$-3x-9$ Rest

- Der Grad des Zählerpolynoms ist größer als jener des Nennerpolynoms, daher wird zuerst die Polynomdivision durchgeführt.

$\frac{2x^3-5x^2-4x-3}{x^2-x-2} = 2x-3+\frac{-3x-9}{x^2-x-2}$

- Für das Restpolynom $\frac{-3x-9}{x^2-x-2}$ erfolgt die Partialbruchzerlegung.

$x^2-x-2=0$
$x_1=-1, x_2=2$
$\frac{-3x-9}{x^2-x-2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$

- Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmen und entsprechende Ansätze wählen

$-3x-9 = A\cdot(x-2)+B\cdot(x+1)$
$x=-1{:}\ \ -6=-3A \ \Rightarrow\ A=2$
$x=2{:}\ \ -15=3B \ \Rightarrow\ B=-5$

- Koeffizienten bestimmen

$\int \frac{2x^3-5x^2-4x-3}{x^2-x-2}\,dx = \int\left(2x-3+\frac{2}{x+1}-\frac{5}{x-2}\right)dx =$
$= x^2-3x+2\cdot\ln(|x+1|)-5\cdot\ln(|x-2|)+C$

- Integration der einzelnen Summanden

Mehrfache reelle Nullstellen

Kommen im Nenner eines Bruchs mehrfache reelle Nullstellen x_i vor, so sind Teilbrüche mit den Nennern $(x-x_i), (x-x_i)^2, \dots, (x-x_i)^n$ anzuschreiben, wobei n die Vielfachheit der Nullstelle x_i ist.

ZB: $\frac{Z(x)}{x\cdot(x+1)^3}$

- Als Nenner der Teilbrüche kommen nicht nur x und $(x+1)^3$, sondern auch $(x+1)$ und $(x+1)^2$ in Frage.

Die Zerlegung in Teilbrüche wird nun anhand eines Beispiels gezeigt:

$\frac{x-4}{x^2-4x+4}$

- Bestimmen der Nullstellen des Nennerpolynoms

$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$

$x_{1,2}=2$

- Die Nullstelle ist zweifach. Es gibt daher Teilbrüche mit den Nennern $(x-x_1)$ und $(x-x_1)^2$. Daher wird hier der Ansatz $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}$ verwendet.

$\frac{x-4}{x^2-4x+4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$

$\frac{x-4}{x^2-4x+4}=\frac{A\cdot(x-2)+B}{(x-2)^2} \quad |\cdot(x-2)^2$

- Mit gemeinsamem Nenner anschreiben

$x-4=Ax-2A+B$

- Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner

$1x-4=Ax-2A+B$

- Ermitteln der Koeffizienten A und B mittels Koeffizientenvergleich

$A=1$ und $B=-2$

$\frac{x-4}{x^2-4x+4}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}$

- Man erhält nun die Partialbrüche.

5.118 Integriere mithilfe der Partialbruchzerlegung: $\int\frac{x^3+4x^2+x+2}{x^4+2x^3}\,dx$

B

Lösung:

$x^4+2x^3=x^3\cdot(x+2)\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-2$

- x_1 ... dreifache Nullstelle

$\frac{x^3+4x^2+x+2}{x^4+2x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+2}$

$x^3+4x^2+x+2=A\cdot x^2\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot(x+2)+D\cdot x^3$

$A=2,\ B=0,\ C=1,\ D=-1$

$\int\frac{x^3+4x^2+x+2}{x^4+2x^3}\,dx=\int\frac{2}{x}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx-\int\frac{1}{x+2}\,dx=$

$=2\cdot\ln(|x|)-\frac{1}{2x^2}-\ln(|x+2|)+C$

- Die Konstanten A, B, C und D werden mittels Koeffizientenvergleich bzw. Einsetzen ermittelt.

Komplexe Nullstellen

Hat der Nenner einfache komplexe Nullstellen, so behält man das quadratische Polynom bei und setzt den Zähler linear an.

ZB: $\frac{4x^2+6x+20}{x^3+2x^2+10x}$

- Bestimmen der Nullstellen des Nennerpolynoms

$x^3+2x^2+10x=x\cdot(x^2+2x+10)=0$

$x_1=0,\ x_2=-1+3i,\ x_3=-1-3i$

- Der Term $x^2+2x+10$ hat konjugiert komplexe Nullstellen. Für einfache **komplexe** Nullstellen wird der Ansatz $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ verwendet.

$\frac{4x^2+6x+20}{x^3+2x^2+10x}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+10}+\frac{C}{x}$

$\frac{4x^2+6x+20}{x^3+2x^2+10x}=\frac{(Ax+B)\cdot x}{x\cdot(x^2+2x+10)}+\frac{C\cdot(x^2+2x+10)}{x\cdot(x^2+2x+10)}$

- Mit gemeinsamem Nenner anschreiben

$4x^2+6x+20=Ax^2+Bx+Cx^2+2Cx+10C$

- Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner

$4x^2+6x+20=(A+C)\cdot x^2+(B+2C)\cdot x+10C$

- Ermitteln der Koeffizienten A, B und C mittels Koeffizientenvergleich

$C=2,\ A=2,\ B=2$

$\frac{4x^2+6x+20}{x^3+2x^2+10x}=\frac{2x+2}{x^2+2x+10}+\frac{2}{x}$

- Man erhält nun die Partialbrüche.

B **5.119** Ermittle das Integral $\int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2 \cdot (x^2 + 1)}\, dx$.

Lösung:

$x^2 \cdot (x^2 + 1) = 0$

$x^2 = 0$ oder $x^2 + 1 = 0$

$\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2 \cdot (x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$

- x = 0 ist eine zweifache Nullstelle. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat nur komplexe Nullstellen.

$x^3 + x^2 + 2 = A \cdot x \cdot (x^2 + 1) + B \cdot (x^2 + 1) + (Cx + D) \cdot x^2$

$x^3 + x^2 + 2 = (A + C) \cdot x^3 + (B + D) \cdot x^2 + A \cdot x + B$

$x^3{:}\ 1 = A + C$

$x^2{:}\ 1 = B + D$

$x^1{:}\ 0 = A \Rightarrow A = 0, C = 1$

$x^0{:}\ 2 = B \Rightarrow B = 2, D = -1$

- Die Koeffizienten werden durch Koeffizientenvergleich ermittelt.

$\int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2 \cdot (x^2 + 1)}\, dx = \int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{x - 1}{x^2 + 1}\right) dx =$

$= 2\int x^{-2}\, dx + \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx - \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx =$

$= -\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + C$

- Das Integral wird in Summanden zerlegt, die einzeln integriert werden.

Jede reelle echt **gebrochen rationale Funktion** kann in **Partialbrüche** zerlegt werden.

Für die Ansätze gilt:

x_1 ... einfache Nullstelle: $\frac{A}{x - x_1}$

x_1 ... n-fache Nullstelle: $\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n}$

einfache komplexe Nullstellen: $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$

BC **5.120** Gib an, welche Art von Nullstellen das angegebene Polynom aufweist.

a) $x^2 + 4x + 3$ **c)** $x^3 + 2x^2 + 7x$ **e)** $x^4 + 7x^3 + 12x^2$

b) $x^2 + 6x + 10$ **d)** $x^3 + 2x^2$ **f)** $x^4 + 5x^2 + 6$

BC **5.121** Welcher der angegebenen Ansätze für die Partialbruchzerlegung ist richtig? Korrigiere die anderen Zerlegungen.

A) $\frac{2 - x}{x^3 - 5x^2} = \frac{Ax + B}{x^2} + \frac{C}{x - 5}$

B) $\frac{x + 1}{x^4 + 3x^3} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x + 3}$

C) $\frac{3x + 1}{x^4 - 2x^3} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x - 2}$

Aufgaben 5.122 – 5.125: Zerlege den Term in Partialbrüche.

B **5.122** **a)** $\frac{-2x - 6}{x^2 - 3x}$ **b)** $\frac{4x + 15}{x^2 - 5x}$ **c)** $\frac{4x - 4}{x^2 - 4}$ **d)** $\frac{x + 9}{x^2 - 9}$

B **5.123** **a)** $\frac{2x}{x^2 + 3x + 2}$ **b)** $\frac{2x + 3}{x^2 - x - 6}$ **c)** $\frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 4}$ **d)** $\frac{4x + 14}{x^2 + 6x + 9}$

B **5.124** **a)** $\frac{-2x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x^2}$ **b)** $\frac{-2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$ **c)** $\frac{-13x - 8}{x^3 - 3x^2 - 4x}$ **d)** $\frac{-2x^2 - 2x + 10}{5x^3 + 5x^2 - 10x}$

B **5.125** **a)** $\frac{x^3 - 8x^2 + 13x + 27}{x^2 - 3x - 4}$ **b)** $\frac{x^3 - x^2 - 9x - 3}{x^2 - 9}$ **c)** $\frac{2x^2 - 9x + 8}{x^2 - 6x + 9}$ **d)** $\frac{x^2 - 8}{x^2 + 2x}$

Aufgaben 5.126 – 5.128: Ermittle das Integral mithilfe der Partialbruchzerlegung.

5.126 **a)** $\int \frac{-x-5}{x^2-1}\,dx$ **b)** $\int \frac{12x+20}{x^2+4x}\,dx$ **c)** $\int \frac{2x+14}{x^2+2x-8}\,dx$ **d)** $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+1}\,dx$ B

5.127 **a)** $\int \frac{3x^2+3x-4}{x^3-4x}\,dx$ **b)** $\int \frac{8x^2-x-30}{x^3+5x^2}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^2+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$ **d)** $\int \frac{6x^2-x+4}{x^3+x^2-2x}\,dx$ B

5.128 **a)** $\int \frac{2x^2+10x+6}{x^2+4x-5}\,dx$ **b)** $\int \frac{3x^3+2x^2-31x+48}{x^2+2x-8}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^4-3x^3-4}{x^2-3x}\,dx$ d) $\int \frac{x^5-1}{x^2+3x-40}\,dx$ B

5.129 **1)** Integriere mithilfe von Partialbruchzerlegung. BC
2) Überlege, wie die Lösung einfacher ermittelt werden kann und führe diese Methode ebenfalls durch.

A) $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$ **B)** $\int \frac{x-4}{x^2-16}\,dx$ **C)** $\int \frac{x+5}{x^2+16x+55}\,dx$

5.130 Führe die Partialbruchzerlegung durch. B

a) $\frac{-3x^2+3x-20}{x^3+4x}$ **b)** $\frac{3x^2+8x+3}{x^3+x^2+x}$ **c)** $\frac{-4x-6}{x^3+4x^2+6x}$ **d)** $\frac{3}{x^4+3x^2}$

5.131 Ermittle das Integral mithilfe der Partialbruchzerlegung. B

a) $\int \frac{-x^2+3x-1}{x^3+x}\,dx$ **b)** $\int \frac{3x^2-x+6}{(x^2+3)\cdot(x-1)}\,dx$ **c)** $\int \frac{2x^4+x^2-2}{x^4+x^2}\,dx$ **d)** $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+4x}\,dx$

5.132 Ein Integral wird mittels Partialbruchzerlegung gelöst und man erhält folgendes Ergebnis: BC

$\int \textbf{?}\,dx = \ln\left(\frac{x^2+x}{x+2}\right) + C$

Überlege anhand des Ergebnisses, welche Teilbrüche in der Angabe aufgetreten sein müssen. Überprüfe deine Vermutung durch Nachrechnen.

5.133 Kommen im Nenner eines Bruchs nur einfache Linearfaktoren vor, so kann man die Zähler der Brüche nach der so genannten „Zuhaltemethode" ermitteln, BD

zum Beispiel:

$\frac{3}{(x+1)\cdot(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$

Der Wert von A wird dabei folgendermaßen ermittelt:
Der Nenner des Teilbruchs mit dem Zähler A wird 0, wenn x = –1 ist. Nun wird nur mehr der gegebene Bruch (also der Term links vom Gleichheitszeichen) betrachtet und der Faktor (x + 1) zugedeckt. In den verbleibenden Ausdruck wird für x = –1 eingesetzt. Man erhält:

$\frac{3}{-1+4} = 1 = A$

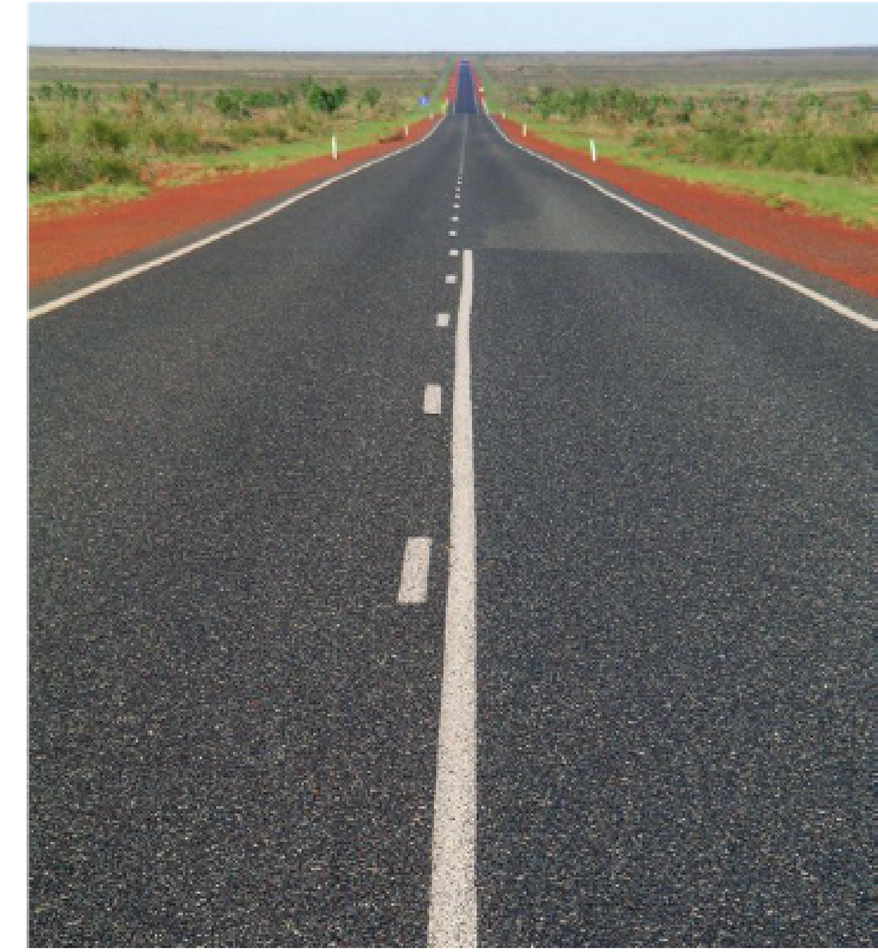
Nach der gleichen Methode ergibt sich:

$\frac{3}{-4+1} = -1 = B$

1) Überprüfe die Methode an zwei selbst gewählten Beispielen.
2) Erkläre anhand des angegebenen Beispiels, warum die Methode funktioniert.
Hinweis: Multipliziere die Gleichung mit einem der Teilnenner.

5.4 Spezielle Integrale

Uneigentliche Integrale



Bei der Definition des bestimmten Integrals wird von einer Funktion ausgegangen, die auf einem geschlossenen Intervall beschränkt ist. Ist eine Integrationsgrenze $-\infty$ oder $+\infty$ oder weist die Funktion eine Polstelle im Integrationsbereich auf, so wird das Integral als **uneigentliches Integral** bezeichnet. Im Folgenden wird gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Berechnung des bestimmten Integrals trotzdem möglich ist.

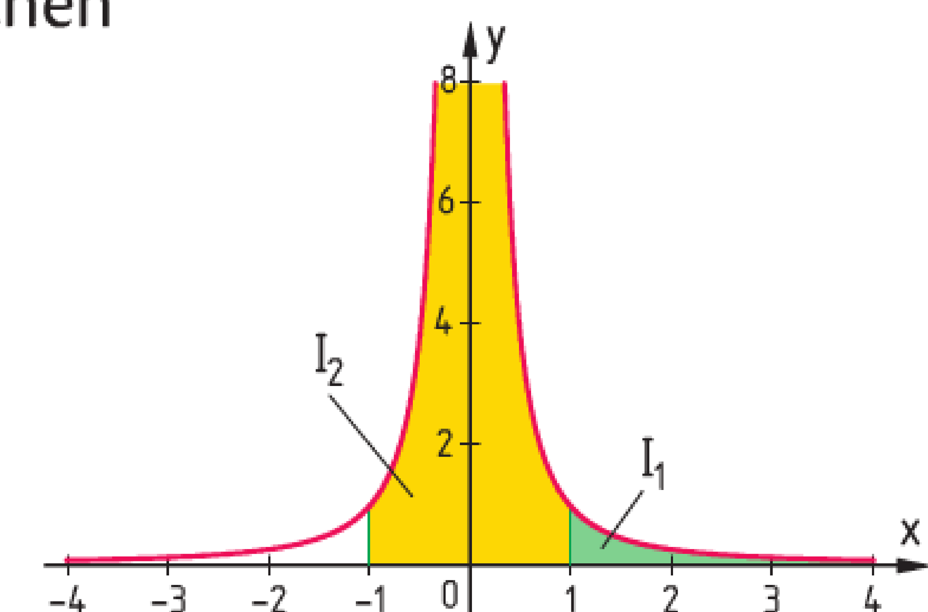
BCD **5.134** ***1)*** Stelle die Funktionen $y_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $y_2 = \frac{1}{x^3}$ grafisch dar.

2) Gib jeweils an, ob die Funktion im gegebenen Intervall beschränkt oder unbeschränkt ist. A = [2; 10], B = [−2; 3], C = [0; 4], D = [400; 500]

3) Versuche, die Integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ mit den bekannten Integrationsregeln zu ermitteln. Welche Schwierigkeiten treten auf?

Im Abschnitt über Folgen und Reihen wurde bereits gezeigt, dass die Summe einer unendlichen Reihe eine reelle Zahl sein kann. Da Integrieren auf einen Summationsvorgang zurückzuführen ist, wird nun die Frage behandelt, wie auch hier sinnvoll mit unendlichen Grenzen umgegangen werden kann.

Wir betrachten zum Beispiel die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und untersuchen die Größe der grün bzw. gelb gekennzeichneten Flächen.



$$\mathbf{I_1 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx} \text{ und } \mathbf{I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx}$$

Beim ersten Integral ist die obere Grenze ∞. Wollen wir das bestimmte Integral nun auswerten, so kann die obere Grenze, formal ∞, nicht wie eine reelle Zahl behandelt werden.
Es wird daher das Integral bis zu einer oberen Grenze b ausgewertet und anschließend – also nach dem Integrationsvorgang – der Grenzwert für $b \to \infty$ ermittelt. Anschaulich interpretiert entspricht dieses Vorgehen der Berechnung des Inhalts der grünen Fläche bis zu einer Grenze b, die anschließend „unendlich" weit nach rechts verschoben wird.

$$\lim_{b \to \infty}\left(\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx\right) = \lim_{b \to \infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b \to \infty}\left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = 0 + 1 = 1$$

Der Grenzwert existiert und ist somit der Wert des uneigentlichen Integrals. Obwohl der Bereich unbegrenzt ist, nähert sich der grün markierte Flächeninhalt unter der Kurve dem Wert 1, übersteigt diesen aber nicht.

Technologieeinsatz: Uneigentliches Integral
TI-Nspire





Wird das Integral mittels Technologieeinsatz berechnet, so kann im Allgemeinen das Symbol ∞ als Grenze eingegeben werden.

Der Integrand des zweiten Integrals I_2 hat im Integrationsbereich bei x = 0 eine Polstelle, ist also unbeschränkt. Das Intervall wird daher an der Polstelle x = 0 geteilt und stückweise integriert. Da x aber den Wert 0 nicht annehmen darf, wird auch hier der Grenzwert gebildet.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b \to 0^-}\left(\int_{-1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx\right) + \lim_{a \to 0^+}\left(\int_{a}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx\right) =$$

$$= \lim_{b \to 0^-}\left(-\frac{1}{b} - \frac{1}{1}\right) + \lim_{a \to 0^+}\left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{a}\right)\right) = (+\infty) - 1 + (-1) - (-\infty) = +\infty$$

Es gibt keinen Grenzwert, das uneigentliche Integral ist divergent. Das heißt, dass der Flächeninhalt „unendlich groß" ist.

Hätte man fälschlicherweise wie gewohnt integriert, dann erhielte man:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = -2.$$

Dieses Ergebnis kann aber nicht stimmen, da der Funktionsgraph im Bereich [−1; 1] oberhalb der x-Achse liegt.

Mithilfe von Grenzwerten kann der Wert eines Integrals auch dann ermittelt werden, wenn die Integrationsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$ sind.

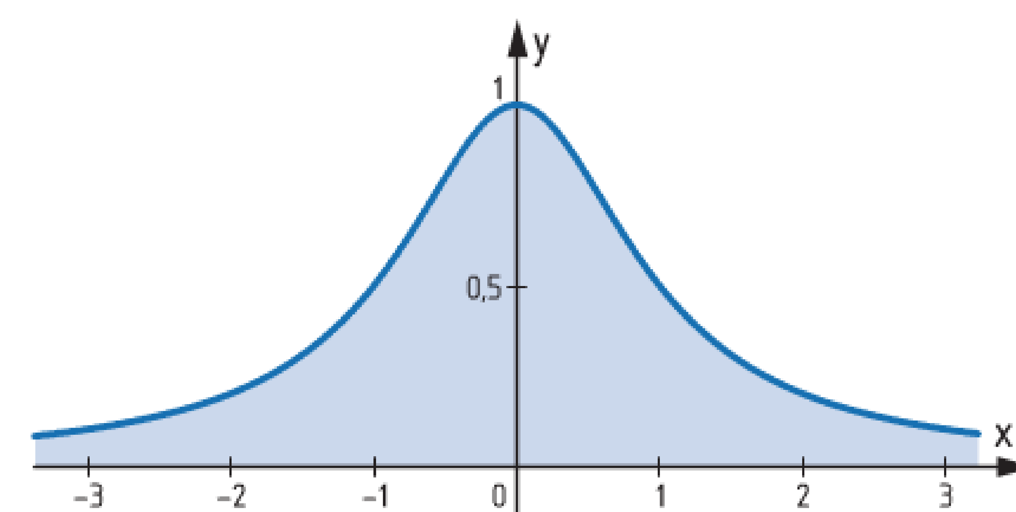
ZB: Die Funktion $f(x) = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ ist unter dem Namen „Witch of Agnesi" bekannt. Sie verdankt ihren Namen zum einen der italienischen Mathematikern Maria Gaetana Agnesi, zum anderen einem Übersetzungsfehler. Ein Professor in Cambridge hat anstelle von „La versiere di Agnesi" (italienisch: „Die Kurve der Agnesi") fälschlicherweise „L'awersiera di Agnesi" verstanden, wobei „awersiera" „Frau, die gegen Gott gerichtet ist" bedeutet.



Maria Gaetana Agnesi
(1718 – 1799)

Für a = 1 erhält man die Funktion $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

Der Wert von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx$ entspricht der Gesamtfläche zwischen der Kurve und der x-Achse. Aus Symmetriegründen gilt:



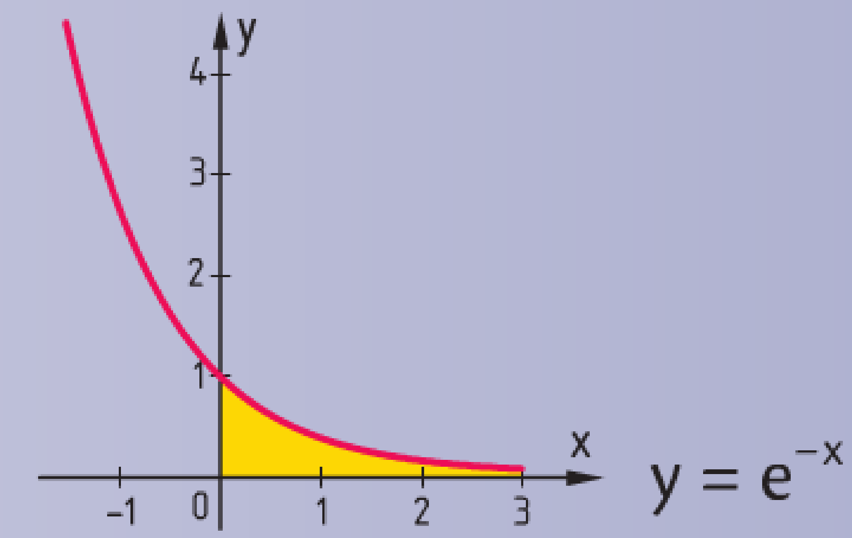
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx = 2 \cdot \lim_{b \to \infty}\left(\int_{0}^{b} \frac{1}{1 + x^2}\,dx\right) = 2 \cdot \lim_{b \to \infty}\left(\arctan(x)\Big|_{0}^{b}\right) = 2 \cdot \lim_{b \to \infty}(\arctan(b) - 0) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Integrale mit den Grenzen $\pm\infty$ und Integrale, deren Integrand im Integrationsbereich unendlich wird, werden als **uneigentliche Integrale** bezeichnet. Sie werden mithilfe von Grenzwerten berechnet. Ist die Funktion integrierbar und existiert der Grenzwert, so ist das uneigentliche Integral konvergent und der Grenzwert ist der Wert des uneigentlichen Integrals. Gibt es keinen Grenzwert, ist das Integral divergent.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty}\left(\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right) \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty}\left(\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right)$$

$$\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to x_0}\left(\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right), \quad x_0 \text{ ... Polstelle}$$

B **5.135** Berechne: **a)** $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ **b)** $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$



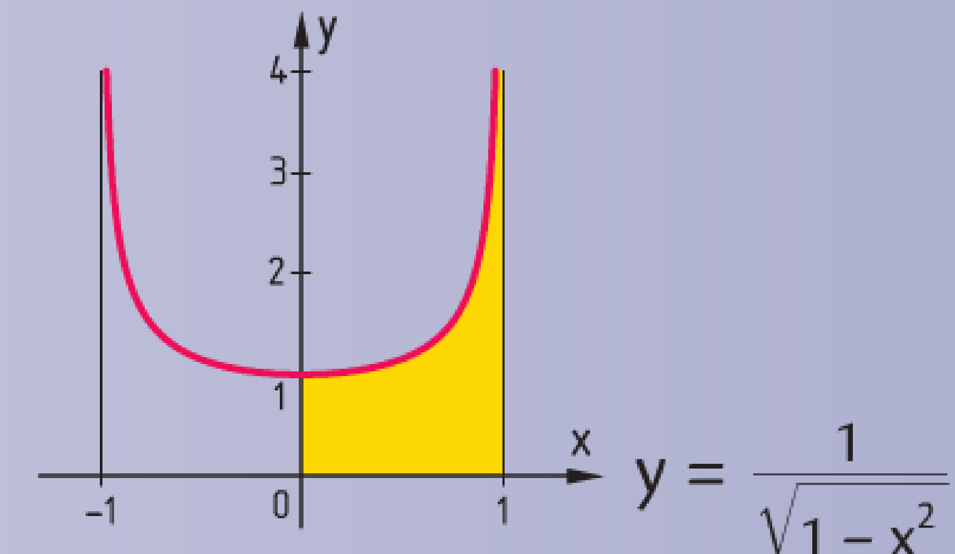
Lösung:

a) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty}\left(\int_0^{b} e^{-x}\,dx\right) = \lim_{b \to \infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right) =$

$= \lim_{b \to \infty}(-e^{-b} - (-e^{0})) = 0 + 1 = 1$

b) $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{b \to 1}\int_0^{b} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{b \to 1}\left(\arcsin(x)\Big|_0^b\right) =$

$= \lim_{b \to 1}(\arcsin(b) - \arcsin(0)) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$



Integrale, für die keine Stammfunktion angegeben werden kann

Wir haben verschiedene Regeln und Methoden kennen gelernt, um Funktionen zu integrieren. Wie bereits erwähnt wurde, gibt es zwar zu jeder stetigen Funktion f eine Stammfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, diese muss aber nicht in geschlossener Form darstellbar sein. Oft gibt es zu scheinbar „einfachen" Funktionen keine Stammfunktion, die sich aus elementaren Funktionen zusammensetzt.

ZB: $\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, $\int e^{-x^2}\,dx$, $\int \cos(x^2)\,dx$

Die Berechnung der Integrale erfolgt in solchen Fällen zum Beispiel mithilfe von Reihendarstellungen. Diese werden in Band 4 behandelt. Einige spezielle Integrale werden hier schon angegeben:

- $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Besondere Integralfunktionen

Folgende Integrale werden in der Technik häufig verwendet.

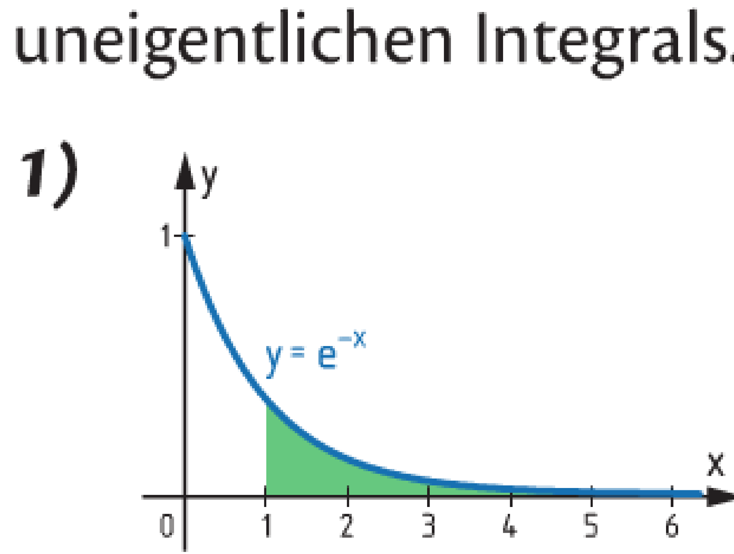
- **Gammafunktion**: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\,dt$

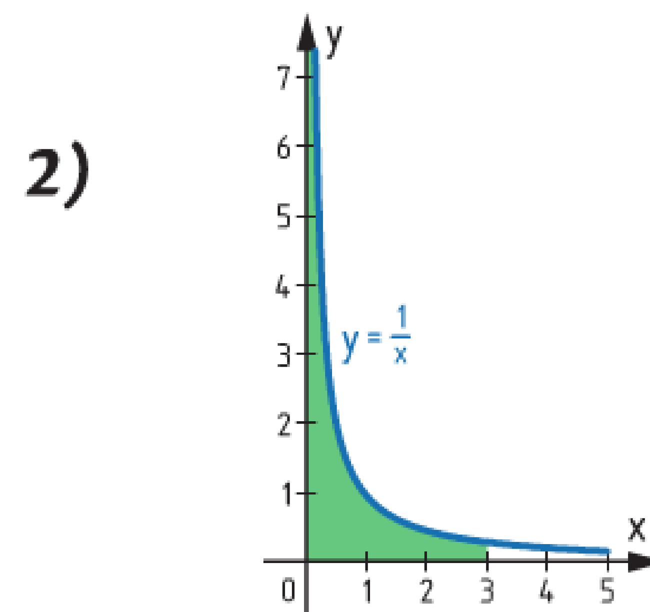
  Wichtige Eigenschaften der Gammafunktion sind:
  1) $\Gamma(1) = 1$ 2) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ 3) $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$
  Damit ist die Gammafunktion eine Verallgemeinerung der Faktoriellen (siehe Seite 84) für reelle Zahlen.

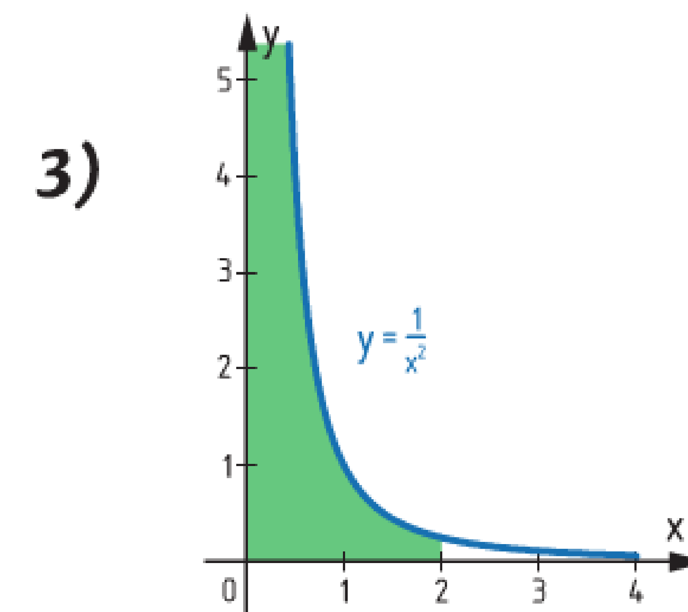
- **Laplace-Transformierte**: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\,dt$

  Dabei ist f(t) eine im Bereich [0; ∞[stückweise stetige Funktion und s wird so gewählt, dass das uneigentliche Integral konvergiert.
  Die Laplace-Transformation ist eine Rechenmethode, die zum Beispiel Gleichungen, die eine Funktion und deren Ableitung enthalten, in einfache lineare Gleichungen überführt.
  Es gilt zB: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$
  Dieser Zusammenhang wird in der Elektrotechnik benötigt (siehe Band 4).

5.136 Beschreibe jeweils den Inhalt der grün gekennzeichneten Fläche mithilfe eines uneigentlichen Integrals. C

1)


2)


3)


5.137 Gib an, welche der gegebenen Integrale uneigentliche Integrale sind. Begründe deine Antwort jeweils mit eigenen Worten und mithilfe einer Zeichnung. BCD

1) $\int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx$ **2)** $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ **3)** $\int_0^2 \ln(x)\,dx$ **4)** $\int_0^2 \ln(x+1)\,dx$

Aufgaben 5.138 – 5.142: Berechne den Wert des Integrals, wenn dieser existiert.

5.138 **a)** $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ **b)** $\int_2^\infty \frac{1}{x^5}\,dx$ **c)** $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **d)** $\int_8^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ B

5.139 **a)** $\int_0^\infty e^{2t}\,dt$ **b)** $\int_{-\infty}^0 e^{2t}\,dt$ **c)** $\int_1^\infty e^{-3x}\,dx$ **d)** $\int_0^\infty x^2 \cdot e^{x^3}\,dx$ B

5.140 **a)** $\int_0^1 \frac{1}{x^4}\,dx$ **b)** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ **c)** $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ **d)** $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$ B

5.141 **a)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **b)** $\int_{-\infty}^0 \cos(x)\,dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\,dt$ **d)** $\int_0^\infty \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt$ B

5.142 **a)** $\int_0^\infty x \cdot e^{-x}\,dx$ **b)** $\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x}\,dx$ **c)** $\int_0^1 \ln(x)\,dx$ **d)** $\int_0^1 x \cdot \ln(x)\,dx$ B

5.143 Berechne $\Gamma(3)$. Prüfe das Ergebnis mithilfe des Zusammenhangs $\Gamma(n+1) = n!$ nach. BD

5.144 Radium 226 zerfällt mit einer Halbwertszeit von rund 1 600 Jahren. AB

1) Für die nach t Jahren verbleibende Anzahl von Kernen gilt t: $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$
Ermittle k.

2) Die durchschnittliche (mittlere) Zeit μ, nach der ein Atomkern im Mittel zerfällt, lässt sich mithilfe der Wahrscheinlichkeit $p(t) = k \cdot e^{-kt}$ nach der folgenden Formel berechnen:

$$\mu = \int_0^\infty t \cdot p(t)\,dt$$

Ermittle den Wert von μ.

5.145 Zeige, dass Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx$ für $n > 1$ konvergent ist. BD

5.146 Verwende Aufgabe 5.145, um die Konvergenz des Integrals $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ zu untersuchen. BC

Stelle zuerst den Integranden und die Funktion $\frac{1}{x^2}$ grafisch dar. Beschreibe, was dir auffällt und was daraus für die Konvergenz des gegebenen Integrals folgt.

5.147 Berechne die Laplace-Transformierte. B

a) $f(t) = 1$

b) $f(t) = t$

Grundlagen der Integralrechnung

Zusammenfassung

Unbestimmtes Integral
Das unbestimmte Integral ist die Menge der Stammfunktionen und entspricht geometrisch einer Kurvenschar.
$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ mit $F'(x) = f(x)$, $C \in \mathbb{R}$

Bestimmtes Integral
- Das bestimmte Integral entspricht der Maßzahl des orientierten Flächeninhalts zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen von x = a bis x = b.
- Das bestimmte Integral entspricht dem Grenzwert der Produktsumme.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x\right)$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfunktion von f(x)
- $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Grundintegrale
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$ $\qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C \quad x \neq 0$

$\int e^x\,dx = e^x + C$ $\qquad \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$ $\qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

Faktor- und Summenregel
$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$ $\qquad \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Integration mittels Substitution
Ersetzen von Termen oder Variablen im Integranden, sodass ein einfacheres Integral entsteht.
$\int f(a \cdot x + b)\,dx = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + C$ $\qquad \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln(|u(x)|) + C$

Partielle Integration
$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$ $\qquad$ Merkhilfe: $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

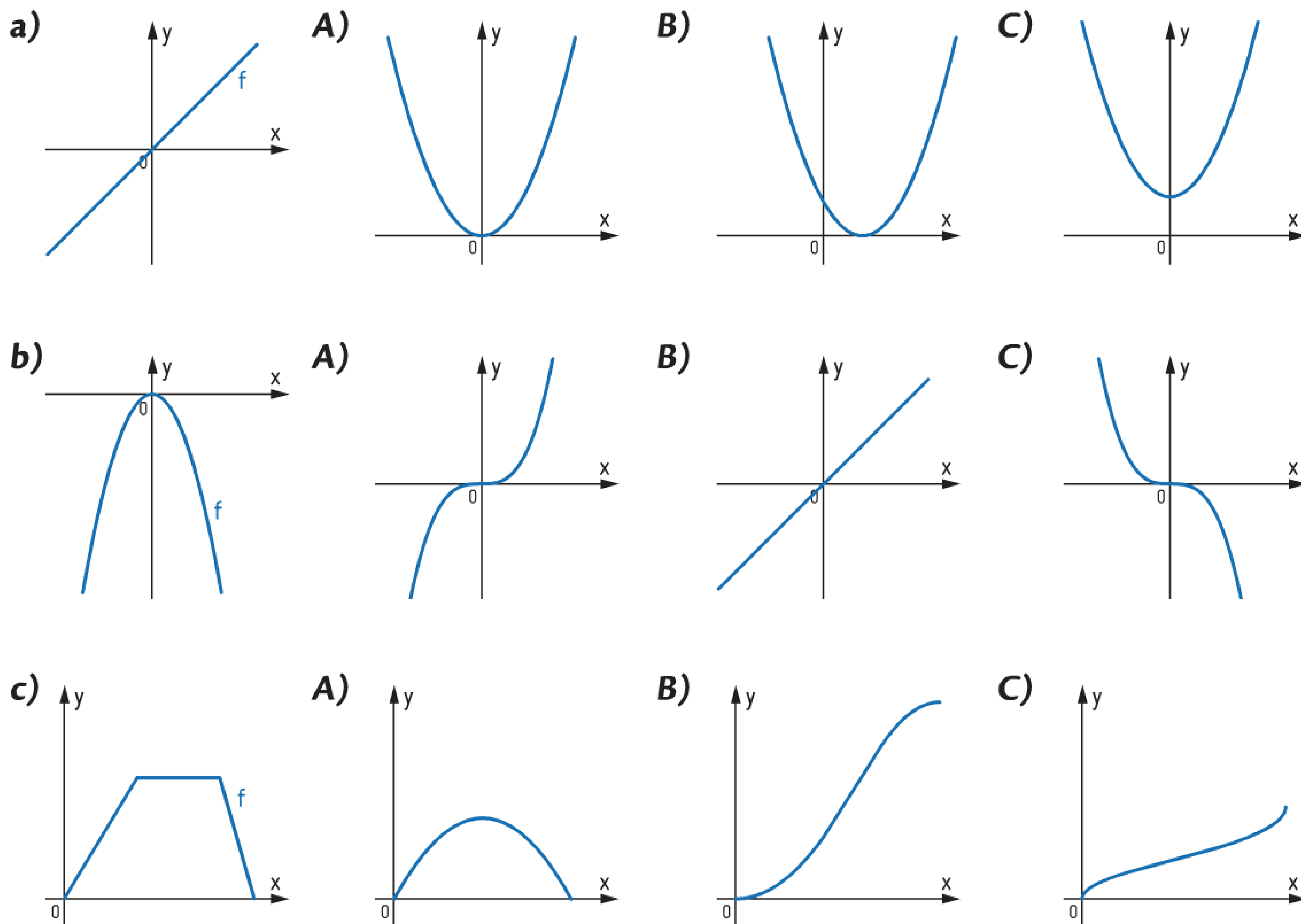
Integration mittels Partialbruchzerlegung
Ein echt gebrochener Bruch wird in Teilbrüche zerlegt, die integriert werden können.
Bei unecht gebrochenen Brüchen muss zuerst eine Polynomdivision durchgeführt werden.

Uneigentliche Integrale
Integrale mit den Grenzen $\pm\infty$ und Integrale, deren Integrand unendlich wird, werden mithilfe von Grenzwerten berechnet.

Weitere Aufgaben

CD **5.149** Sind folgende Aussagen allgemein gültig? Begründe deine Antwort.
1) Das bestimmte Integral gibt den Flächeninhalt an.
2) Ist F(x) + C eine Stammfunktion einer gegebenen Funktion, so ist auch F(x) + D eine Stammfunktion dieser Funktion.
3) Das Ergebnis eines bestimmten Integrals ist eine Funktion.

5.150 Ordne der dargestellten Funktion f alle Stammfunktionen zu: AC



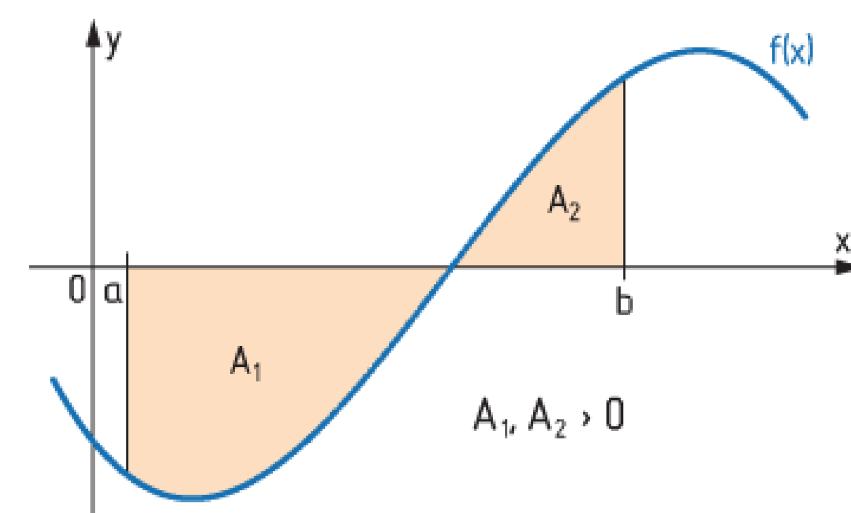
5.151 Begründe anhand der skizzierten Funktion, welche Antwort zutrifft. D

$\int_a^b f(x)\,dx = ?$

A) $A_1 - A_2$ **D)** $|A_1| - |A_2|$

B) $|A_1 - A_2|$ **E)** $|A_1| + |A_2|$

C) $A_2 - A_1$ **F)** $A_1 + A_2$



5.152 Gib das unbestimmte Integral der gegebenen Funktion an und bestimme anschließend die Gleichung jener Kurve, die durch den Punkt P verläuft. AB

a) $f(x) = x^2 - 1$, $P(1|3)$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$, $P(9|20)$ **c)** $f(x) = \sin(x)$, $P(\pi|3)$

5.153 **1)** Berechne das bestimmte Integral. AB

2) Gib den Inhalt der Fläche an, die vom Funktionsgraphen und der waagrechten Achse eingeschlossen wird.

a) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$ **b)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2 \cdot \cos(t)\,dt$ **c)** $\int_0^3 (2x^2 - 8)\,dx$ **d)** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\,dt$

Aufgaben 5.154 – 5.156: Ermittle die unbestimmten Integrale.

5.154 **a)** $\int (2x^3 - 4 \cdot e^x)\,dx$ **b)** $\int (4 \cdot \cos(t) + t)\,dt$ **c)** $\int \left(\frac{1}{2u} + \sin(u)\right) du$ B

5.155 **a)** $\int \left(2^x + \frac{3}{x} - 2 \cdot e^x\right) dx$ **b)** $\int \left(\frac{2}{\cos^2(t)} - 4t\right) dt$ **c)** $\int \left(\frac{a}{1 + s^2} + b \cdot s^2 + c\right) ds$ B

5.156 **a)** $\int 4x^3\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{3x^4}\,dx$ **c)** $\int t \cdot \sqrt[4]{t^3}\,dt$ **d)** $\int \frac{3}{\sqrt[3]{r^2}}\,dr$ B

Grundlagen der Integralrechnung

Aufgaben 5.157 – 5.159: Berechne die bestimmten Integrale.

B **5.157** **a)** $\int_1^4 \left(\ln(2) - \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ **b)** $\int_{-3}^{-1} \left(1 + \frac{1}{3x^2} - 2x\right) dx$ **c)** $\int_0^1 (2x \cdot \sqrt[3]{x} - 2)\, dx$

B **5.158** **a)** $\int_0^{\pi} (2 \cdot \sin(t) - 4 \cdot \cos(t))\, dt$ **b)** $\int_0^1 \left(\frac{2}{1 + x^2} - \pi\right) dx$ **c)** $\int_0^2 (3 \cdot e^2 - 2 \cdot e^x)\, dx$

B **5.159** **a)** $\int_0^{\frac{\ell}{\sqrt{3}}} \left(\frac{q \cdot \ell}{6} - \frac{q \cdot x^2}{2 \cdot \ell}\right) dx$ **c)** $\int_{v_1}^{v_2} m \cdot v\, dv$ **e)** $\int_0^T a \cdot t\, dt$

b) $\int_0^h m \cdot g\, ds$ **d)** $\int_0^{\pi} a^{\varphi}\, d\varphi$ **f)** $\int_{t_1}^{t_2} (1 - e^{-\lambda \cdot t})dt$

ABC **5.160** Ein Ball wird zum Zeitpunkt t = 0 s aus einer Höhe $h_0 = h(0)$ fallen gelassen. Seine Momentangeschwindigkeit beträgt $v(t) = \frac{dh}{dt} = -g \cdot t$ ($g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$).

1) Gib die Höhe h(t) des Balls in Abhängigkeit von der Zeit t an. Welchem Wert entspricht die Integrationskonstante?

2) Berechne, nach wie viel Sekunden der Ball auf den Boden aufkommt, wenn er aus einer Höhe von $h_0 = 6$ m gefallen ist. Gib die Endgeschwindigkeit an.

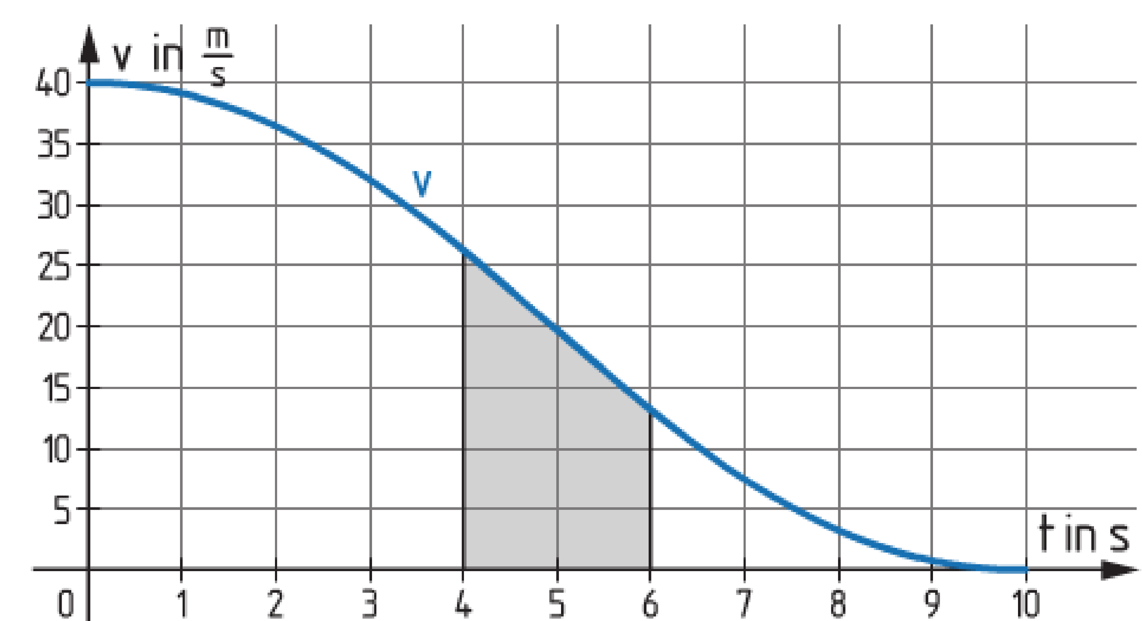
CD **5.161** Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in $\frac{m}{s}$.
Gib jeweils an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.
Begründe deine Antworten.

A) Der Gesamtweg beträgt mehr als 40 m.

B) Der Weg im Zeitraum $4\ s \leqslant t \leqslant 6\ s$ beträgt mehr als 30 m.

C) Das Fahrzeug bremst am Anfang am stärksten.

D) Mithilfe der Funktion v kann der zurückgelegte Weg berechnet werden.



Aufgaben 5.162 – 5.164: Ermittle die Integrale.

B **5.162** **a)** $\int e^{3t + 1}\, dt$ **c)** $\int \frac{s^2}{\sqrt{a + s^3}}\, ds$ **e)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$

b) $\int x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 2}\, dx$ **d)** $\int \varphi \cdot \cos(2\varphi^2)\, d\varphi$ **f)** $\int \frac{2t^2}{t^3 - 1}\, dt$

B **5.163** **a)** $\int (2t + \sin(3t + 1))\, dt$ **b)** $\int (2e^{\frac{t}{3}} - 1)\, dt$ **c)** $\int \left(\frac{2}{s + 1} - \frac{s}{s^2 + 3}\right) ds$

B **5.164** **a)** $\int u \cdot (u + 2)^5\, du$ **b)** $\int x \cdot \ln(x^2)\, dx$ **c)** $\int (t + 1) \cdot e^t\, dt$

B **5.165** Ermittle das unbestimmte Integral.

a) $\int \frac{5x - 7}{x^2 + 2x - 15}\, dx$ **b)** $\int \frac{-15}{x^2 + 3x - 4}\, dx$ **c)** $\int \frac{13x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}\, dx$

Aufgaben 5.166 – 5.168: Ermittle jeweils das Integral.

5.166 **a)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1 + \sin^2(t)}\,dt$ **b)** $\int_e^{e^2} \frac{(\ln(x))^2}{x}\,dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx$ B

5.167 **a)** $\int_0^4 x \cdot e^{2x}\,dx$ **b)** $\int_{-1}^1 x \cdot e^{x^2}\,dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cdot \sin(t)\,dt$ B

5.168 **a)** **1)** $\int \frac{1}{x - a}\,dx$ **2)** $\int \frac{1}{a - x}\,dx$ **3)** $\int \frac{x}{x - a}\,dx$ B

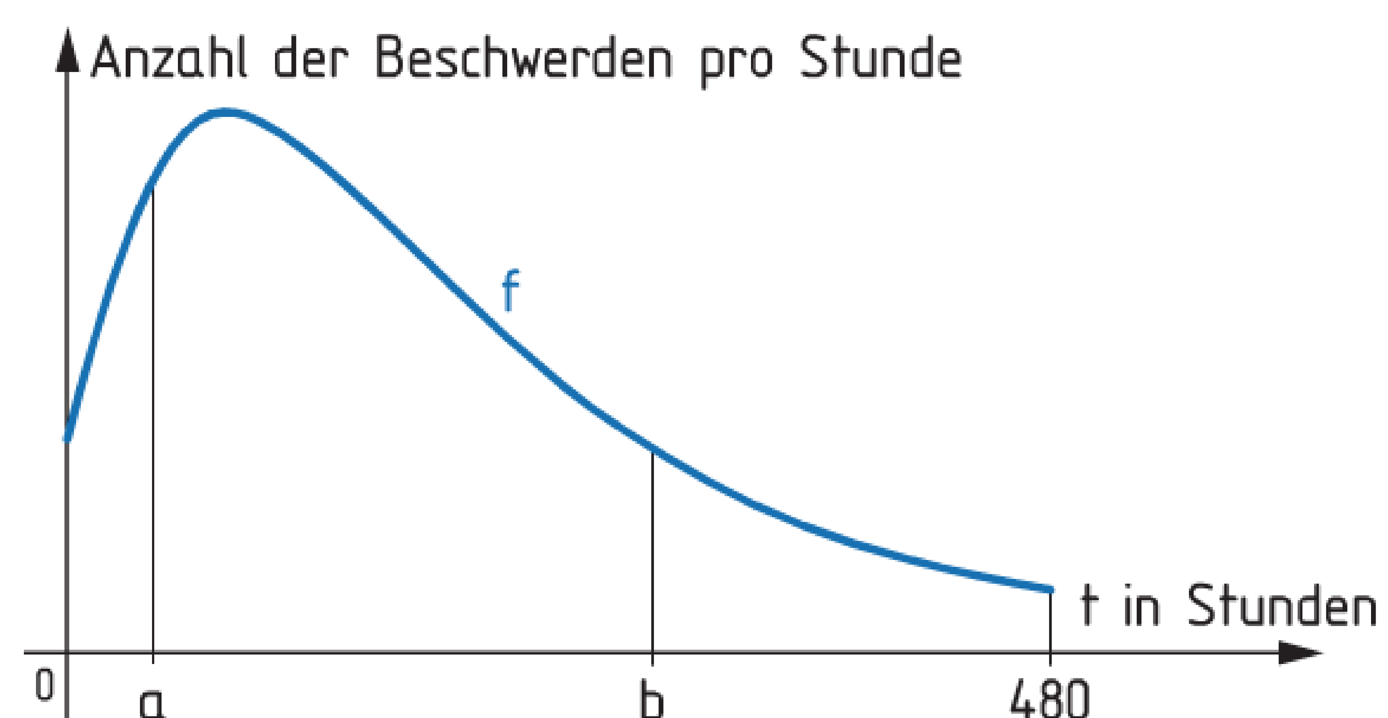
b) **1)** $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx$ **2)** $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx$ **3)** $\int \frac{x}{x^2 - a}\,dx$

5.169 Berechne das Integral. Wenn die Berechnung nicht möglich ist, begründe das. BD

a) $\int_1^{\infty} \frac{3}{r^2}\,dr$ **b)** $\int_{-3}^{3} \frac{3}{s^2}\,ds$ **c)** $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\,dx$ **d)** $\int_2^6 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$ **e)** $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x + 1}}\,dx$

5.170 **1)** Berechne $\int x^n \cdot e^x\,dx$ für n = 1 und n = 2 mittels partieller Integration. ABD
2) Berechne das Integral für n = 3, 4, 5 mithilfe von Technologieeinsatz.
3) Überlege anhand der Ergebnisse von **1)** und **2)** eine allgemeine Formel für $\int x^n \cdot e^x\,dx$ und beweise diese mittels vollständiger Induktion.

5.171 Eine Großbank hat für die ersten 20 Tage nach der Umstellung ihres Online-Portals einen rund um die Uhr besetzten Help-Desk eingerichtet. Die Anzahl der Beschwerden, abhängig von der Zeit t (in Tagen) nach Beginn der Umstellung kann durch die Funktion f beschrieben werden. ABC
1) Gib eine Formel für die Gesamtzahl der Beschwerden zwischen den Zeitpunkten a und b an.
2) Skizziere die Funktion, die die Gesamtzahl der eingegangenen Beschwerden, abhängig von der Zeit t, beschreibt.



5.172 Berechne die Laplace-Transformierte der ersten Ableitung $\mathcal{L}\{f'(t)\}$. B

5.173 Die NASA-Raumsonde Voyager 1 startete in den Weltraum, um Daten zu sammeln. Dazu musste sie das Schwerefeld der Erde verlassen. Die Kraft, die dazu notwendig ist, ergibt sich aus dem Gravitationsgesetz: AB

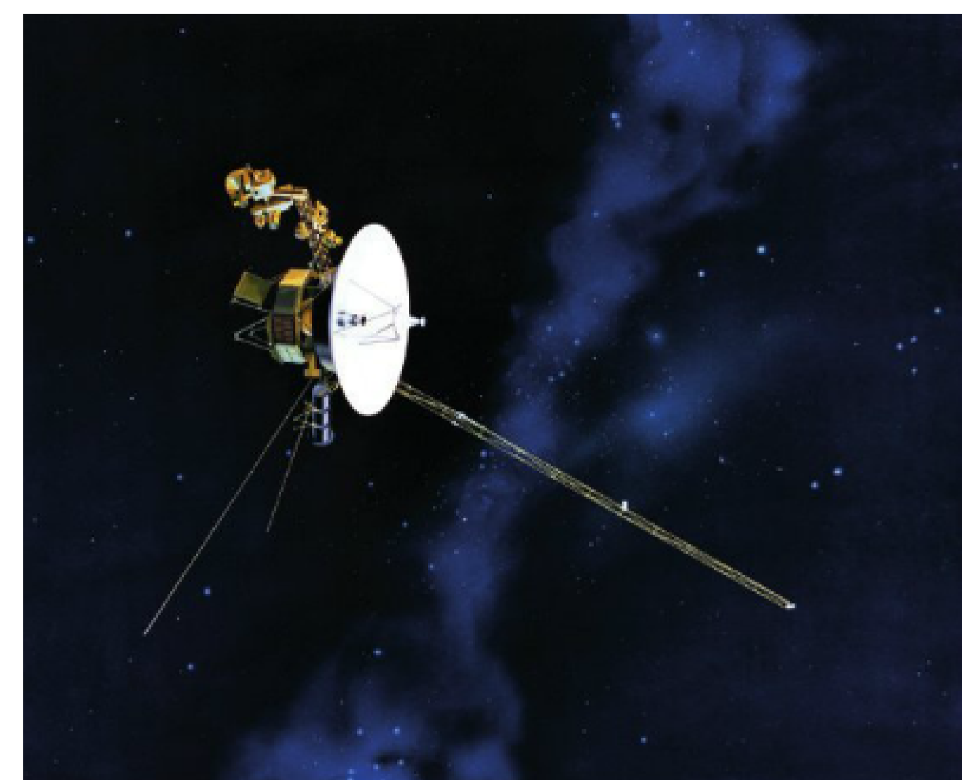
$F(r) = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$

r ... Abstand vom Erdmittelpunkt

$G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$, $M \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg,

$m \approx 825{,}5$ kg, $r_0 \approx 6{,}37 \cdot 10^6$ m

Berechne mithilfe des Integrals $W = \int_{r_0}^{\infty} F(r)\,dr$ die Arbeit, die notwendig war, um die Sonde aus dem Schwerefeld der Erde zu bringen.

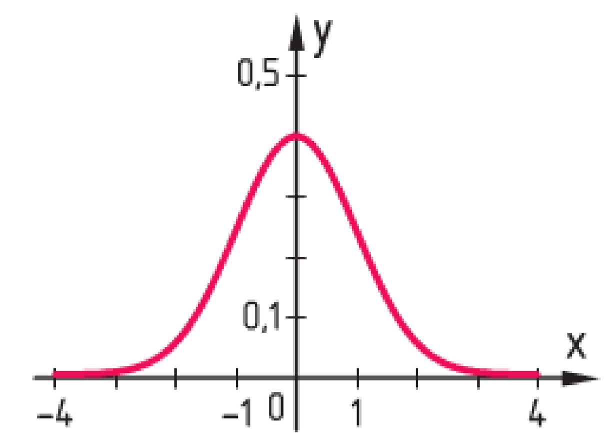


Grundlagen der Integralrechnung

BD **5.174** In der Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt die so genannte **Gauß'sche Glockenkurve** eine wichtige Rolle.

Ihre Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Zeige, dass der Flächeninhalt zwischen der Kurve und der x-Achse 1 ist, das heißt $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$ (siehe Seite 212).



Aufgaben in englischer Sprache

antidifferentiation, integration	Integration	integration by parts	partielle Integration
antiderivative, primitive integral	Stammfunktion, unbestimmtes Integral	limits of integration	Integrationsgrenzen
improper integral	uneigentliches Integral	partial fraction decomposition/ expansion	Partialbruch-zerlegung
indefinite/definite integral	unbestimmtes/ bestimmtes Integral	substitution	Substitution
integral calculus	Integralrechnung	upper/lower sum	Ober-/Untersumme

AB **5.175** Approximate the area beneath the curve $f(x) = x^2 + 1$ on the interval [0; 3] using **1)** upper sums, **2)** lower sums, with four rectangles.

BD **5.176** Use substitution to prove that the integral of tan(x) is equal to $-\ln(|\cos(x)|) + C$.

B **5.177** Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x) \cdot \tan(x)\,dx$. $\left(\text{Hint: } \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}\right)$

ABC **5.178** In the book *The Fellowship of the Ring* by J. R. R. Tolkien, a young hobbit named Frodo embarks on an exiting adventure to destroy the One Ring in the fires of Mount Doom. Frodo's velocity in the first 4 days of the journey can be estimated by the following map:



$v(t) = -15.5t^3 + 86.25t^2 - 117.25t + 48.75$

v … velocity in miles per day, t … time in days

1) Create a graph first to check if the direction of Frodo's movement has changed.

2) Calculate how far from home Frodo is on the end of the 4th day of his journey.

3) How far did he walk?

B **5.179** Find the solution by applying integration by parts twice: $\int (t - 1)^2 \cdot e^{-t}\,dt$

AB **5.180** The energy E, required to separate two charged particles, originally a distance a apart, to distance b, is given by the integral $E = \int_a^b \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2}\,dr$

where q_1 and q_2 are the magnitudes of the charges and $k = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2}$ is a constant.

A hydrogen atom consists of a proton and an electron with opposite charges of magnitude $1.6 \cdot 10^{-19}$ coulombs. Find the energy required to take a hydrogen atom apart (that is to move the electron from its orbit to an infinite distance from the proton). Assume, the initial distance between the electron and the proton is the Bohr radius $r_B = 5.3 \cdot 10^{-11}$ m.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann die Begriffe Stammfunktion, unbestimmtes und bestimmtes Integral erklären und kenne deren Bedeutung.	
2	Zu welcher der dargestellten Funktionen ist F eine Stammfunktion? A) B) C)	
3	Welche Aussagen sind für alle Stammfunktionen F von f erfüllt? A) $F(x) > 0$ für $x \in [x_1; x_2]$ B) $F(x_2) > F(x_1)$ C) $F(x_4) < F(x_3)$ D) $F(x)$ ist steigend für $x \in [x_1; x_4]$	
4	Setze richtig fort: Ist f(x) eine Polynomfunktion vom Grad n, so ist die Stammfunktion F(x) eine ...	
5	Berechne das Integral: $\int\left(7x^3 + \sqrt{7x} + \frac{1}{7x}\right) dx$	
6	Berechne das Integral $\int x \cdot \sqrt{x+1}\ dx$ ***1)*** mithilfe von Substitution. ***2)*** mithilfe von partieller Integration.	
7	Ich kann den Begriff uneigentliches Integral erklären.	
8	Ermittle, ob die Integrale konvergent oder divergent sind. ***1)*** $\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, dt$ ***2)*** $\int_0^{2} \frac{1}{x-1}\, dx$	
9	Ist der angegebene Ansatz zur Partialbruchzerlegung richtig? Begründe deine Antwort. $\frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x+1}$	

Lösung:
1) siehe Seiten 172ff.; 2) B; 3) B, D; 4) … Polynomfunktion vom Grad (n + 1)
5) $\frac{7x^4}{4} + \frac{2 \cdot x \cdot \sqrt{7x}}{3} + \frac{\ln(|x|)}{7} + C$; 6) $\frac{2 \cdot \sqrt{(x+1)^3} \cdot (3x-2)}{15}$; 7) siehe Seiten 210ff.; 8) 1) 2, daher konvergent;
2) ∞, daher divergent; 9) Nein, weil auch der Teilbruch mit dem Nenner x zu berücksichtigen ist.

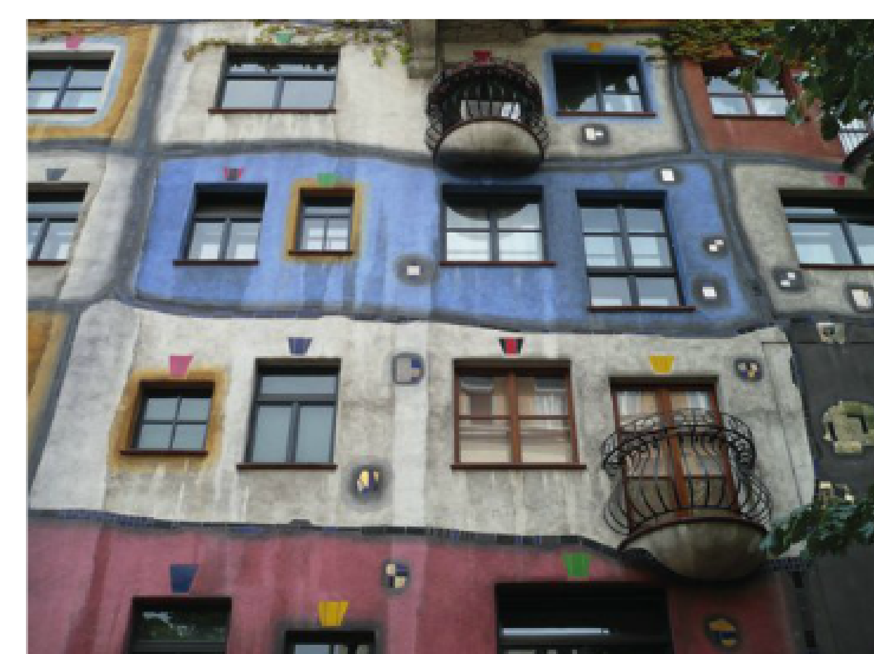
6 Anwendungen der Integralrechnung



In Abschnitt 5 wurden verschiedene Regeln und Methoden gezeigt, um zu einer gegebenen Funktion die Stammfunktion zu ermitteln. Nun soll dieses Wissen praktisch angewendet werden. Das Integrieren entspricht der Berechnung von Produktsummen. Daher können zum Beispiel Volumen von Körpern berechnet werden, indem sie in Schichten zerlegt und diese anschließend mithilfe der Integralrechnung aufsummiert werden. In Naturwissenschaft und Technik verwendet man die Integralrechnung, um kontinuierliche Vorgänge und bestimmte Größen ermitteln zu können. Auch bei wirtschaftlichen Anwendungen ist die Integralrechnung von Bedeutung.

6.1 Flächenberechnungen

Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen



In Abschnitt 5.2.3 wurde das bestimmte Integral als orientierter Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall [a; b] eingeführt. Je nach Lage des Funktionsgraphen zur x-Achse kann das bestimmte Integral auch negativ sein. Nun sollen der Flächeninhalt zwischen einer beliebig liegenden Kurve und einer Koordinatenachse sowie der Inhalt der Fläche, die von zwei Kurven eingeschlossen wird, berechnet werden.

ABCD

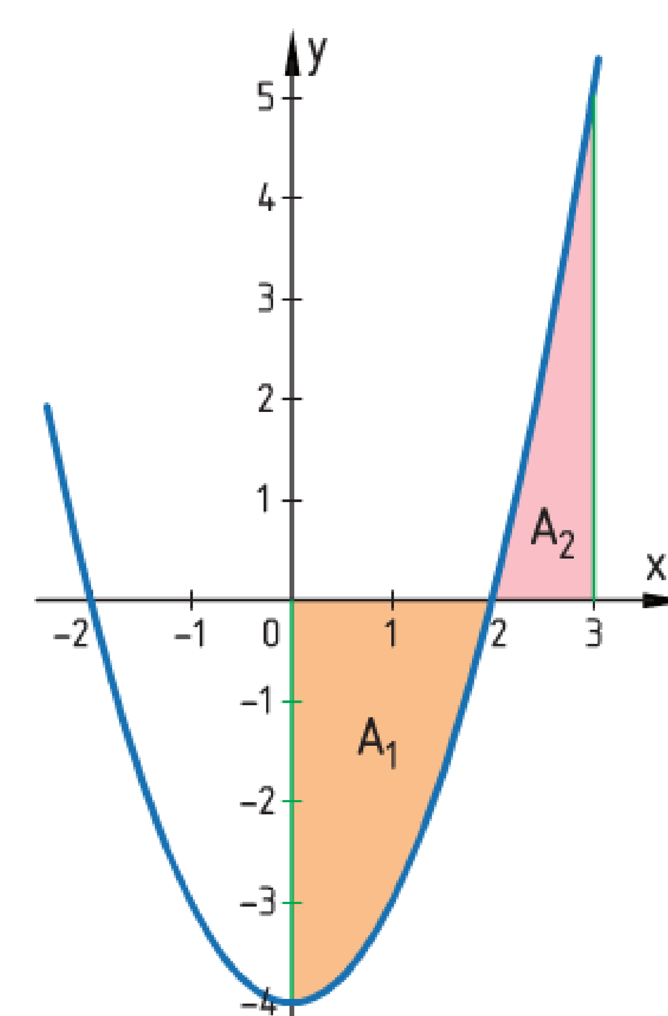
6.1 Die Gerade $y = x - 2$ schließt mit der x-Achse und den Senkrechten $x = 0$ und $x = 4$ eine Fläche ein.

1) Fertige eine Zeichnung an und ermittle den Flächeninhalt elementar.

2) Berechne den Flächeninhalt mithilfe der Integralrechnung. Erkläre, worauf dabei geachtet werden muss.

Hat eine Funktion im Integrationsbereich sowohl positive als auch negative Funktionswerte, so muss das Intervall zur Berechnung des Flächeninhalts an den Nullstellen geteilt werden. Liegt ein Funktionsgraph unterhalb der x-Achse, so ist der Wert des bestimmten Integrals negativ, der Flächeninhalt entspricht dem Betrag dieses Werts.

Die Flächeninhalte werden durch stückweises Integrieren getrennt berechnet und anschließend addiert.



ZB: $y = x^2 - 4$, $I = [0; 3]$

Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

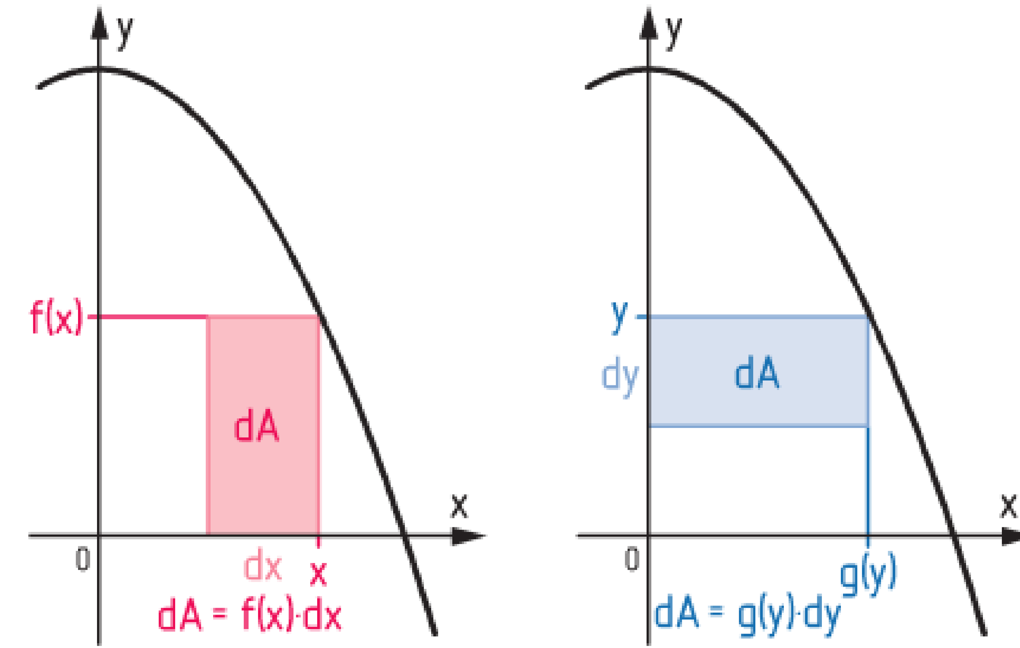
Die Kurve liegt in [0; 2] unterhalb der x-Achse (vgl. Skizze), daher ist der Flächeninhalt der Betrag des bestimmten Integrals.

$$A_1 = \left|\int_0^2 (x^2 - 4)\,dx\right| = \left|-\tfrac{16}{3}\right| = \tfrac{16}{3}\,E^2$$

$$A_2 = \int_2^3 (x^2 - 4)\,dx = \tfrac{7}{3}\,E^2$$

$$A = A_1 + A_2 = \tfrac{23}{3}\,E^2 \approx 7{,}7\,E^2$$

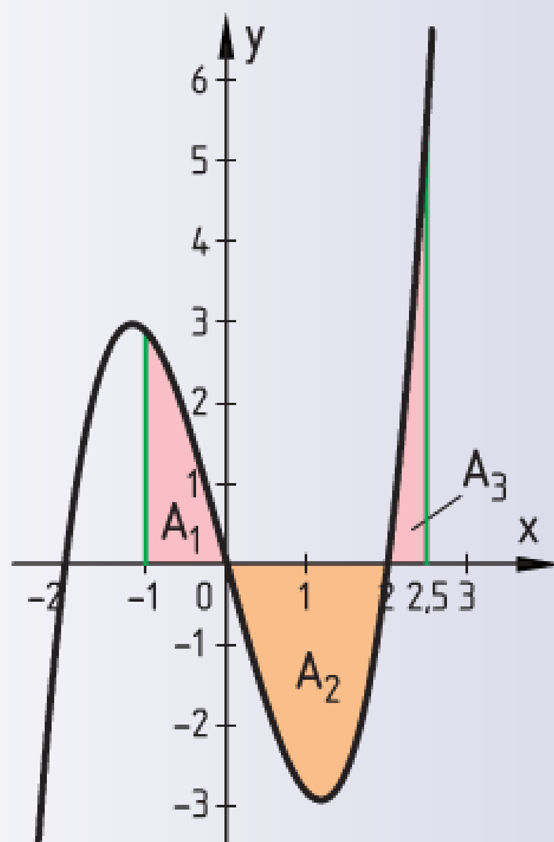
Der Berechnung des Inhalts einer Fläche liegt immer die Idee der Unterteilung in schmale Rechtecke zugrunde. Diese haben zum Beispiel die Teilflächen $dA = f(x) \cdot dx$ oder $dA = g(y) \cdot dy$ und werden als **Flächenelemente** bezeichnet. Der gesamte Flächeninhalt ist die Summe aller Flächenelemente. Symbolisch wird dies in der Form $A = \int\limits_A dA$ dargestellt.



6.2 Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Kurve $y = x^3 - 4x$, der x-Achse und den Senkrechten $x = -1$ und $x = 2{,}5$ eingeschlossen wird. Beschreibe deine Vorgehensweise.

BC

Lösung:



Ich zeichne den Graphen der Funktion und berechne die Nullstellen:

$y = 0: \quad x^3 - 4x = 0$

$x \cdot (x^2 - 4) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

Der Graph schneidet die x-Achse dreimal. Zwei der Nullstellen liegen innerhalb des gegebenen Bereichs. Daher teile ich die Fläche in drei Teilflächen. Die Nullstelle $x_1 = -2$ liegt nicht im angegebenen Bereich und muss daher nicht berücksichtigt werden.

Nun ermittle ich die Flächeninhalte der Teilflächen A_1, A_2 und A_3 durch Integrieren.

$$A_1 = \int_{-1}^{0}(x^3 - 4x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - 4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - 2\right) = 1{,}75\ E^2$$

$$A_2 = \left|\int_{0}^{2}(x^3 - 4x)\,dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right| = |4 - 8| = 4\ E^2$$

$$A_3 = \int_{2}^{2,5}(x^3 - 4x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Big|_{2}^{2,5} =$$

$$= \left(\frac{39{,}0625}{4} - 2\cdot\frac{25}{4}\right) - (4 - 8) = 1{,}265...\ E^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 7{,}015...\ E^2 \approx 7{,}02\ E^2$$

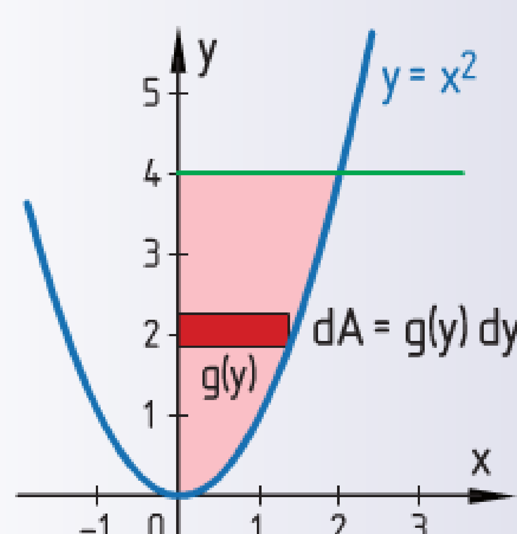
Die Teilfläche A_2 liegt unterhalb der x-Achse, daher ist ihr Flächeninhalt der Betrag des bestimmten Integrals.

Ich addiere die Flächeninhalte und erhalte für den gesamten Flächeninhalt $A \approx 7{,}02\ E^2$.

6.3 Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $y = x^2$, $x \geqslant 0$, der y-Achse und der Waagrechten $y = 4$ eingeschlossen wird. Verwende dabei waagrechte Flächenelemente.

AB

Lösung:



$y = x^2 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{y}$

$g(y) = \sqrt{y}$

$A = \int\limits_A dA$ mit $dA = \sqrt{y}\;dy$

$$A = \int_0^4 \sqrt{y}\;dy = \frac{2}{3}\cdot y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 =$$

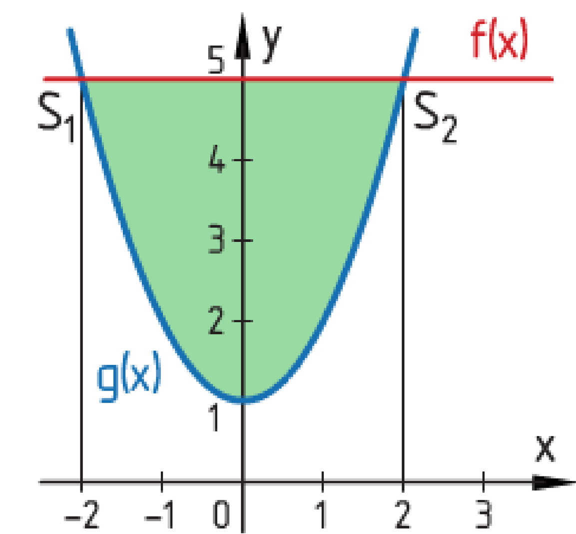
$$= \frac{2}{3}\cdot(\sqrt{64} - 0) = \frac{16}{3}\ E^2$$

- Man verwendet waagrechte Flächenelemente, berechnet also die Fläche zwischen der Kurve und der y-Achse.
- Die Integrationsgrenzen sind die y-Werte 0 und 4.

Anwendungen der Integralrechnung

Eine Fläche muss nicht immer von einer Kurve und einer Achse begrenzt sein. Die Randkurven können auch beliebige Funktionsgraphen sein.

Zum Beispiel soll der Inhalt der Fläche berechnet werden, die von den Graphen der Funktionen **f(x) = 5** und $\mathbf{g(x) = x^2 + 1}$ eingeschlossen wird. Anhand der Zeichnung sieht man, dass sich die Kurven in zwei Punkten S_1 und S_2 schneiden, die x-Koordinaten der Schnittpunkte sind die Integrationsgrenzen. Den Flächeninhalt erhält man, indem man von der Fläche zwischen der **oberen** Kurve und der x-Achse die Fläche zwischen der **unteren** Kurve und der x-Achse **abzieht**.

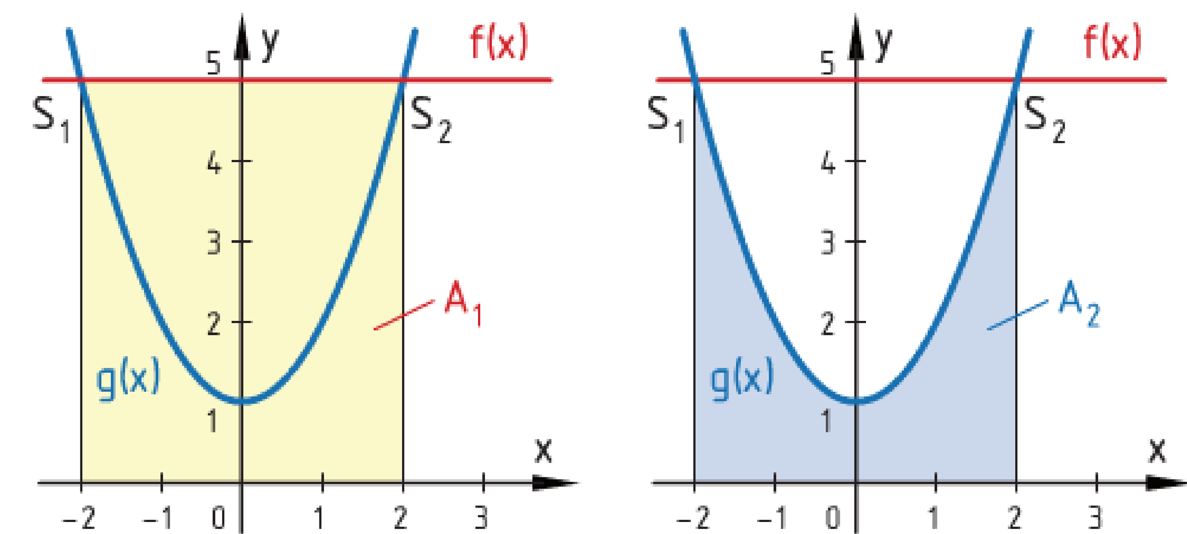


Die Schnittpunkte der Funktionsgraphen liegen an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$, daraus ergeben sich die Integrationsgrenzen.

$$A_1 = \int_{-2}^{2} 5\,dx = 20\ E^2$$

$$A_2 = \int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\,dx = \frac{28}{3}\ E^2$$

$$A = A_1 - A_2 = \frac{32}{3} \approx 10{,}67\ E^2$$



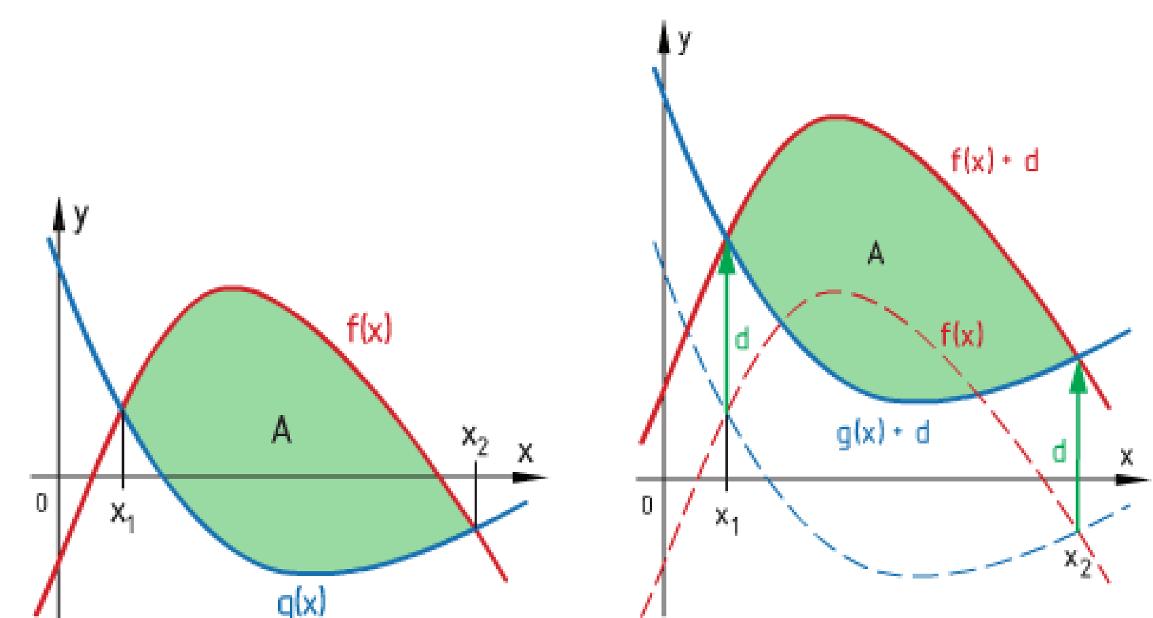
Diese Rechnung kann aufgrund der Summenregel zu einem Integral zusammengefasst werden:

$$A = A_1 - A_2 = \int_{-2}^{2} 5\,dx - \int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\,dx = \int_{-2}^{2} [5 - (x^2 + 1)]\,dx$$

Allgemein gilt für den Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen:

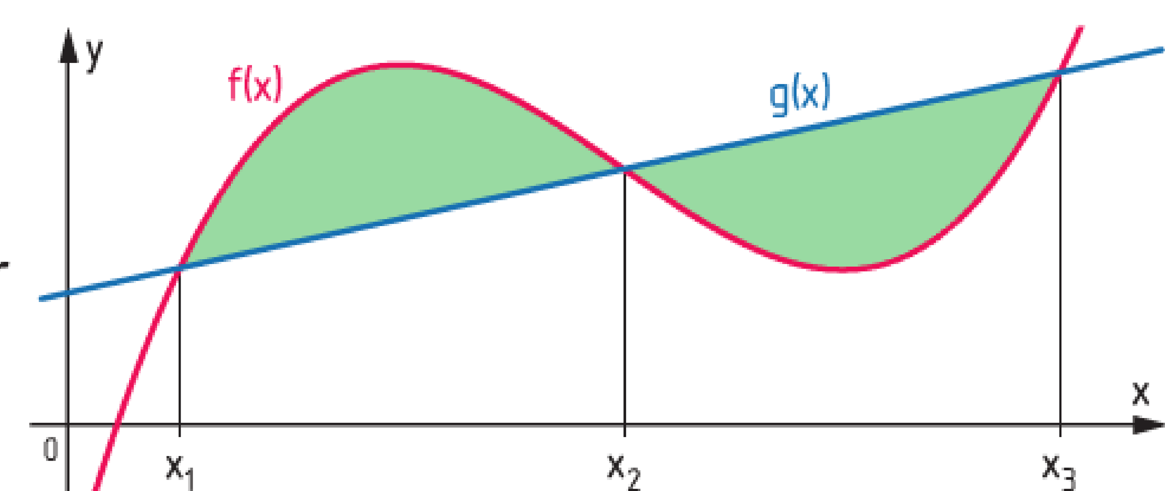
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Diese Formel ist unabhängig davon, wie die beiden Kurven zur x-Achse liegen, solange f(x) im gesamten Intervall oberhalb von g(x) liegt. Man kann überlegen, dass die Fläche gleich bleibt, wenn man die beiden Funktionsgraphen um denselben Wert d nach oben schiebt. Setzt man in die Formel ein, so ergibt sich:



$$A = \int_a^b [f(x) + d - (g(x) + d)]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Liegt der Graph von f(x) nicht im gesamten Integrationsintervall oberhalb von jenem von g(x), so wird das Intervall an den x-Werten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen geteilt. Der Flächeninhalt wird dann stückweise berechnet.



Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $y_1 = f(x)$ und $y_2 = g(x)$

Gilt $f(x) \geqslant g(x)$ im Intervall [a; b], so kann der Flächeninhalt A, der von beiden Kurven in [a; b] eingeschlossen wird, als bestimmtes Integral der Differenz der Funktionen berechnet werden.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

B



6.4 Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Kurven $f(x) = x^3 - 4x + 4$ und $g(x) = 3x - 2$ und der Geraden $x = -1$ begrenzt wird.

Lösung:
Schnittpunkte: $f(x) = g(x)$

$x^3 - 4x + 4 = 3x - 2$ — • Lösen der Gleichung

$x_1 = -3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$

$S_1(-3|-11),\ S_2(1|1),\ S_3(2|4)$ — • Der Schnittpunkt S_1 muss nicht berücksichtigt werden.

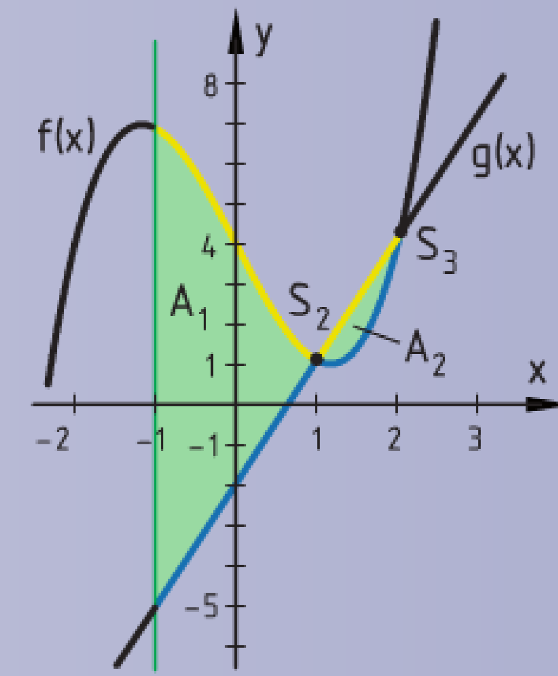
$A_1 = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]\,dx =$ — • Im Intervall $[-1; 1]$ liegt der Graph von f(x) oberhalb des Graphen von g(x).

$= \int_{-1}^{1} (x^3 - 7x + 6)\,dx = 12\ E^2$

$A_2 = \int_{1}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx =$ — • Im Intervall $[1; 2]$ liegt der Graph von g(x) oberhalb des Graphen von f(x).

$= \int_{1}^{2} (-x^3 + 7x - 6)\,dx = \frac{3}{4}\ E^2$

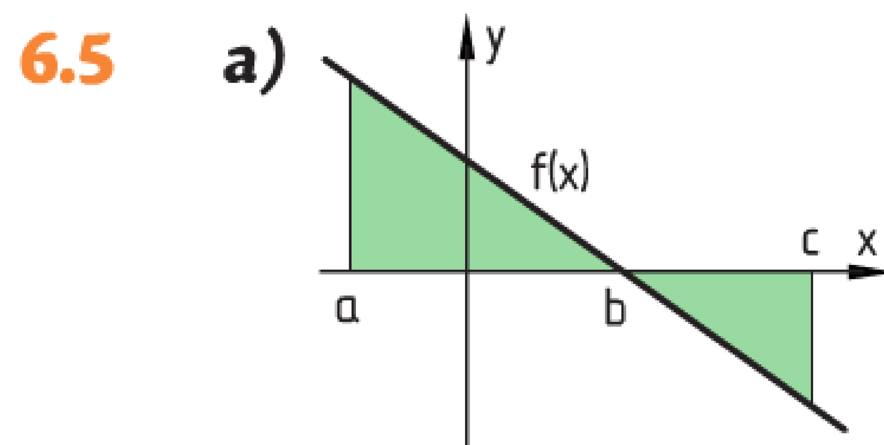
$A = A_1 + A_2 = 12{,}75\ E^2$



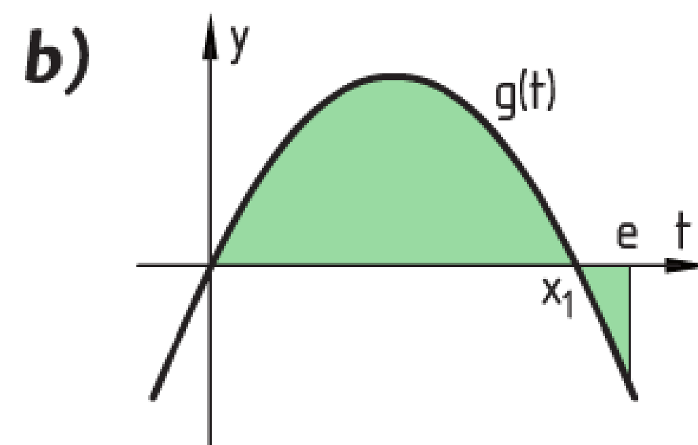
Aufgaben 6.5 – 6.6: Gib die Inhalte der dargestellten Flächen als bestimmte Integrale an.

6.5 AC

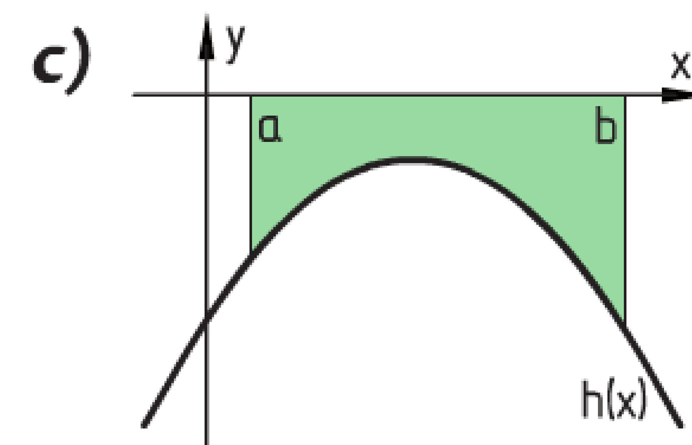
a)



b)

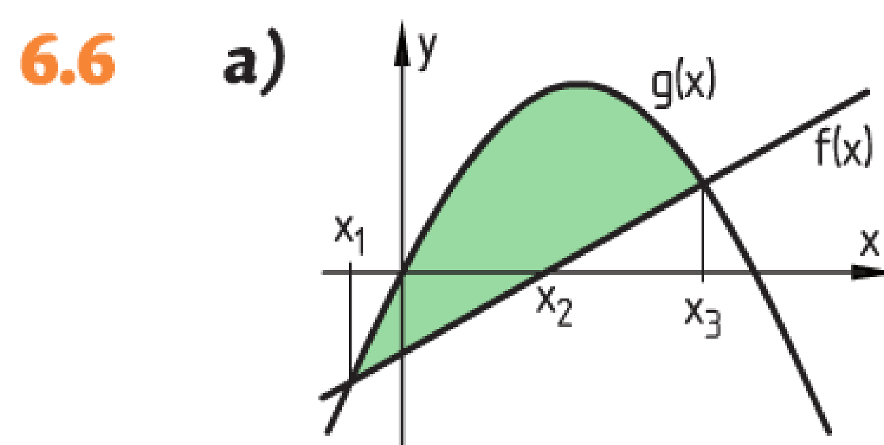


c)

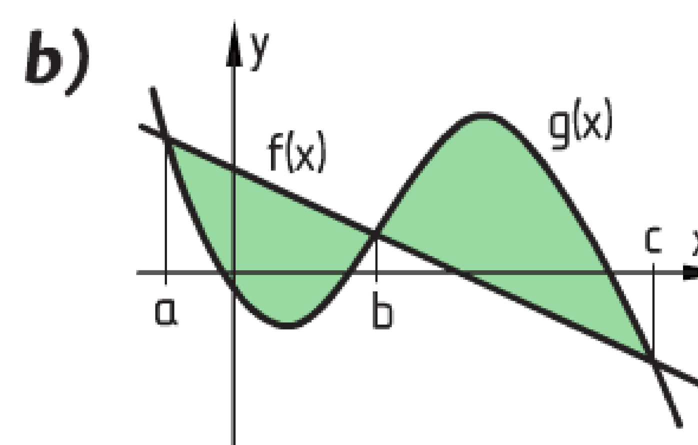


6.6 AC

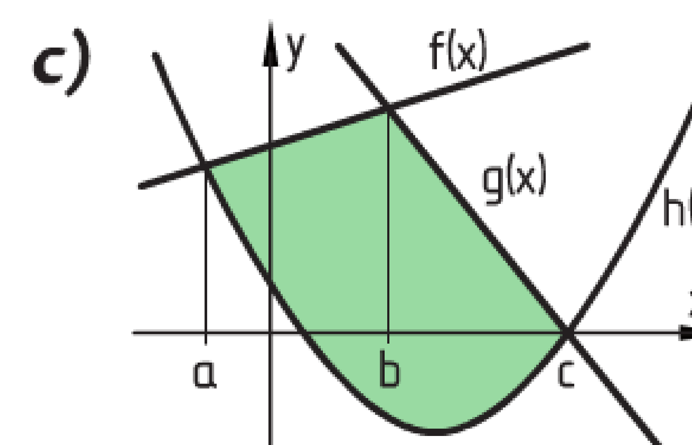
a)



b)



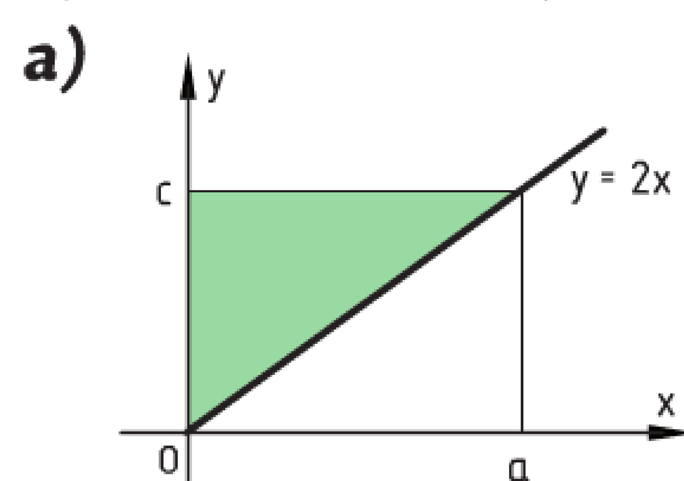
c)



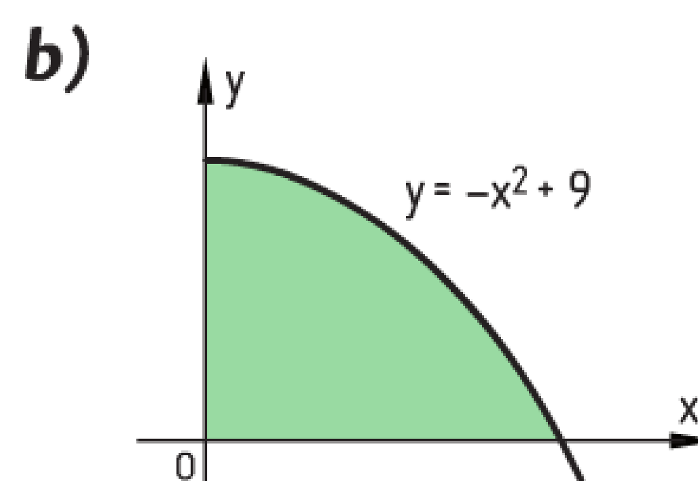
6.7 AC

Gib den Inhalt der dargestellten Fläche als Integral mithilfe von ***1)*** senkrechten, ***2)*** waagrechten Flächenelementen an.

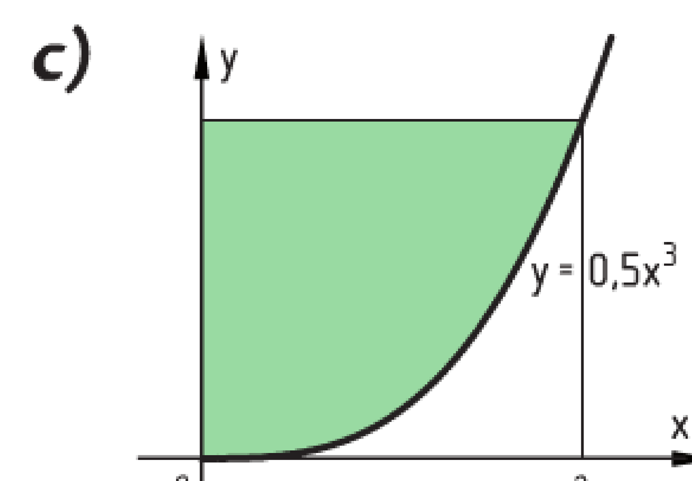
a)



b)



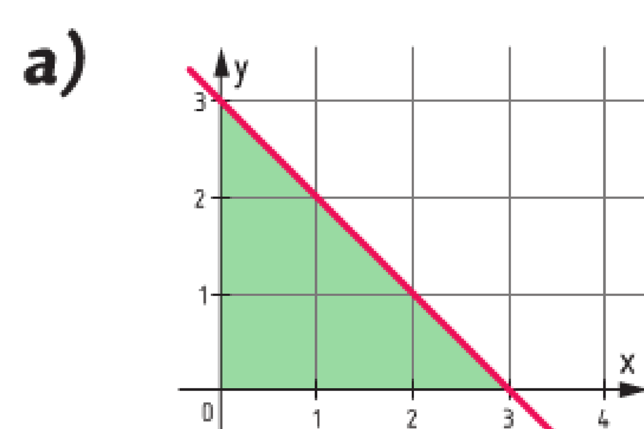
c)



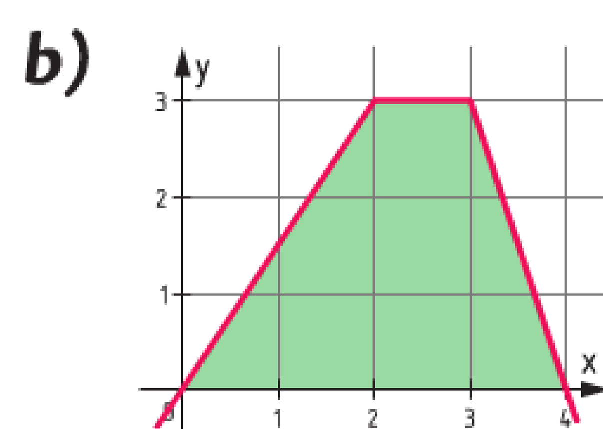
6.8 ABCD

Ermittle den Inhalt der markierten Fläche ***1)*** mithilfe von Integration, ***2)*** elementar. Beurteile anschließend den jeweils benötigten Rechenaufwand.

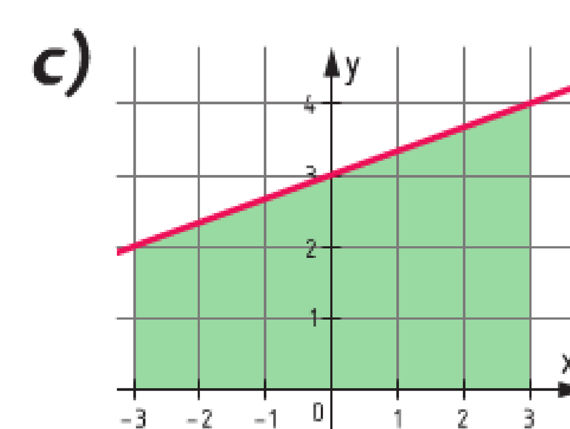
a)



b)



c)



Anwendungen der Integralrechnung

Flächenberechnungen, die grundlegende Integrationsregeln erfordern

Aufgaben 6.9 – 6.12: Berechne jeweils den Inhalt der Fläche, die vom Funktionsgraphen $y = f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

B **6.9** **a)** $f(x) = x^2 + 3x,\ a = -2, b = 1$
b) $f(x) = x^3 - 1,\ a = -1, b = 2$
c) $f(x) = x^3 - x,\ a = -2, b = 2$
d) $f(x) = x^2 + 6x + 5,\ a = -4, b = 0$
e) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x,\ a = -1, b = 4$
f) $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 2x,\ a = 1, b = 3$

B **6.10** **a)** $f(x) = \frac{1}{x} - 1,\ a = \frac{1}{2}, b = 2$
b) $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1,\ a = \frac{1}{2}, b = 1$
c) $f(x) = \sqrt{x} - 2,\ a = 1, b = 9$
d) $f(x) = 2e^x - 2,\ a = -1, b = 1$

B **6.11** **a)** $f(x) = \cos(x),\ a = 0, b = 2\pi$
b) $f(x) = \sin(x),\ a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{3\pi}{2}$

B **6.12** **a)** $f(x) = \frac{1}{1 + x^2},\ a = -1, b = 1$
b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

Aufgaben 6.13 – 6.19: Berechne jeweils den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der gegebenen Funktionen eingeschlossen wird.

B **6.13** **a)** $f_1(x) = 2x^2 - 2x - 3,\ f_2(x) = -4x + 1$
b) $f_1(x) = -2x + 1,\ f_2(x) = 3x^2 - 3x - 1$

B **6.14** **a)** $f(t) = -t^2 + 2t + 4,\ g(t) = (t - 2)^2$
b) $f_1(x) = 2x^2,\ f_2(x) = 0{,}5x^2 + 6$

B **6.15** **a)** $f(x) = x^3 - 4x + 2,\ g(x) = 3x - 4$
b) $g(t) = -t^3 + 2t + 4,\ h(t) = -2t + 4$

B **6.16** **a)** $y_1(x) = x^3,\ y_2(x) = 3x^2 + x - 3$
b) $f(x) = x^3,\ g(x) = -2x^2 + 3x$

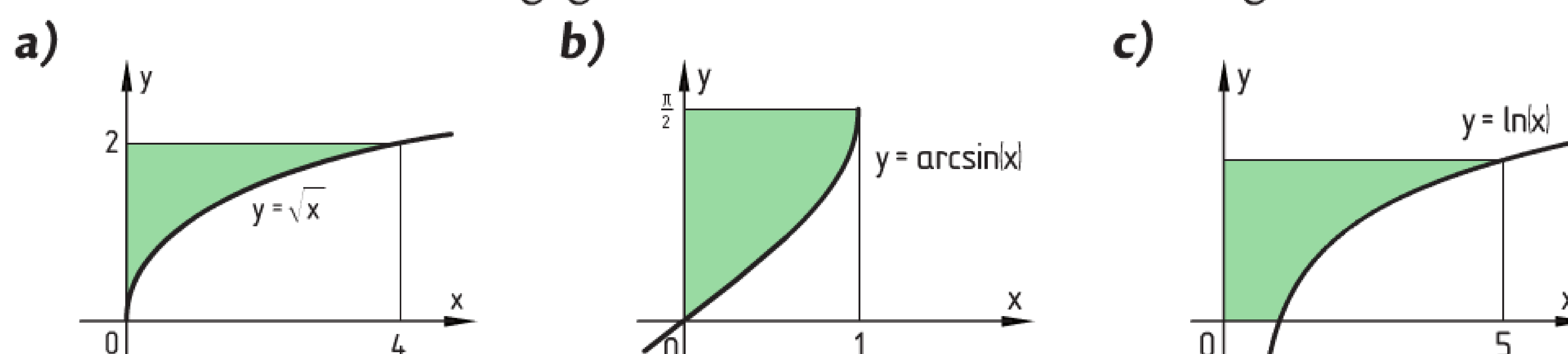
B **6.17** **a)** $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = \sqrt{x}$
b) $f_1(x) = 0{,}5x,\ f_2(x) = \sqrt{x}$

B **6.18** **a)** $f(x) = \frac{2}{x^2},\ g(x) = -x^2 + 3$
b) $f(x) = \frac{1}{x^3},\ g(x) = -\frac{7}{8} \cdot x + \frac{15}{8}$

B **6.19** **a)** $f(x) = \sin(x),\ g(x) = \cos(x),\ x \in [0; 2\pi]$
b) $f(x) = \cos(x),\ g(x) = 0{,}5,\ x \in [0; \pi]$

AB **6.20** Berechne den Inhalt der gegebenen Fläche mithilfe von waagrechten Flächenelementen.

a) **b)** **c)**



ABC **6.21** Der Flächeninhalt zwischen dem Funktionsgraphen $y = e^x$, der x-Achse, der y-Achse und der senkrechten Geraden $x = b$ beträgt $4\ E^2$. Berechne b und beschreibe deine Vorgehensweise.

AB **6.22** Die Fläche zwischen der Sinuskurve und der waagrechten Achse im Bereich $[0; \pi]$ soll durch eine senkrechte Gerade im Verhältnis 3 : 4 geteilt werden. An welcher Stelle liegt die Gerade?

AB **6.23** Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, der Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt $P(3|y_P)$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

AB **6.24** Eine Polynomfunktion 3. Grads hat den Hochpunkt $H(3|5)$ und den Wendepunkt $W(4|4)$.
a) Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse von $x = 2$ bis zur x-Koordinate des Tiefpunkts?
b) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der Tangente in $P(6|y_P)$.

6.25 Eine Polynomfunktion 3. Grads berührt die x-Achse im Ursprung und hat den Hochpunkt $H(2|\frac{4}{3})$. AB

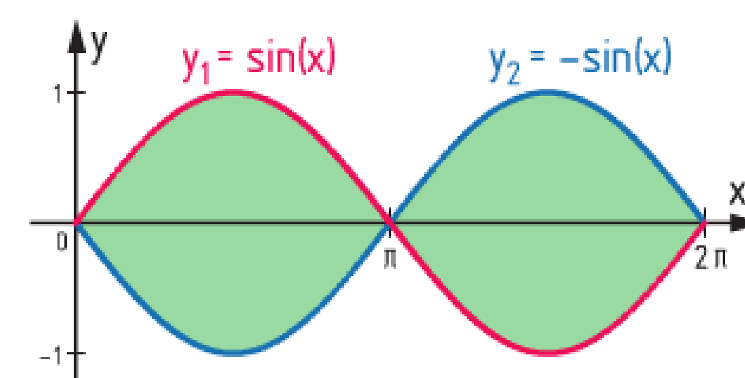
1) Ermittle die Nullstellen x_1 und x_2 sowie die Gleichung der Wendetangente.

2) Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Wendetangente, der Kurve und den Senkrechten bei x_1 und x_2 eingeschlossen wird.

6.26 Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen einer quadratischen Funktion und der x-Achse im Intervall [0; 3] beträgt 20 E^2. Der Funktionsgraph hat in $T(2|4)$ einen Tiefpunkt. Gib die Funktionsgleichung an. AB

6.27 Eine Polynomfunktion 4. Grads hat im Ursprung einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente und schneidet die x-Achse an der Stelle x = 5. Der Flächeninhalt, den die Kurve mit der x-Achse einschließt, beträgt 31,25 E^2. Ermittle die beiden möglichen Funktionsgleichungen. ABC

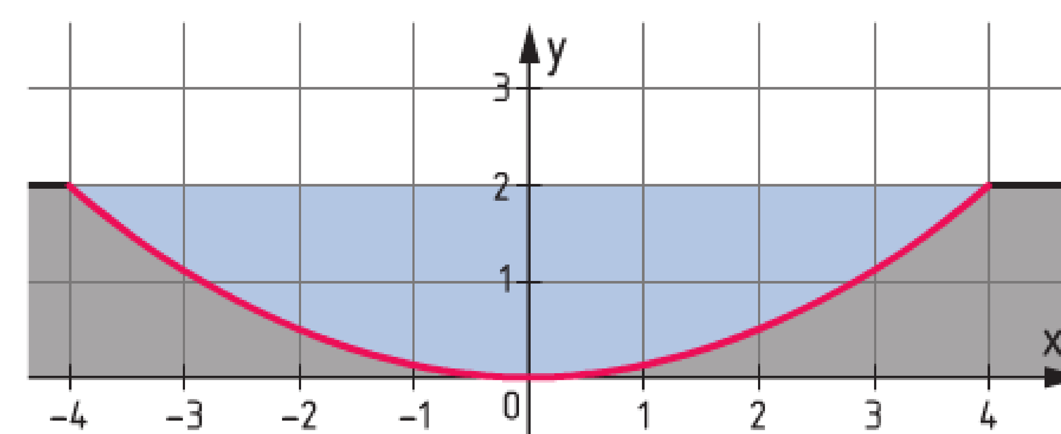
6.28 Bei einer Schularbeit war die Berechnung des Inhalts der farbig unterlegten Fläche gefragt. Beim Korrigieren der Arbeiten fand der Lehrer verschiedene Lösungsansätze vor. D



Erkläre, welche der Ansätze richtig sind und welcher Fehler beim falschen Ansatz gemacht wurde.

A) $A = 4 \cdot \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ **B)** $A = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$ **C)** $A = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx - 2 \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx$

6.29 Der Querschnitt eines 1,6 km langen, geradlinig verlaufenden Kanals hat die Form einer Parabel (siehe Abbildung, Angaben in Meter). ABCD



1) Ermittle die Funktionsgleichung der Parabel.

2) Wie viel m^3 Wasser fasst der Kanal, wenn das Wasser bis zum Rand steht?

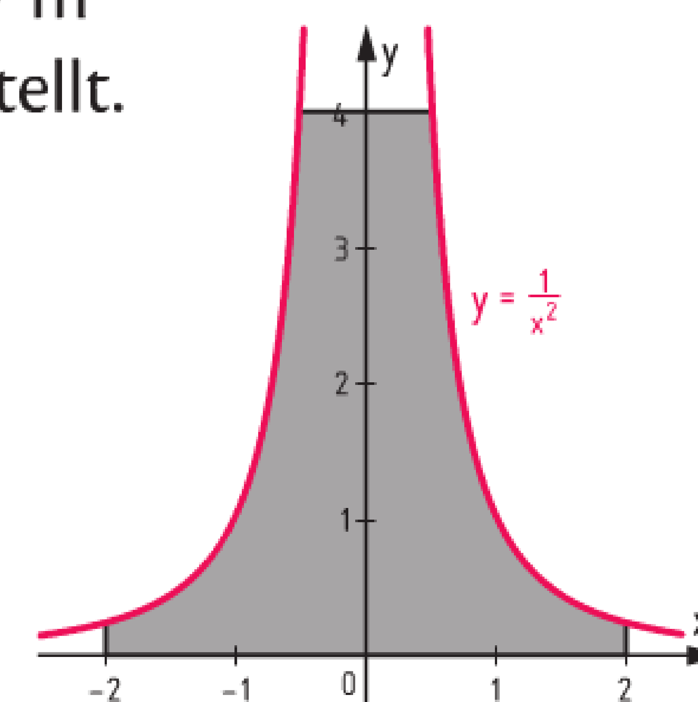
3) Welche der folgenden Schätzungen gibt an, wie viel Prozent der maximalen Wassermenge sich im Kanal befindet, wenn er nur bis zur halben Höhe gefüllt ist:

A) ungefähr 25 % **B)** ungefähr 35 % **C)** ungefähr 55 % **D)** ungefähr 75 %

Überprüfe deine Antwort mithilfe einer Rechnung.

4) Berechne, wie hoch das Wasser im Kanal steht, wenn er mit 80 000 Hektoliter Wasser gefüllt ist.

6.30 Bei Asphaltierungsarbeiten werden auf einer Autobahn 0,7 m lange Betonklötze zur Abtrennung der Fahrbahnen aufgestellt. Die Klötze haben den in der Abbildung dargestellten Querschnitt (Angaben in dm). ABC



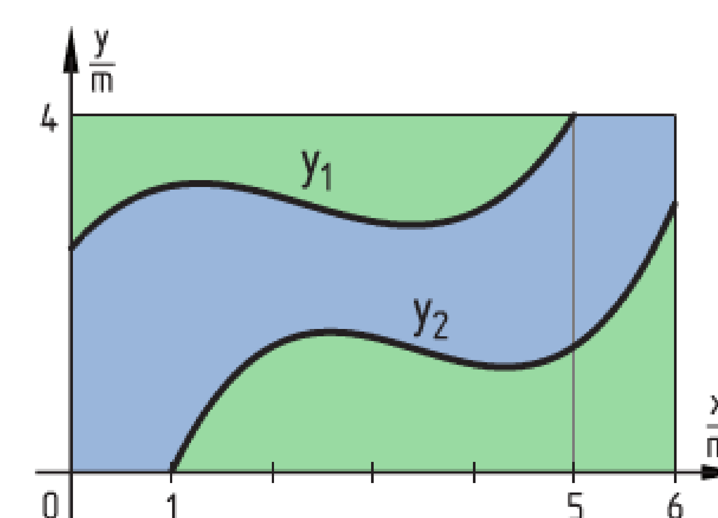
1) Berechne die Querschnittsfläche der Betonklötze. Entnimm die Abmessungen aus der Abbildung.

2) 1 m^3 der zum Guss verwendeten Betonmischung hat eine Masse von 3,1 Tonnen. Berechne die Masse eines Betonklotzes.

3) Die Querschnittsfläche eines weiteren Typs von Trennklötzen mit der gleichen Länge und der gleichen unteren Breite hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Vergleiche beide Abtrennungstypen hinsichtlich des Materialaufwands bei der Herstellung.

Anwendungen der Integralrechnung

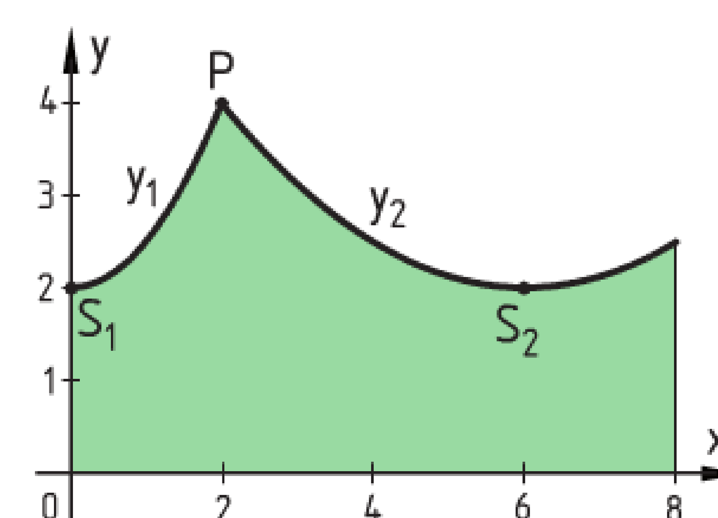
ABC **6.31** Die dargestellte Hauswand soll in zwei Farben gestrichen werden (siehe Abbildung). Die Formen der Begrenzungen werden durch die Graphen der Funktionen
$y_1(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 1{,}3x + a$ und
$y_2(x) = 0{,}15x^3 - 1{,}55x^2 + 5x + b$ beschrieben.



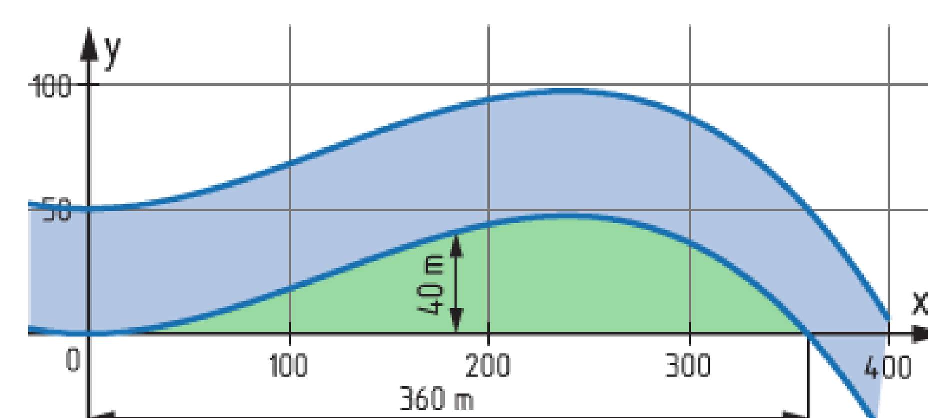
1) Ermittle die fehlenden Parameter a und b mithilfe der angegebenen Werte in der Abbildung.

2) Berechne, wie viel Liter von jeder Farbe mindestens benötigt werden, wenn man mit einem Verbrauch von einem Liter pro Quadratmeter rechnet.

ABC **6.32** In Gärten von Schlössern werden die Rasenflächen und Blumenbeete kunstvoll angelegt. Eine Hälfte einer zur x-Achse symmetrischen Rasenfläche ist dargestellt (Angaben in Meter). Sie wird unter anderem von zwei quadratischen Funktionen begrenzt. Die erste hat in $S_1(0|2)$ ihren Scheitel, die zweite in $S_2(6|2)$. Sie schneiden einander im Punkt $P(2|4)$. Berechne die Gesamtgröße der Rasenfläche.



ABCD **6.33** Der Betreiber eines Kanuverleihs möchte ein Grundstück mit Anlegesteg am Ufer eines Flusses erwerben (siehe Abbildung).

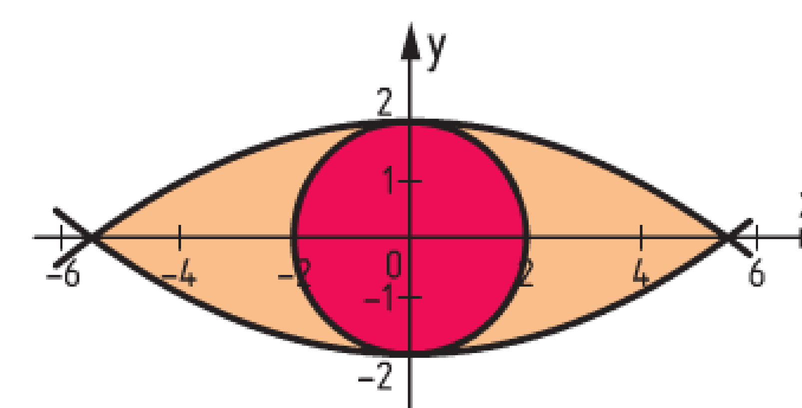


1) Erkläre, warum der Verlauf des Flussufers in diesem Bereich näherungsweise durch eine Polynomfunktion 3. Grads beschrieben werden kann.

2) Das Grundstück hat eine Länge von 360 m und ist in der Mitte 40 m breit. Erkläre, warum man bei der Ermittlung der Funktionsgleichung vom Ansatz
$f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - 360)$ ausgehen kann und ermittle den Faktor a.

3) Das Grundstück kostet 1 500,00 € pro Quadratmeter. Weiters wird vereinbart, dass die Provision des Maklers in der Höhe von 3,5 % des Kaufpreises sowie die anfallenden Gebühren von 4 200,00 € der Käufer zu tragen hat. Wie viel muss der Betreiber des Kanuverleihs bezahlen, um das Grundstück zu erwerben?

ABCD **6.34** Der Stirnteil eines symmetrischen Diadems hat die Form eines Auges. Die obere Begrenzungslinie des Diadems wird durch den Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + 2$ beschrieben (siehe Abbildung, Angaben in cm).



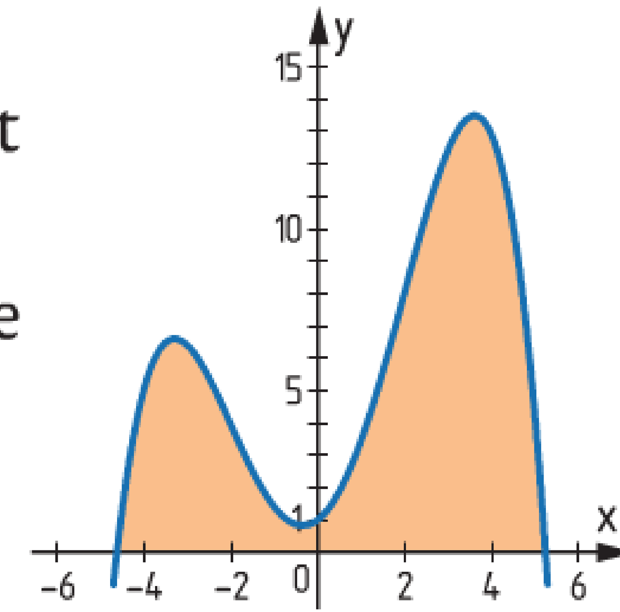
1) Die Pupille soll durch einen Zirkon dargestellt werden, der Rest der Fläche soll mit Blattgold belegt werden. Berechne, wie viel Prozent der Gesamtfläche des Stirnteils durch den Zirkon verdeckt werden.

2) Wie hoch ist der Preis des Stirnteils, wenn ein Juwelier für die Belegung eines Quadratzentimeters mit Blattgold 6,89 € verlangt und der Zirkon 3 440,00 € kostet?

3) Das gesamte Auge – also auch die Pupille – wird sowohl in x- als auch in y-Richtung um 10 % gestreckt. Argumentiere, ob sich dadurch der Prozentsatz aus ***1)*** verändert. Überprüfe deine Antwort durch eine Rechnung.

6.35 Bei einer Spiele-App für ein Smartphone muss man vorgegebene Flächen durch einen Fingerzug so teilen, dass man zwei Flächen mit demselben Flächeninhalt erhält. Je genauer man „schneidet", desto mehr Punkte erhält man. In einem Level kann die Fläche durch jene Fläche beschrieben werden, die der Graph von

$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$ mit der x-Achse einschließt.



ABCD



1) Berechne, an welcher Stelle man die Figur durch einen senkrechten Fingerzug durchtrennen muss, um sie zu halbieren.

2) Man erhält die volle Punkteanzahl, wenn der kleinere der Flächenteile mindestens 43 % der ursprünglichen Fläche enthält. Überlege anhand einer Zeichnung, welche der angegebenen Schnittgeraden diese Bedingung erfüllen.

A) g_1: $y = \frac{1}{3}x + 4$ **B)** g_2: $y = \frac{2}{5}x + 7$ **C)** g_3: $y = \frac{1}{7}x + 2$

3) Überprüfe deine Überlegungen aus **2)** durch eine Rechnung.

Flächenberechnungen, die Substition oder partielle Integration erfordern

6.36 Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Funktionsgraphen $y = f(x)$, der x-Achse und den Senkrechten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. B

a) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $a = 0, b = 2$ **c)** $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$, $a = -1, b = 2$

b) $f(x) = \frac{3}{x - 2}$, $a = 3, b = 6$ **d)** $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$, $a = \frac{1}{2}, b = 2$

6.37 Berechne den Inhalt der Fläche, die von den gegebenen Kurven eingeschlossen wird. B



a) $y_1 = 2 \cdot \sin(3x)$, $y_2 = x^2 - x + 0{,}25$ **c)** $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = 4$, $x = 0$

b) $y_1 = x \cdot e^{x^2} + e$, $y_2 = -x \cdot e^{x^2} + e$, $y_3 = 0$ **d)** $y_1 = x \cdot \sin(x)$, $y_2 = -x$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

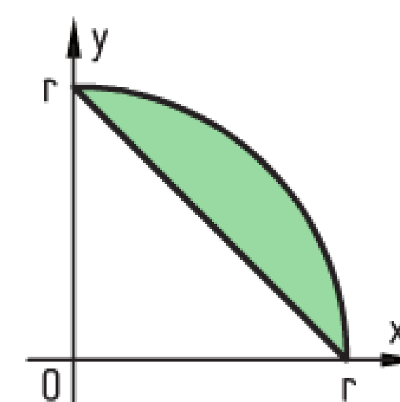
6.38 Berechne den Inhalt der Fläche unter der Kurve zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen. B

a) $y = \sin^2(x)$ **b)** $y = \cos(2x + 1)$ **c)** $y = -4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$

6.39 Der Graph der Funktion $f(x) = (x - 2)^2$ schließt mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten ein Flächenstück ein. Dieses soll durch eine Gerade halbiert werden. An welcher Stelle muss diese liegen, wenn sie **a)** senkrecht ist? **b)** waagrecht ist? BC

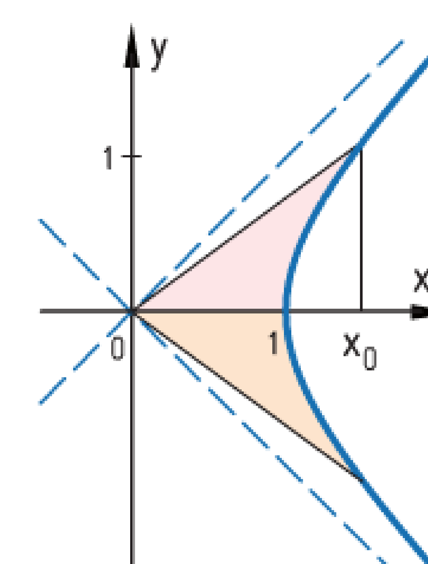


6.40 Berechne den Flächeninhalt des dargestellten Kreissegments mithilfe der Integralrechnung **1)** für r = 4 cm, **2)** allgemein. BC
Hinweis: Die Gleichung des Kreises lautet k: $x^2 + y^2 = r^2$.



6.41 Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Ellipse ell: $9x^2 + 25y^2 = 225$ und dem Kreis k: $x^2 + y^2 = 9$ eingeschlossen wird. Beschreibe deine Vorgehensweise anhand einer Zeichnung. BC

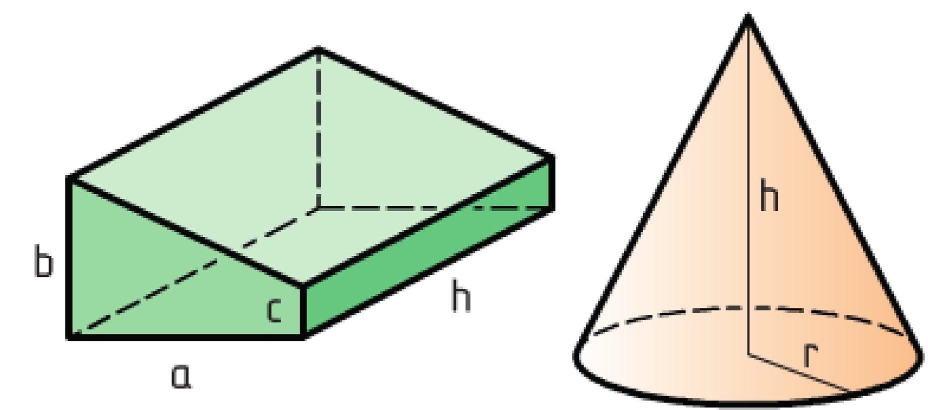
6.42 Die Areafunktionen (Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktion) werden zur Berechnung des Flächeninhalts eines Hyperbelsektors benötigt (siehe Band 2). BD
Es gilt: $A_{Sektor} = \text{arccosh}(x_0)$
Zeige dies mithilfe der Integralrechnung.
Hinweis: Die Gleichung der Einheitshyperbel lautet hyp: $x^2 - y^2 = 1$.





6.2 Volumenberechnung

ACD **6.43** Gib an, wie man das Volumen von Körpern berechnet, deren Schnittfläche kongruent zur Grundfläche sind. Erkläre, wie man das Volumen von Körpern berechnet, deren Schnittflächen sich mit zunehmender Höhe zu einer Spitze hin quadratisch verkleinern.



In der Ruinenstadt Chichén Itzá in Mexico befindet sich die Tempelpyramide des Kukulcán („leuchtende Schwanzfederschlange"), die von den Mayas errichtet wurde. Diese neunfach gestufte Pyramide spiegelt die terrassenartige Architektur der Mayakultur wieder, wobei jede dieser Abstufungen eine Höhe von ungefähr drei Meter aufweist. Ägyptische Pyramiden sind „feiner" strukturiert, die Abstufungen sind kaum erkennbar. Nimmt man an, dass die Pyramiden durch das schichtweise Auftragen von Gestein entstanden sind, kann man den jeweiligen Baufortschritt als Aufsummieren von Gesteinsschichten interpretieren.

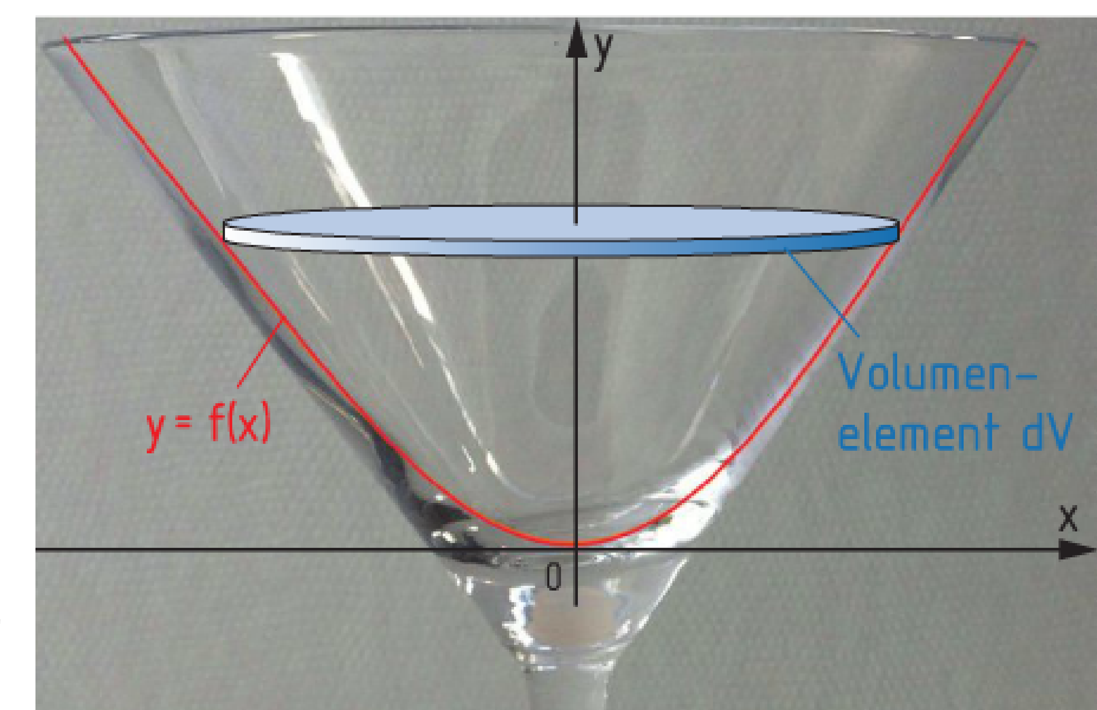




Mithilfe dieser Idee lassen sich die Volumen von Körpern ermitteln. Ein Körper wird in „unendlich dünne" **Volumenelemente** dV geteilt, die mittels Integration zu einem Gesamtvolumen V aufsummiert werden.

Allgemein schreibt man: $V = \int_V dV$

Bei dem abgebildeten Glas sind diese Volumenelemente dünne, waagrechte Zylinderscheiben. Die Radien dieser Scheiben können mithilfe der rot eingezeichneten Randkurve y = f(x) beschrieben werden.



ZB: Das Volumen einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h soll berechnet werden. Die Querschnittsflächen sind Quadrate und die Volumenelemente daher Quader.

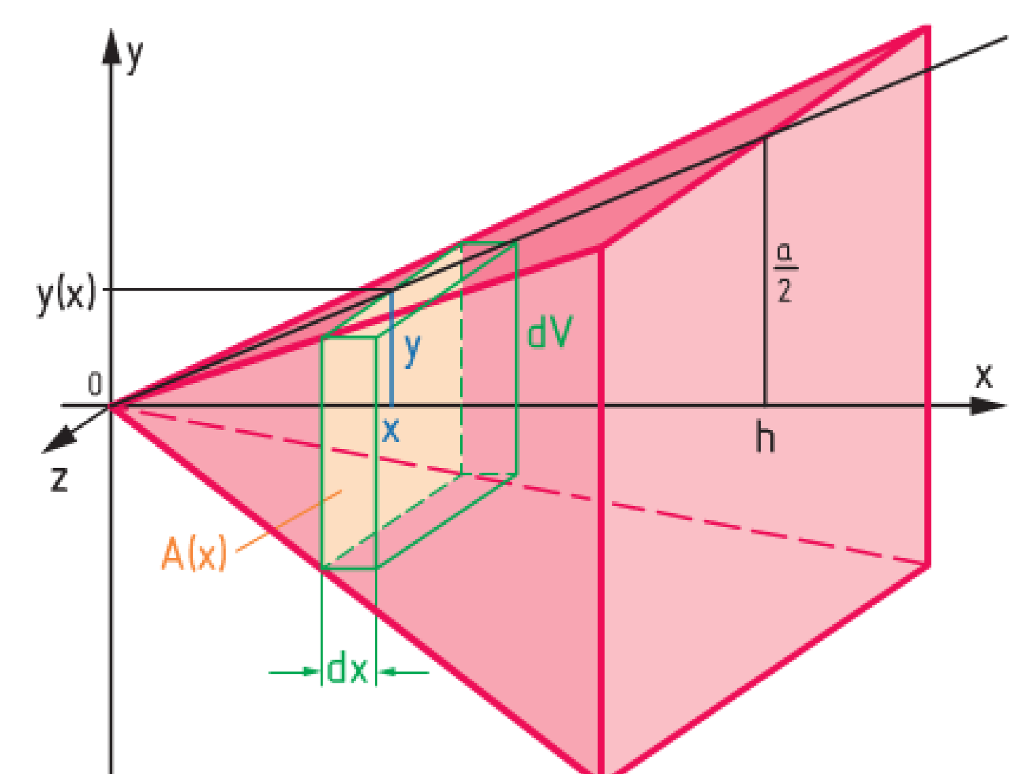
Die Abmessungen der Schnittflächen können durch die lineare Funktion $y = \frac{a}{2h} \cdot x$ beschrieben werden.
Für das Volumenelement mit der Höhe h = dx gilt:

$$dV = A(x) \cdot dx = (2 \cdot y(x))^2 \cdot dx = \left(2 \cdot \frac{a}{2h} \cdot x\right)^2 \cdot dx = \frac{a^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot dx$$

Damit erhält man für das Gesamtvolumen:

$$dV = A(x) \cdot dx = (2 \cdot y)^2 \cdot dx$$

$$V = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} x^2\, dx = \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{a^2 \cdot h}{3}$$



Das **Volumen** eines Körpers kann mithilfe der Integration über alle Volumenelemente dV ermittelt werden.

$$V = \int_V dV$$

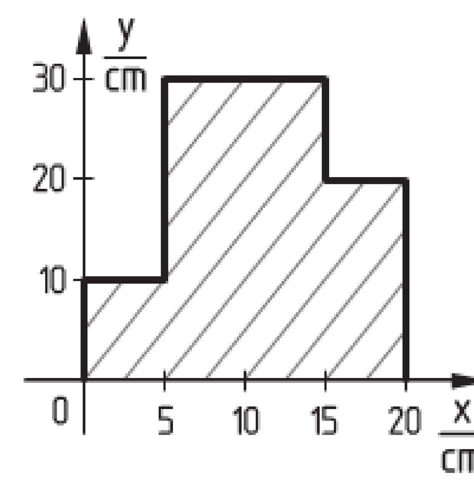
Volumenberechnung bei Rotationskörpern

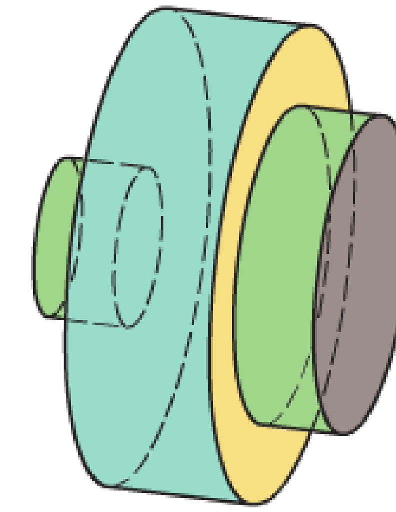
6.44 In der Abbildung ist der halbe Schnitt eines Rads dargestellt.

ABC

1) Berechne das Volumen des Rads bei Drehung um die x-Achse. Überlege und beschreibe, wie du dabei vorgehen musst.

2) Welche Masse hat das Rad, wenn die Dichte $\rho = 7{,}85\,\frac{kg}{dm^3}$ beträgt?

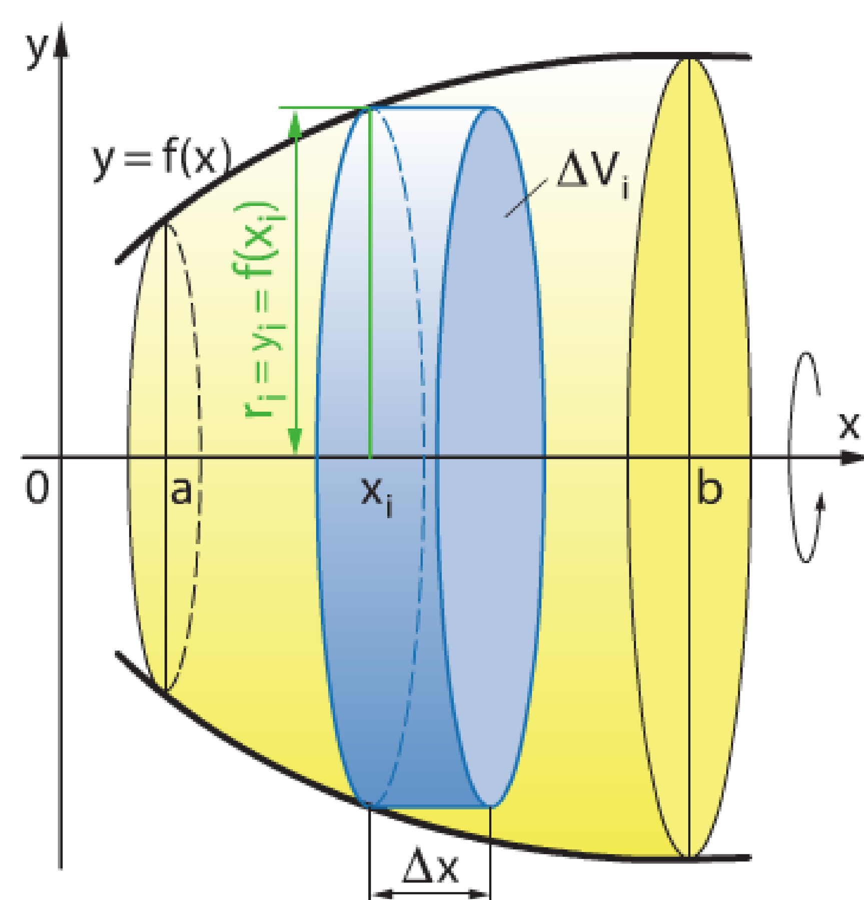




Wird eine beliebige Kurve um eine Achse gedreht, so entsteht eine Drehfläche. Die Drehfläche hüllt einen **Drehkörper** (**Rotationskörper**) ein. Der Drehkörper kann auch durch Rotation der Fläche zwischen der Kurve und der Drehachse erzeugt werden. Im Folgenden liegt die Kurve immer in der xy-Ebene und die Drehachse ist die x-Achse oder die y-Achse. In diesem Fall ist die Kurve der Halbmeridian des Rotationskörpers. Den Schnitt der Drehfläche durch die Rotationsachse bezeichnet man als **Meridian**. Bei der Herleitung der Formel zur Berechnung von Volumen von Rotationskörper geht man von **Zylinderscheiben** aus.

- **Drehung (Rotation) um die x-Achse**

Eine Kurve mit der Funktionsgleichung y = f(x) erzeugt durch Drehung um die x-Achse einen Drehkörper. Um das Volumen des von x = a und x = b begrenzten Drehkörpers zu berechnen, wird der Drehkörper in n Zylinderscheiben unterteilt.



Eine solche Zylinderscheibe hat den Radius $r_i = f(x_i)$ und die Dicke Δx.

Mit $V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h$ beträgt das Volumen einer Scheibe:

$\Delta V_i = [f(x_i)]^2 \cdot \pi \cdot \Delta x$

Das Volumen des Drehkörpers kann durch die Summe V_n angenähert werden:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)]^2 \cdot \pi \cdot \Delta x$$

Nun bildet man den Grenzwert für $n \to \infty$ wodurch die Scheiben „unendlich dünn" werden:

$$V = \lim_{n \to \infty} (V_n) = \int_a^b [f(x)]^2 \cdot \pi \cdot dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Volumen eines Drehkörpers bei Drehung der Kurve y = f(x) um die **x-Achse**

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx$$

6.45 Ermittle die Formel für das Kugelvolumen durch Drehung eines Halbkreises mit dem Radius r um die x-Achse.

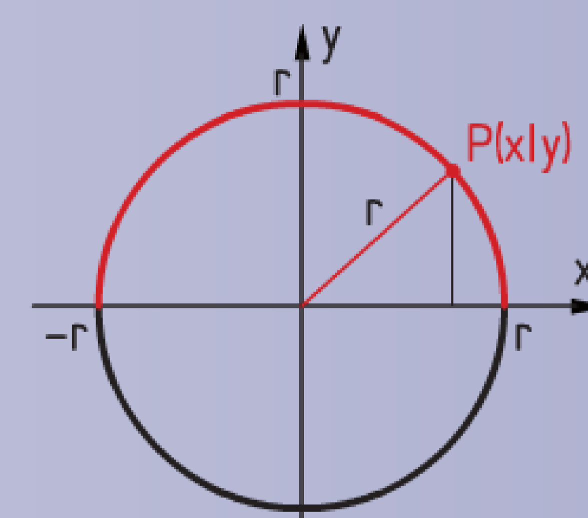
AB

Lösung:

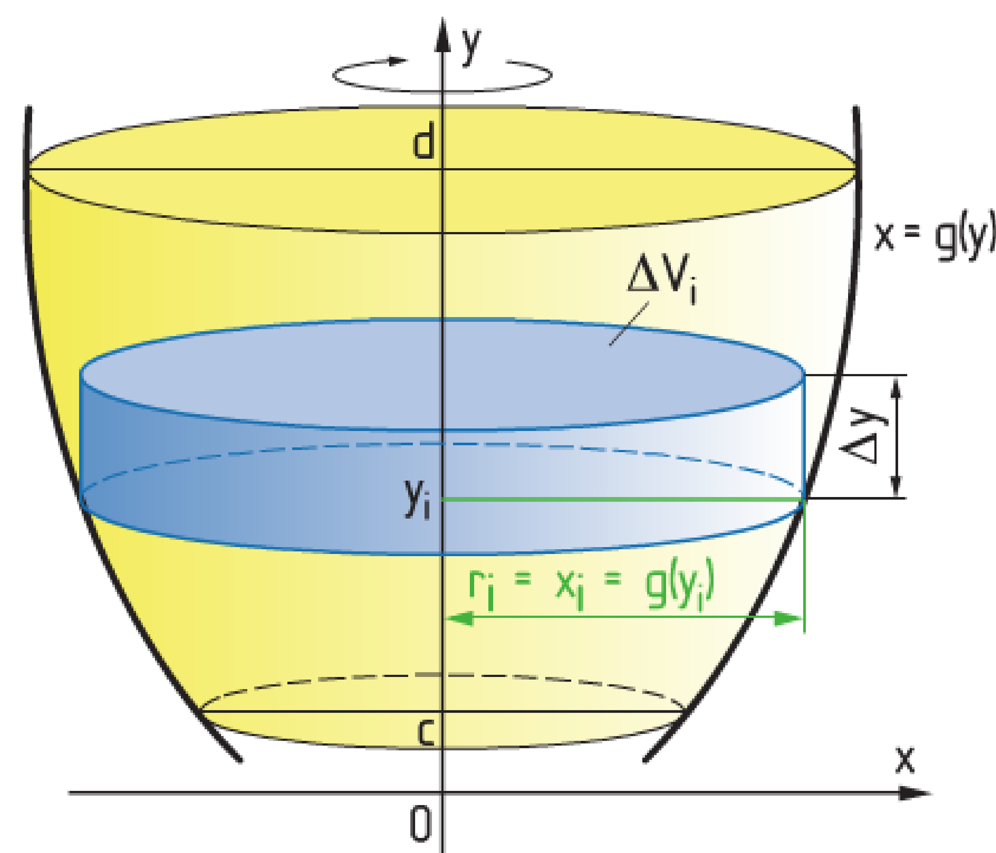
Funktionsgleichung: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, Grenzen: a = −r und b = r

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \pi \cdot \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \pi \cdot \left(\frac{2r^3}{3} + \frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}r^3\pi$$



- **Drehung (Rotation) um die y-Achse**



Die Vorgehensweise ist analog zu der bei Drehung um die x-Achse. Die Kurve muss allerdings als Funktion von y dargestellt werden, also $x = g(y)$. Die Zylinderscheiben haben den Radius $r_i = g(y_i)$ und die Höhe Δy.
Die Grenzen c und d sind Werte auf der y-Achse.

Der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt:

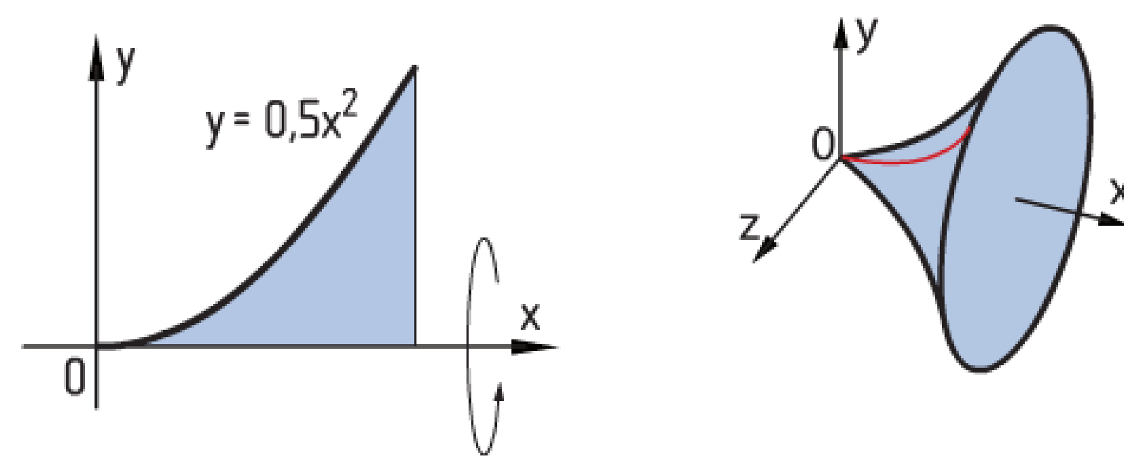
$$V = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} [g(y_i)]^2 \cdot \pi \cdot \Delta y \right) = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2\, dy$$

Volumen eines Drehkörpers bei Drehung der Kurve $x = g(y)$ um die **y-Achse**

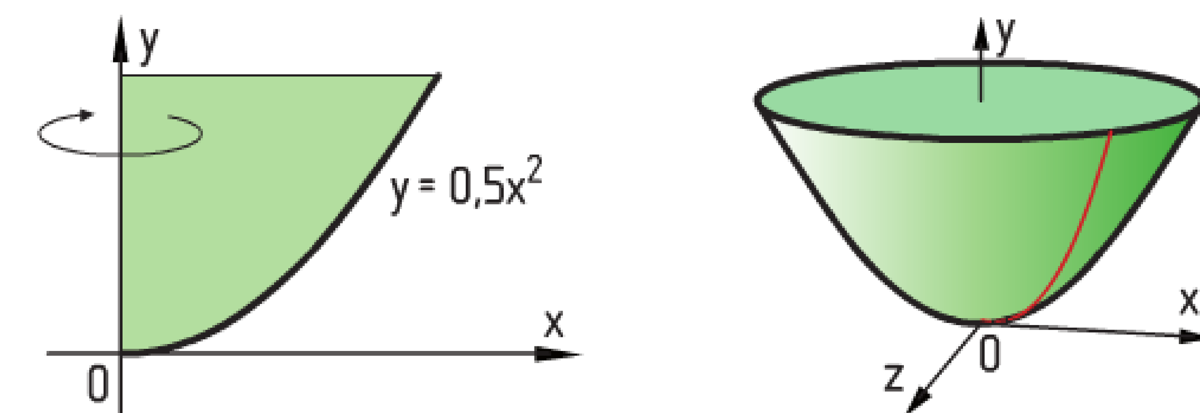
$$V_y = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2\, dy = \pi \cdot \int_c^d x^2\, dy$$

Beachte, dass bei Drehung desselben Graphen um die x- bzw. y-Achse **verschiedene Flächen** mit der Drehachse eingeschlossen werden und daher 2 **verschiedene Drehkörper** entstehen.

Drehung um die x-Achse



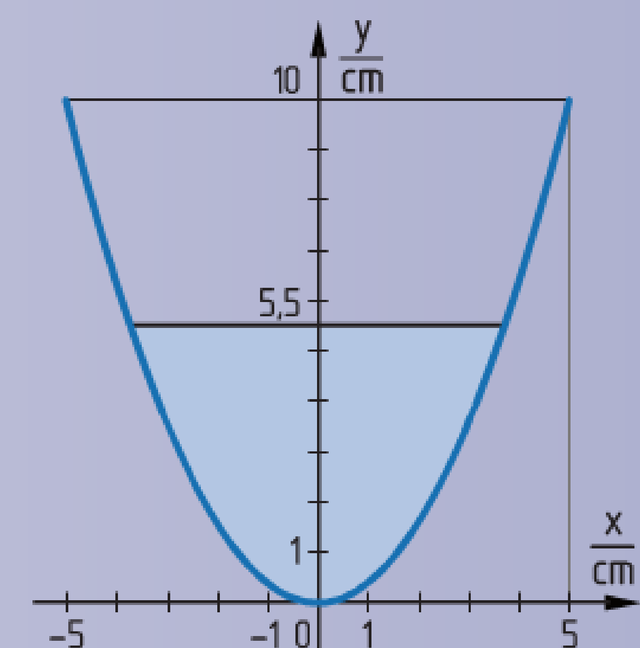
Drehung um die y-Achse



ABC **6.46** Die Form eines 10 cm hohen Kelchs eines Wasserglases kann durch Rotation einer Parabel um die y-Achse beschrieben werden (siehe Abb.).

1) Wie viel Milliliter Wasser befinden sich im Glas, wenn es 5,5 cm hoch befüllt ist?

2) Es werden 250 mℓ Wasser eingefüllt. Wie hoch ist das Glas befüllt? Beschreibe deine Vorgehensweise.



Lösung:

Ermitteln der Funktionsgleichung: $y = a \cdot x^2 \Rightarrow 10 = a \cdot 5^2 \Rightarrow a = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{5} \cdot x^2$

1) Da der Meridian um die y-Achse rotiert, muss die Funktionsgleichung auf x^2 umgeformt werden: $y = \frac{2}{5} \cdot x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \cdot y$

Anwenden der Volumenformel:

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2\, dy = \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot \int_0^{5,5} y\, dy = \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^{5,5} = 118{,}791\ldots \text{ cm}^3 \approx 119 \text{ mℓ Wasser}$$

2) Zur Ermittlung der Füllhöhe h bei einem gegebenen Volumen von 250 cm³ wird zuerst das Volumenintegral allgemein für die Grenzen 0 und h ermittelt:

$$V_y = \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot \int_0^h y\, dy = \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot \frac{h^2}{2}$$

Nun stellt man eine Gleichung auf und erhält die Füllhöhe h für 250 cm³:

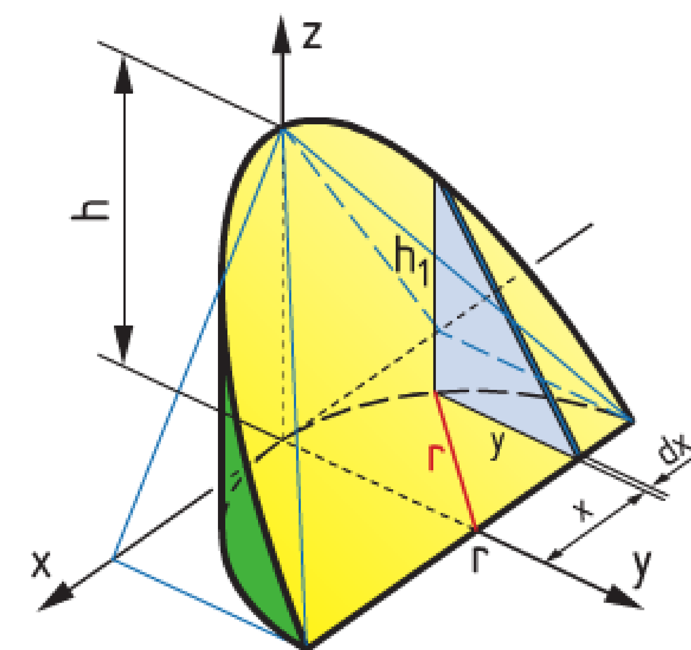
$$250 = \pi \cdot \frac{5 \cdot h^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = 7{,}978\ldots \text{ cm} \approx 8 \text{ cm}$$

Satz von Cavalieri

In Band 1 wurde der **Satz von Cavalieri** zur Ermittlung des Volumens spitzer Körper verwendet.

Satz von Cavalieri: Das Volumen zweier Körper ist gleich, wenn sie im gleichen Abstand stets Schnittflächen mit gleichem Flächeninhalt haben.

Mithilfe der Integralrechnung wird diese Behauptung nun anhand eines Beispiels nachgeprüft. Wird ein Zylinder an seiner Basisfläche in einem spitzen Winkel zur Höhe geschnitten, entsteht ein Zylinderhuf. Es wird nun gezeigt, dass die Querschnittsflächen des Zylinderhufs gleichen Flächeninhalt haben, wie jene einer volumengleichen Pyramide.



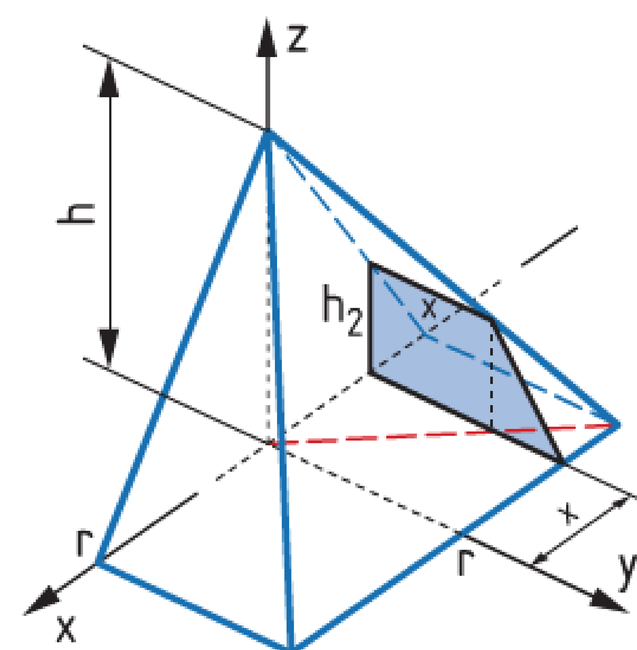
Schneidet man aus dem Zylinderhuf parallel zur yz-Ebene dünne Scheiben der Dicke dx heraus, so haben diese eine dreieckige Querschnittsfläche (siehe Abbildung).

Für das Teilvolumen gilt daher: $dV = A(x) \cdot dx$ mit $A = \frac{y \cdot h_1}{2}$

Mithilfe ähnlicher Dreiecke und des Satzes von Pythagoras wird nun die Querschnittsfläche A als Funktion von x dargestellt:

$\frac{h_1}{y} = \frac{h}{r} \Rightarrow h_1 = \frac{h}{r} \cdot y \Rightarrow A = \frac{y \cdot h_1}{2} = \frac{y \cdot h \cdot y}{2 \cdot r} = \frac{h}{2r} \cdot y^2$

$y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow \mathbf{A(x) = \frac{h}{2r} \cdot (r^2 - x^2)}$



Für das Gesamtvolumen erhält man:

$V = \int_V dV = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \frac{h}{2r} \cdot (r^2 - x^2)\,dx = 2 \cdot \frac{h}{2r} \cdot \left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = \frac{2}{3}r^2h$

Dieses Volumen stimmt mit dem jener Pyramide überein, deren Basis ein der Grundfläche des Hufs umgeschriebenes Rechteck ist.

$V_{Pyr} = \frac{A \cdot h}{3} = \frac{2r^2 \cdot h}{3}$

Wir betrachten die Querschnittsfläche der Pyramide im Abstand x: $A_{Trapez} = \frac{(r + x) \cdot h_2}{2}$

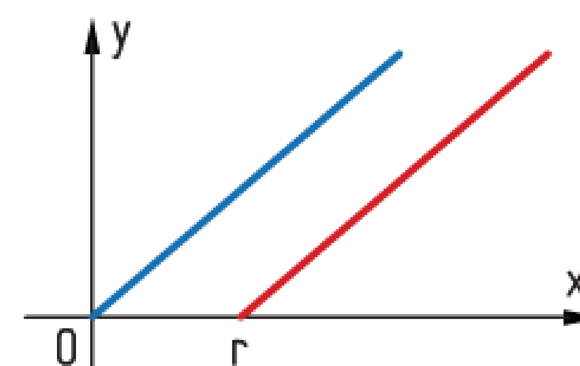
Aufgrund des Strahlensatzes gilt: $\frac{h_2}{r - x} = \frac{h}{r} \Rightarrow h_2 = \frac{h}{r} \cdot (r - x)$ und somit

$A_{Trapez} = \frac{(r + x) \cdot h \cdot (r - x)}{2r} = \mathbf{\frac{h}{2r} \cdot (r^2 - x^2) = A(x)}$

Die Flächeninhalte sind also gleich groß. Der Satz von Cavalieri ist erfüllt.

6.47 Welcher Körper entsteht durch Drehung eines Geradenstücks um die y-Achse, wenn
1) die Gerade durch den Ursprung verläuft?
2) die Gerade den Abstand r (r > 0) vom Ursprung hat?

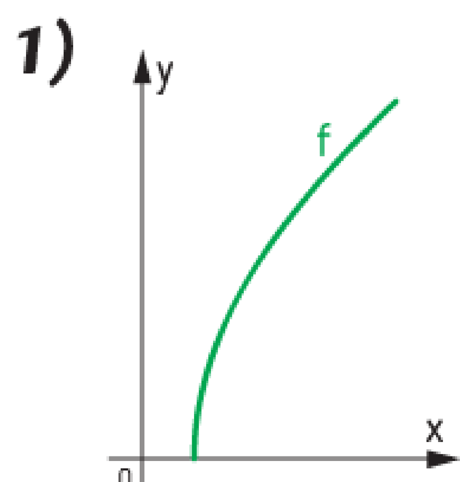
AC

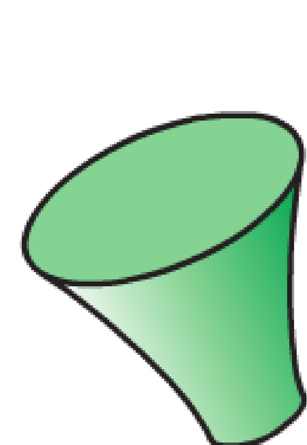


6.48 Gib an, um welche Achse der Graph der dargestellten Funktion gedreht wurde:

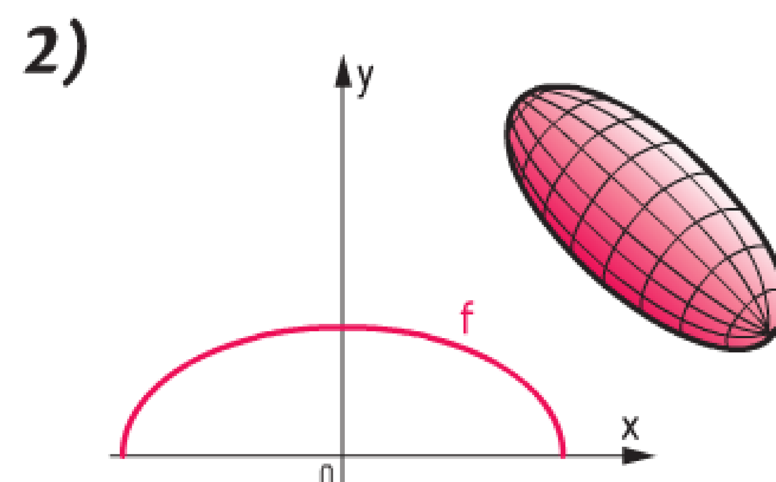
AC

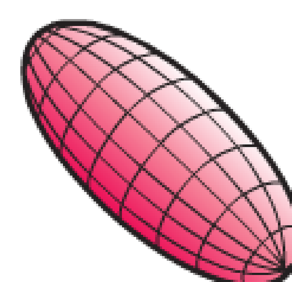
1)



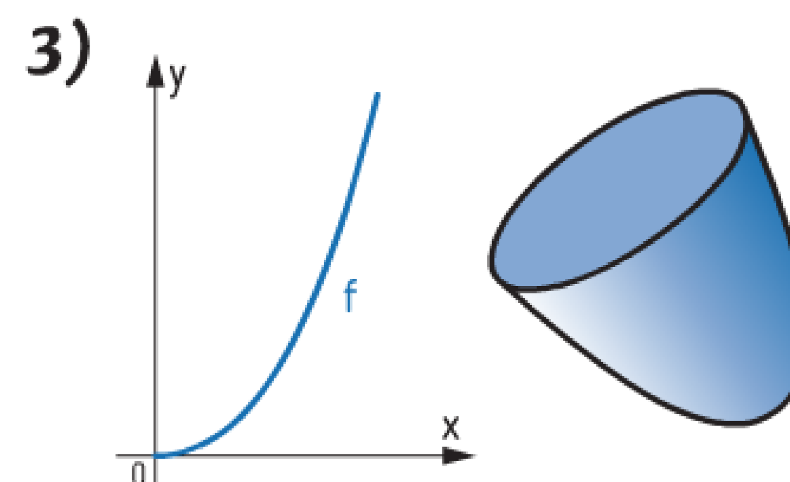


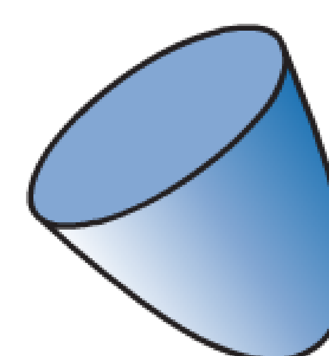
2)





3)

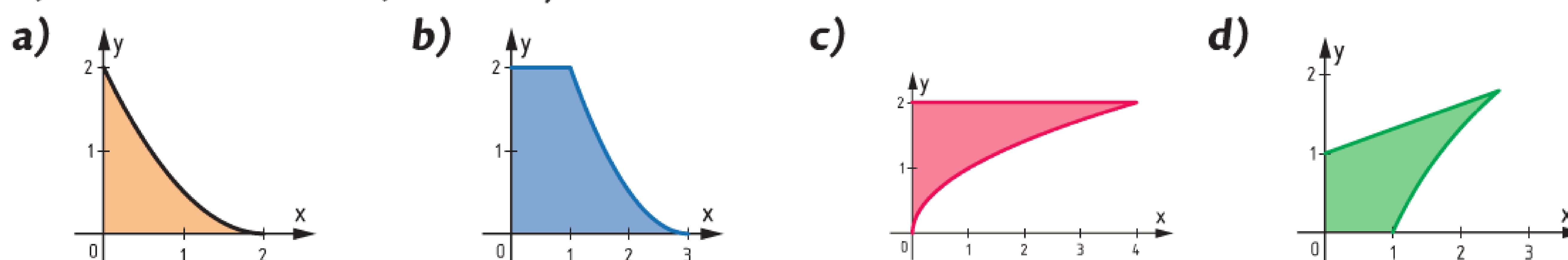




Anwendungen der Integralrechnung

AC **6.49** Beschreibe den Drehkörper, der bei Rotation der markierten Fläche **1)** um die x-Achse, **2)** um die y-Achse entsteht.

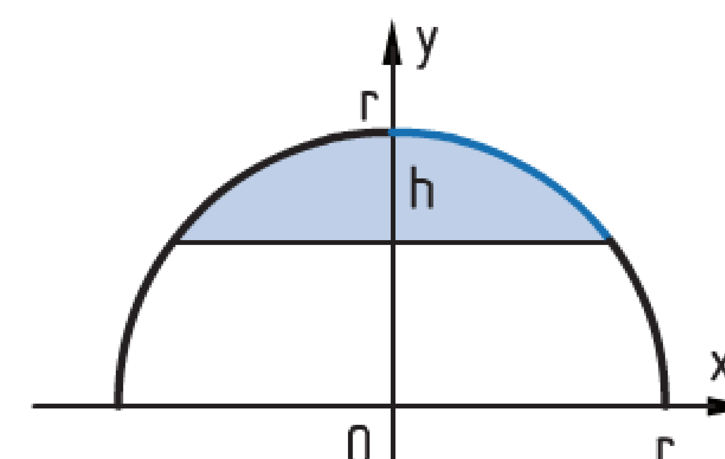
a) **b)** **c)** **d)**



B **6.50** Berechne das Volumen des Drehkörpers, der bei Drehung des Funktionsgraphen von y um die x-Achse im angegebenen Intervall entsteht.

a) $y = \frac{1}{2}x$, $[1; 4]$

b) $y = -x^2 + 3$, $[-1; 1]$



AB **6.51** Ermittle mithilfe der Integralrechnung das Volumen eines Kugelabschnitts mit der Höhe h und dem Kugelradius r.

AB **6.52** Das Kurvenstück der Funktion $y = \sqrt{x-2}$ wird von den Punkten $P_1(x_1|0)$ und $P_2(6|y_2)$ begrenzt. Berechne das Volumen des Drehkörpers, der durch Drehung um die

a) x-Achse entsteht. **b)** y-Achse entsteht.

B **6.53** Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn die gegebene Kurve zwischen den Grenzen x = a und x = b um die x-Achse rotiert.

a) $y = \sin(x) + 1$, $a = 0$, $b = \pi$ **b)** $y = 2e^x$, $a = 0$, $b = 1$ **c)** $y = \cos(x)$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$

B **6.54** Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn die gegebene Kurve zwischen den Grenzen y = c und y = d um die y-Achse rotiert.

a) $y = 2x^2$, $c = 0$, $d = 8$ **b)** $y = \ln(x)$, $c = -1$, $d = 1$ **c)** $y^2 = 2x - 1$, $c = 1$, $d = 3$

ABC **6.55** Die Höhe H = 8 cm einer geraden Pyramide liegt auf der x-Achse. Gib die Querschnittsfläche A als Funktion der „Schnitthöhe" h an (Hinweis: Verwende den Strahlensatz) und ermittle das Volumen mittels Integralrechnung. Überprüfe die Ergebnisse durch die Berechnungen der Volumen mit elementaren Formeln.

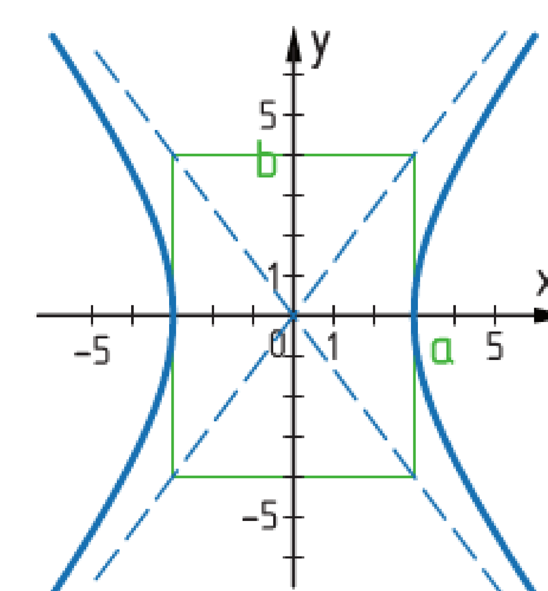
a) Die Basis ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a = 3 cm.

b) Die Basis ist ein Rechteck mit den Seitenlängen a = 4 cm und b = 5 cm.

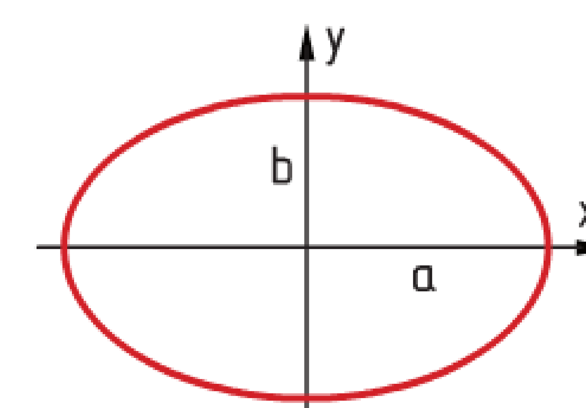
AB **6.56** Wird eine Hyperbel hyp: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die y-Achse gedreht, entsteht ein einschaliges **Drehhyperboloid**, bei Drehung um die x-Achse ein zweischaliges Drehhyperboloid (siehe Abb. Seite 239, 6.84). Berechne das Volumen für a = 3 und b = 4.

a) Einschaliges Drehhyperboloid für $-5 \leqslant y \leqslant 5$

b) Zweischaliges Drehhyperboloid für $-5 \leqslant x \leqslant 5$



AB **6.57** Wird eine Ellipse ell: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um eine ihrer Achsen gedreht, so entsteht ein **Drehellipsoid**. Bei Drehung um die Hauptachse spricht man von einem eiförmigen Drehellipsoid, bei Drehung um die Nebenachse von einem linsenförmigen.



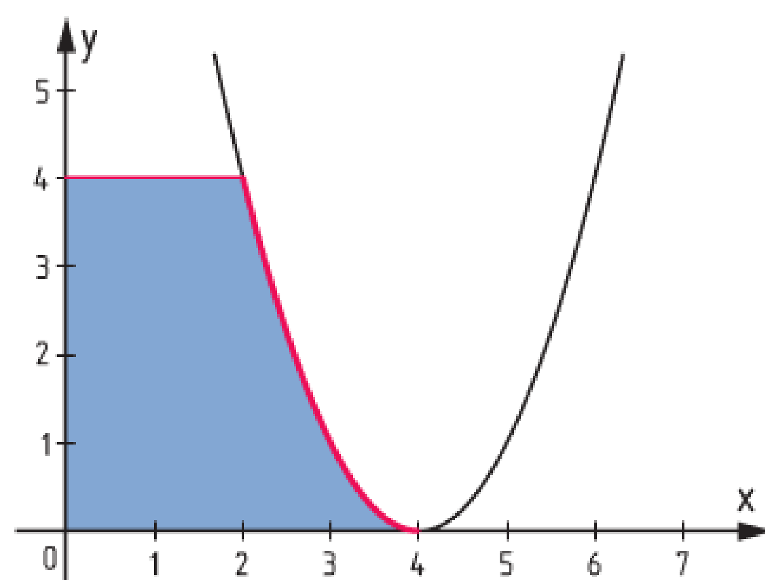
a) Gib das Volumen eines eiförmigen Drehellipsoids allgemein an.

b) Gib das Volumen eines linsenförmigen Drehellipsoids allgemein an.

6.58 Bei einer Hausübung sollte das Volumen eines Körpers berechnet werden. Dieser entsteht durch die Rotation der Fläche, die der Funktionsgraph von $y = (x - 4)^2$ mit der y-Achse im Intervall $y \in [0; 4]$ einschließt, um die y-Achse. **ABCD**



Erik formt die Funktionsgleichung zuerst auf x um und ermittelt anschließend das Volumenintegral mittels Technologieeinsatz:



$y = (x-4)^2 \quad | \sqrt{\ }$
$\sqrt{y} = x - 4$
$x = 4 + \sqrt{y}$
$V_y = \pi \cdot \int_0^4 (4 + \sqrt{y})^2 \, dy$
$V_y \approx 67 \, E^3$

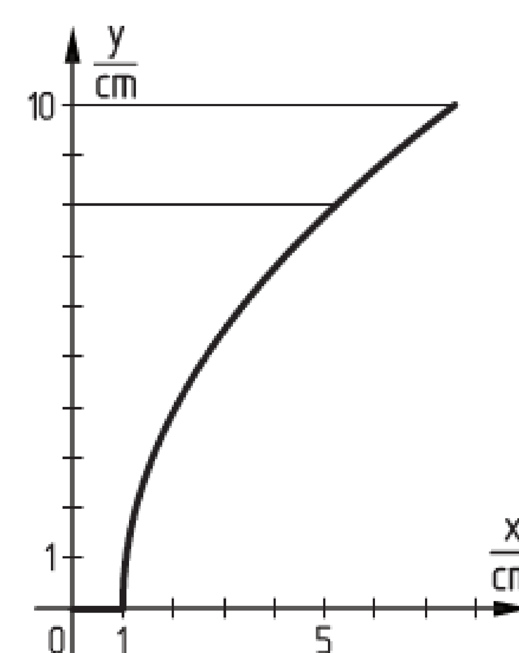
Erkläre, welchen Fehler Erik gemacht hat und stelle die Rechnung richtig.

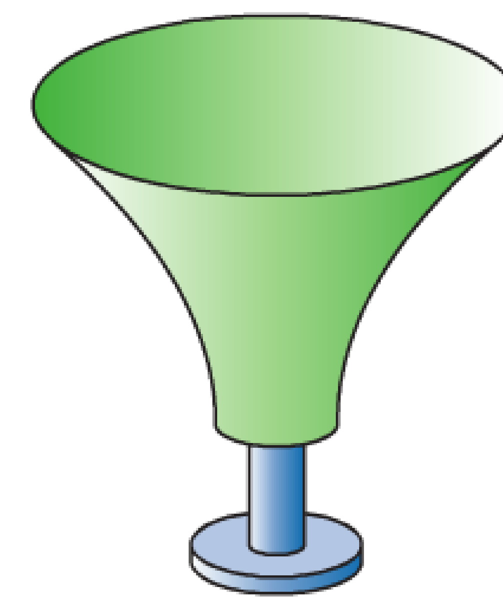
6.59 Die Form eines Glases kann durch Drehung der Kurve $y = \sqrt{15 \cdot (x - 1)}$ um die y-Achse beschrieben werden (siehe Abbildung). **ABC**



1) Wie viel Milliliter Flüssigkeit befinden sich im Glas, wenn es bis 2 cm unter den Rand befüllt ist?

2) Schätze, ob das Glas mit einem halben Liter Flüssigkeit befüllt werden kann und überprüfe deine Schätzung mithilfe einer Rechnung.



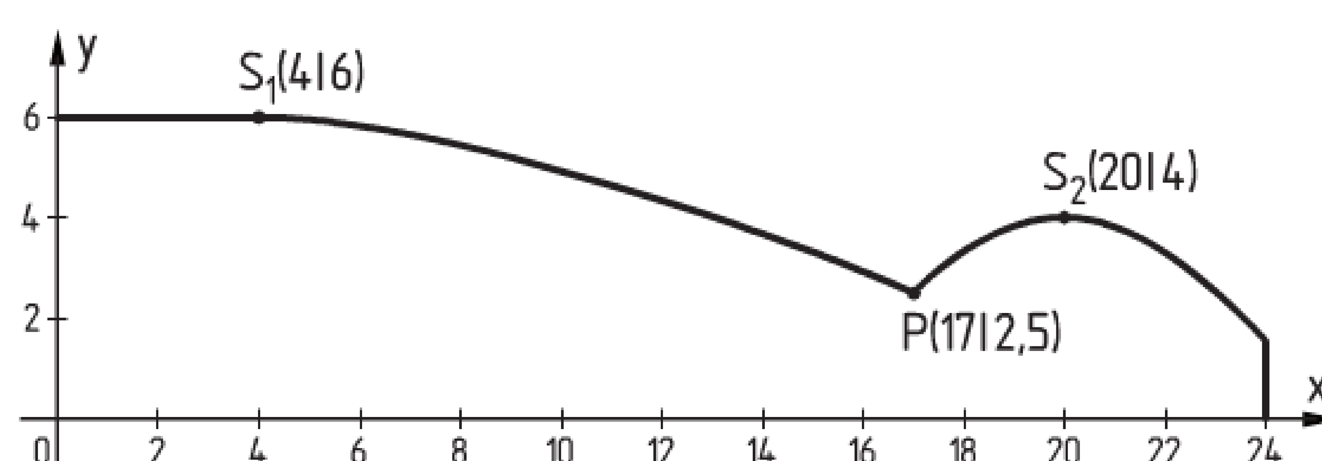


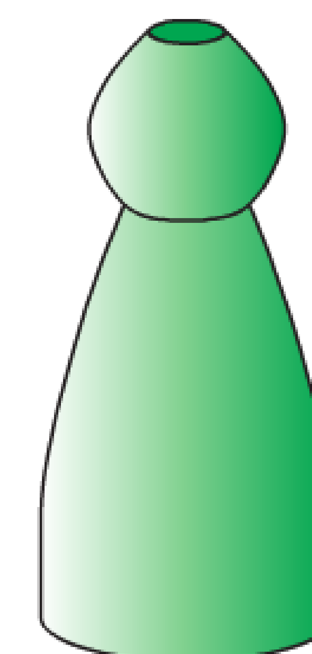
6.60 Ein Bowling Pin wurde aus einem 24 cm hohen quaderförmigen Holzstück mit quadratischer Grundfläche mit der Seitenlänge 12 cm gedrechselt. Die Grafik zeigt den halben Längsschnitt des Bowling Pins (Angaben in Zentimeter). Der Meridian setzt sich aus Geradenstücken und zwei Parabeln mit den Scheiteln S_1 und S_2 zusammen. **AB**

1) Gib die Funktionsgleichungen an.

2) Berechne die Masse des Pins, wenn er aus Holz ist ($\rho = 0{,}7 \, \frac{g}{cm^3}$).

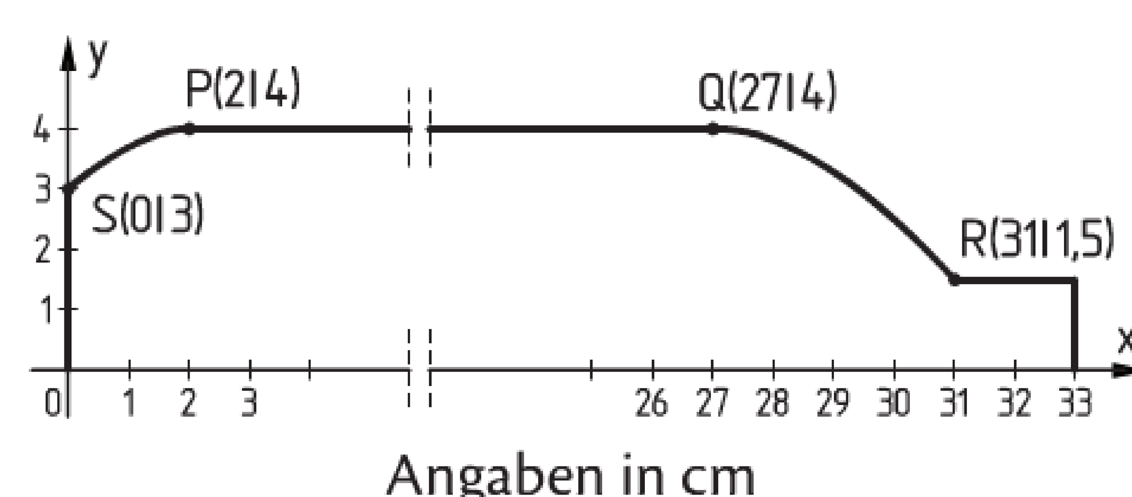
3) Gib den Verschnitt, der beim Drechseln des Pins aus dem Holzstück entstanden ist, in Prozent an.





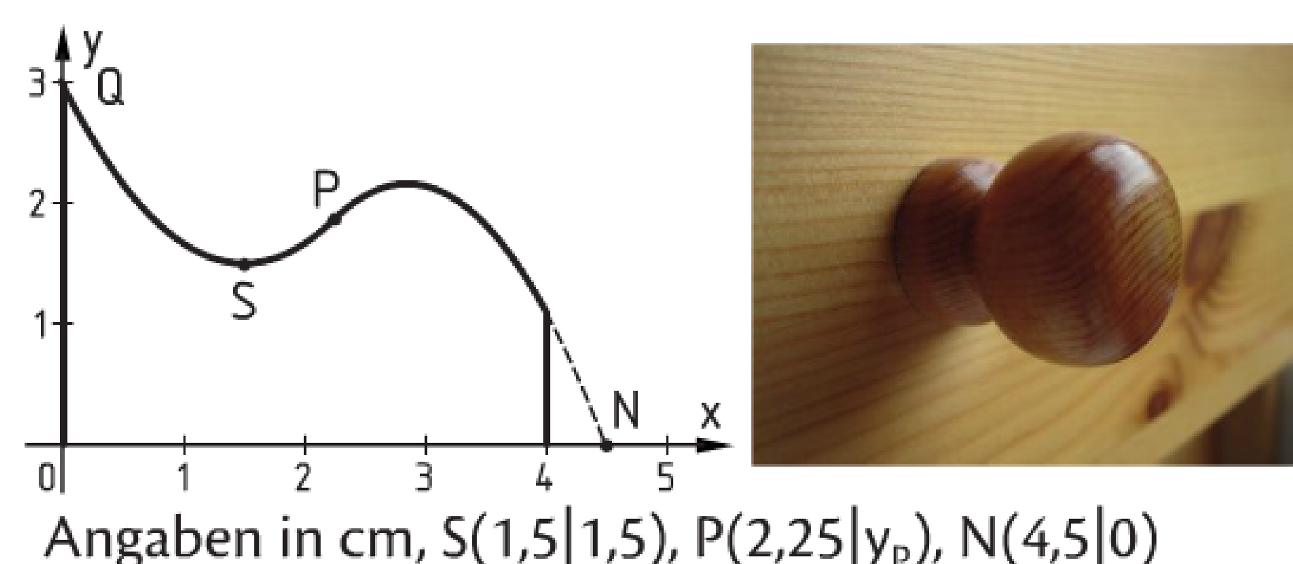
6.61 **1)** Bestimme den Inhalt der Mineralwasserflasche, deren Form durch Drehung der dargestellten Kurve um die x-Achse entsteht. Die Kurve setzt sich aus Parabel- und Geradenstücken zusammen (P, Q sind jeweils die Scheitel der Parabeln). **AB**

2) Wie hoch ist die stehende Flasche befüllt, wenn sie nur mehr einen Liter Wasser beinhaltet?



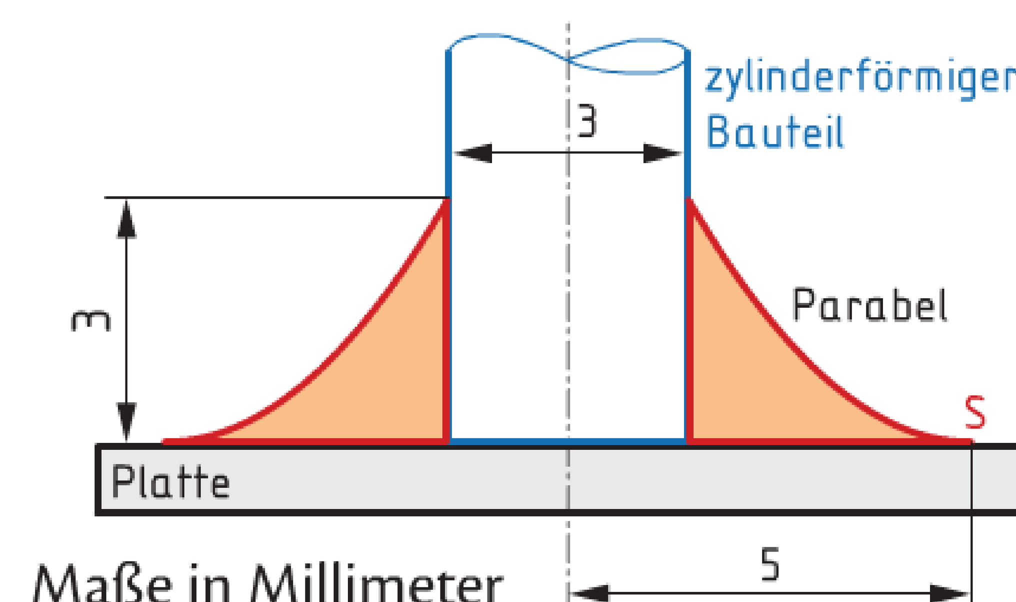
Angaben in cm

AB 6.62 Ein Holzknauf mit dem dargestellten Halbschnitt wird durch Drechseln (Drehen) hergestellt. Die Begrenzungslinie setzt sich aus zwei quadratischen Funktionen zusammen, die in P eine gemeinsame Tangente haben.
Gib die Funktionsgleichungen an und berechne die Masse des Knaufs für $\rho = 0{,}7\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.



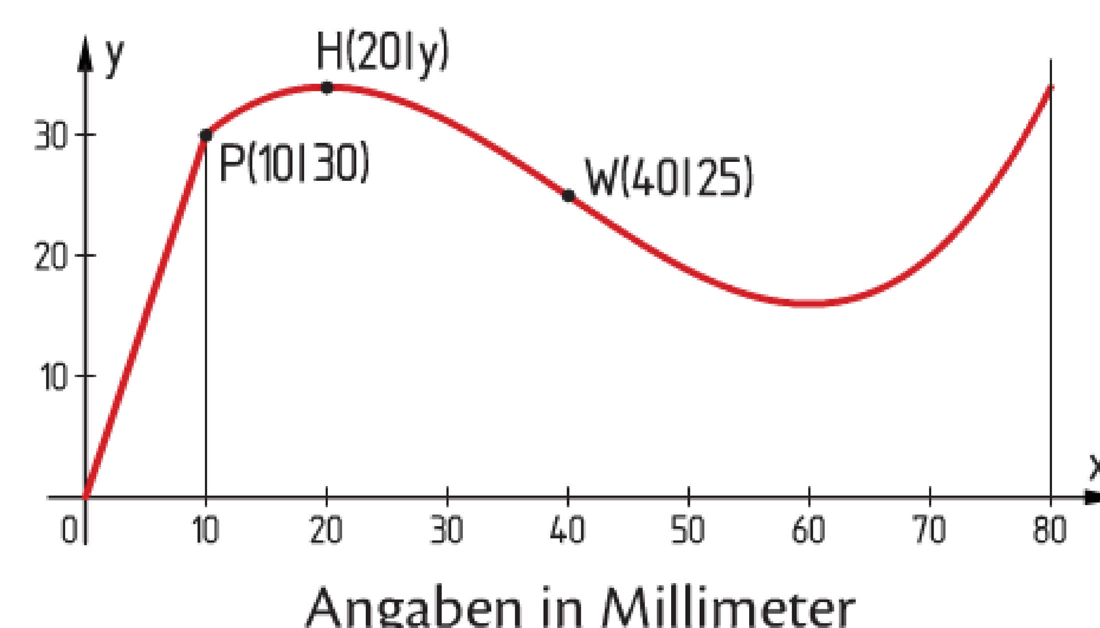
Angaben in cm, S(1,5|1,5), P(2,25|y_P), N(4,5|0)

AB 6.63 Zur Verbindung von Metallteilen kann Lötzinn verwendet werden. Die Kurven des entstehenden Querschnitts können als Parabelbögen, die die Platte berühren, genähert angenommen werden. Berechne die Masse an Lötzinn ($\rho = 8{,}4\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$), die für 100 Lötstellen der dargestellten Form notwendig ist.



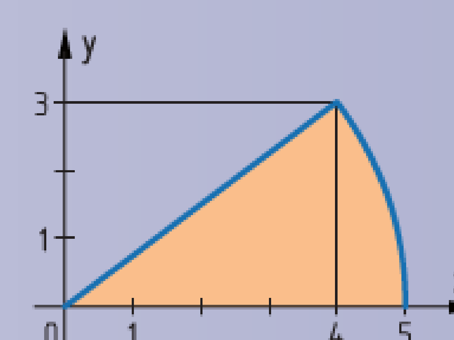
Maße in Millimeter

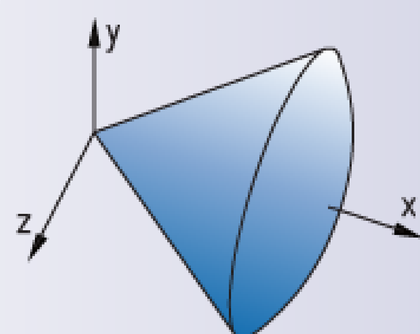
AB 6.64 Die Form eines Senklots entsteht durch Drehung der dargestellten Kurve um die x-Achse. Die Kurve setzt sich aus einer Geraden und einer Polynomfunktion 3. Grads zusammen. Diese verläuft durch den Punkt P, hat in H einen Hochpunkt und in W einen Wendepunkt.
1) Bestimme die Funktionsgleichung.
2) Gib den kleinsten Durchmesser des Senklots im Intervall [10 mm; 80 mm] an.
3) Berechne die Masse, wenn das Lot aus Messing gefertigt wird (Dichte $\rho = 8{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

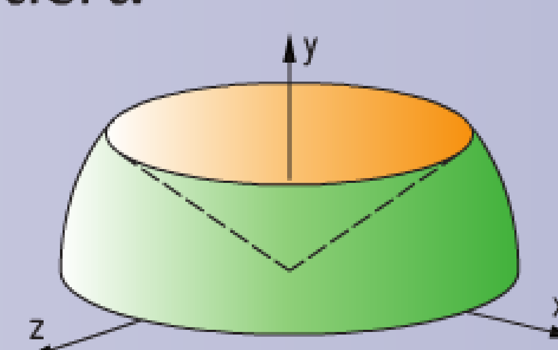


Angaben in Millimeter

BC 6.65 Eine Fläche wird von einer Geraden, einem Kreisbogen und der x-Achse eingeschlossen. Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn die Fläche um die
1) x-Achse, **2)** y-Achse rotiert.







Lösung:
1) Gerade: $y_g = \frac{3}{4}\cdot x$, Kreis: $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y_k^{\,2} = 25 - x^2$

$$V_x = \pi\cdot\int_0^4 y_g^{\,2}\,dx + \pi\cdot\int_4^5 y_k^{\,2}\,dx = \pi\cdot\left(\int_0^4 y_g^{\,2}\,dx + \int_4^5 y_k^{\,2}\,dx\right) =$$
$$= \pi\cdot\left(\int_0^4\left(\frac{3}{4}\cdot x\right)^2 dx + \int_4^5 (25 - x^2)\,dx\right) = \frac{50}{3}\pi \approx 52{,}36\text{ E}^3$$

- Aufstellen der Funktionsgleichungen
- Die beiden Volumen werden addiert.

2) Gerade: $x_g = \frac{4}{3}\cdot y$, Kreis: $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x_k^{\,2} = 25 - y^2$

$$V_y = \pi\cdot\int_0^3 x_k^{\,2}\,dy - \pi\cdot\int_0^3 x_g^{\,2}\,dy = \pi\cdot\int_0^3 (x_k^{\,2} - x_g^{\,2})\,dy =$$
$$= \pi\cdot\int_0^3\left[(25 - y^2) - \left(\frac{4}{3}\cdot y\right)^2\right]dy = 50\pi \approx 157{,}08\text{ E}^3$$

- Die Volumen müssen subtrahiert werden.

6.66 Eine Fläche wird von den Funktionsgraphen $y_1 = f(x)$ bzw. $y_2 = g(x)$ und der x-Achse eingeschlossen. Berechne das Volumen des Drehkörpers, der bei Drehung dieser Fläche um die **1)** x-Achse bzw. **2)** y-Achse entsteht. Dokumentiere deine Vorgehensweise. ABC

a) $y_1 = x - 2,\ y_2 = \sqrt{x}$ **b)** $y_1 = \frac{1}{2}x^2,\ y_2 = 4 - x$ **c)** $y_1 = x^2,\ y_2 = x^2 - 8x + 16$

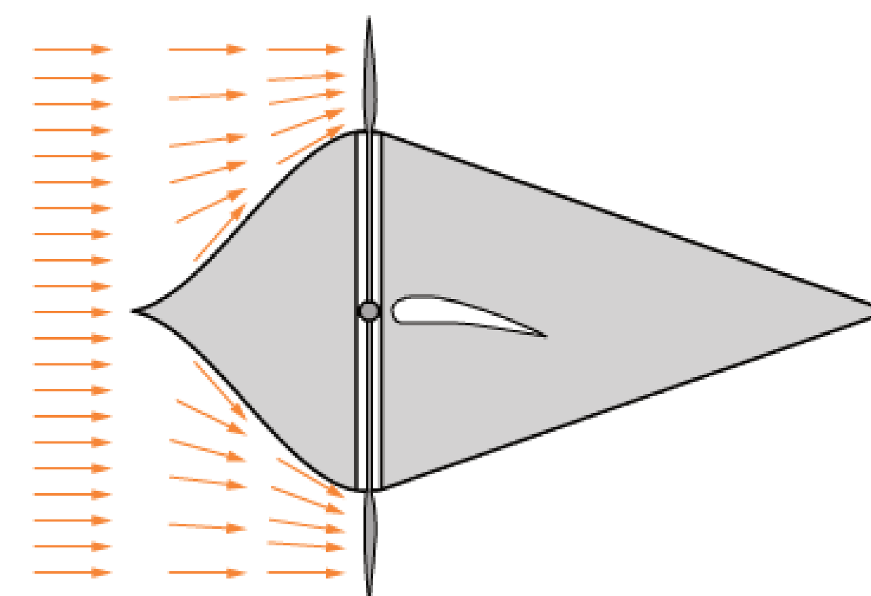
6.67 Eine Fläche wird von den Kurven $y_1 = f(x)$ und $y_2 = g(x)$ eingeschlossen. Berechne das Volumen des Drehkörpers, der bei Drehung dieser Fläche um die x-Achse entsteht. AB

a) $y_1 = x^2,\ y_2 = \sqrt{x}$ **b)** $y_1 = -x^2 + 4x,\ y_2 = 4 - x$ **c)** $y_1 = -x^2 + 6x + 3,\ y_2 = x^2 - 4x + 11$

6.68 Eine Polynomfunktion 2. Grads hat den Scheitel S(4|2). Der Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall [3; 5] beträgt $A = \frac{11}{3}\,E^2$. AB
Gib die Funktionsgleichung an und ermittle das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation der Fläche um die x-Achse entsteht.

6.69 Die erzeugende Kurve einer Windturbine setzt sich aus dem Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x$ im Intervall [0; 3] und der Tangente an der Stelle x = 3 im Intervall [3; b] zusammen. Die Intervallsgrenze b ist die Nullstelle der Tangente (Maße in Meter). ABCD





1) Ermittle die Gleichung der Tangente an die Funktion an der Stelle x = 3 sowie die Intervallgrenze b und zeichne beide Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
2) Berechne das Volumen des Tragkörpers der Windturbine.
3) Berechne, wie sich das Volumen des Drehkörpers verändert, wenn die Tangente an der Stelle x = 4 gelegt wird. Gib den Unterschied zu **2)** in Prozent an.

6.70 Bei einem Schülerbuffet am Tag der offenen Tür wird unter anderem Spezi, eine Mischung aus Cola und Orangenlimonade, ausgeschenkt. Die Form der Innenseite der Gläser wird durch die Rotation des Graphen der Funktion $f(x) = 0{,}06 \cdot x^4$ um die y-Achse beschrieben. Ist das Glas randvoll gefüllt, beinhaltet es 522 Milliliter. BC
1) Berechne die Höhe des Trinkglases, wenn der Boden 5 mm hoch ist.
2) Adnan und Tatjana sind zum Getränkeverkauf eingeteilt. Adnan gießt für ein Spezi jeweils zuerst Cola bis zu einer äußeren Höhe von 7 cm ein und füllt das Glas anschließend bis zu einer Höhe von 15 cm mit Orangenlimonade auf. Tatjana gießt erst Orangenlimonade bis 7 cm und füllt dann mit Cola bis 15 cm auf. Beide verkaufen jeweils 25 Gläser Spezi zu jeweils 2,50 €. Im Einkauf kostet ein Liter Cola 1,49 € und ein Liter Orangensaft 1,29 €. Ermittle, wer von den beiden mehr Gewinn erwirtschaftet hat, und berechne den Unterschied.

6.71 Der Meridian der Außenhaut eines Pigskins aus Gummi wird näherungsweise durch den Graphen der Funktion $f(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}12x$ beschrieben (Maße in cm). Man erhält den Meridian der Innenhaut, wenn man die Funktion f(x) um 5 mm nach unten verschiebt. AB





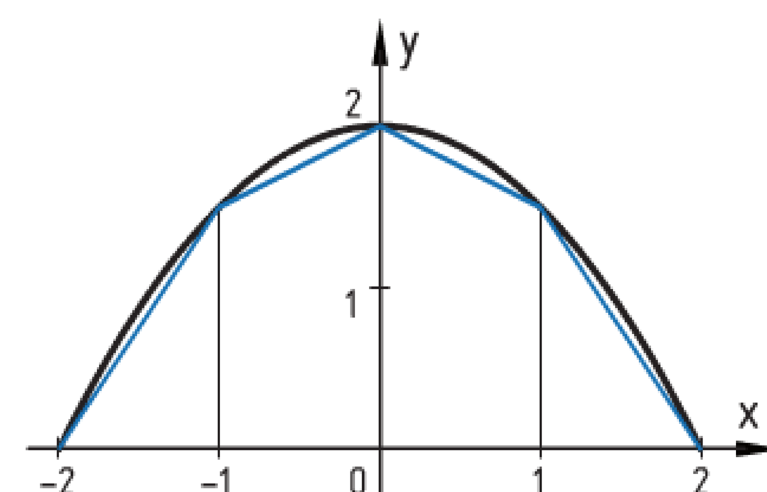
Berechne die Masse des Pigskins, wenn die Gummiart eine mittlere Dichte von $\rho = 0{,}96\ \frac{kg}{dm^3}$ hat und die Naht vernachlässigt wird.

6.3 Bogenlänge

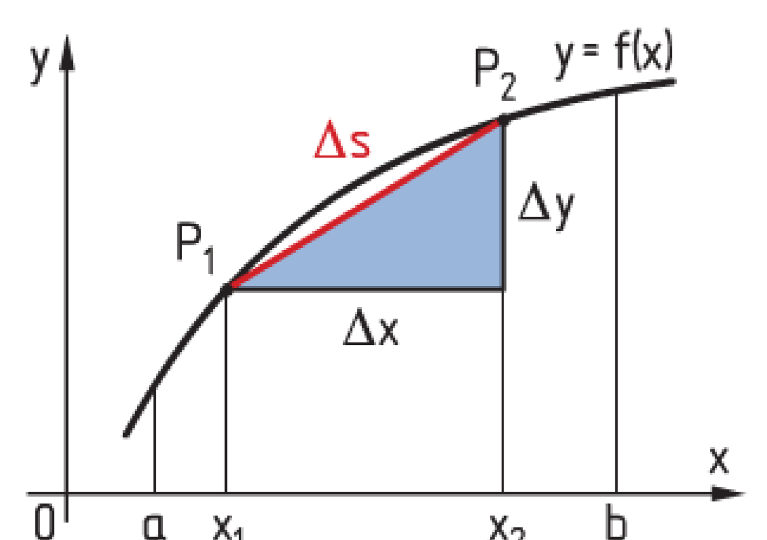


Die Grundidee bei den Anwendungen der Integralrechnung ist die Unterteilung in unendlich kleine Teilintervalle. Diese Idee kann auch bei der Berechnung der Länge eines Funktionsgraphen angewendet werden. Dabei wird eine Kurve durch Geradenstücke angenähert. Auch die Natur bedient sich dieses Mittels, um annähernd runde Formen zu gestalten.

AB **6.72** Ein Torbogen hat die Form einer Parabel. Um den Bogen auszukleiden, muss man dessen Länge berechnen. Diese Länge wird durch Sehnen der Parabel angenähert. Ermittle die ungefähre Länge des Torbogens (Angaben in Meter).



Um die Länge eines Graphen der Funktion y = f(x) in einem Intervall zu berechnen, unterteilt man diesen in kleine Kurvenstücke. Die Länge dieser Kurvenstücke wird mithilfe der Länge Δs der zugehörigen Sehne angenähert, die man mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen kann.



$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x)^2 \cdot \left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right) = \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right] \cdot (\Delta x)^2$$

Man erhält das unendlich kleine **Bogenelement** ds, indem man den Grenzübergang für $\Delta x \to 0$ durchführt:

$$(ds)^2 = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) \cdot (\Delta x)^2\right) = (1 + (y')^2) \cdot (dx)^2$$

• $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = (y')^2$

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx$$

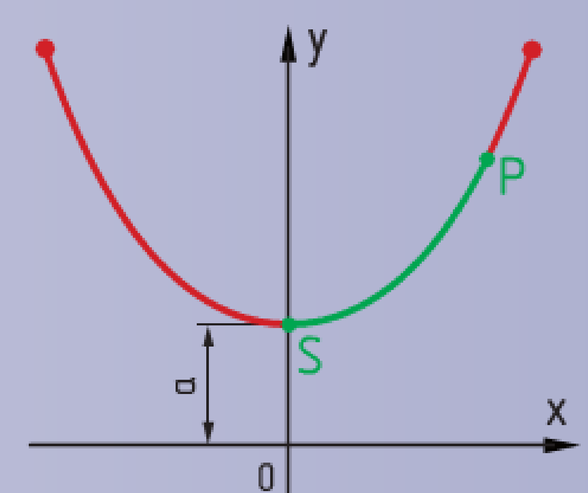
Die **Bogenlänge** s ist die Summe aller Bogenelemente ds. Man schreibt: $s = \int_s ds$

Bogenlänge s eines Funktionsgraphen y = f(x) im Intervall [a; b]

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Oft ist es nicht möglich, das Integral $\int \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ in geschlossener Form darzustellen. Man muss das bestimmte Integral dann mithilfe numerischer Integration (siehe Abschnitt 7) oder Technologieeinsatz berechnen.

B **6.73** Wird ein Seil an den beiden Enden aufgehängt, so entsteht eine Kettenlinie (vgl. Band 2) mit der Funktionsgleichung $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Berechne die Länge der Kettenlinie vom Scheitel S(0|a) bis zum Punkt $P(x_P|y_P)$.



Lösung:

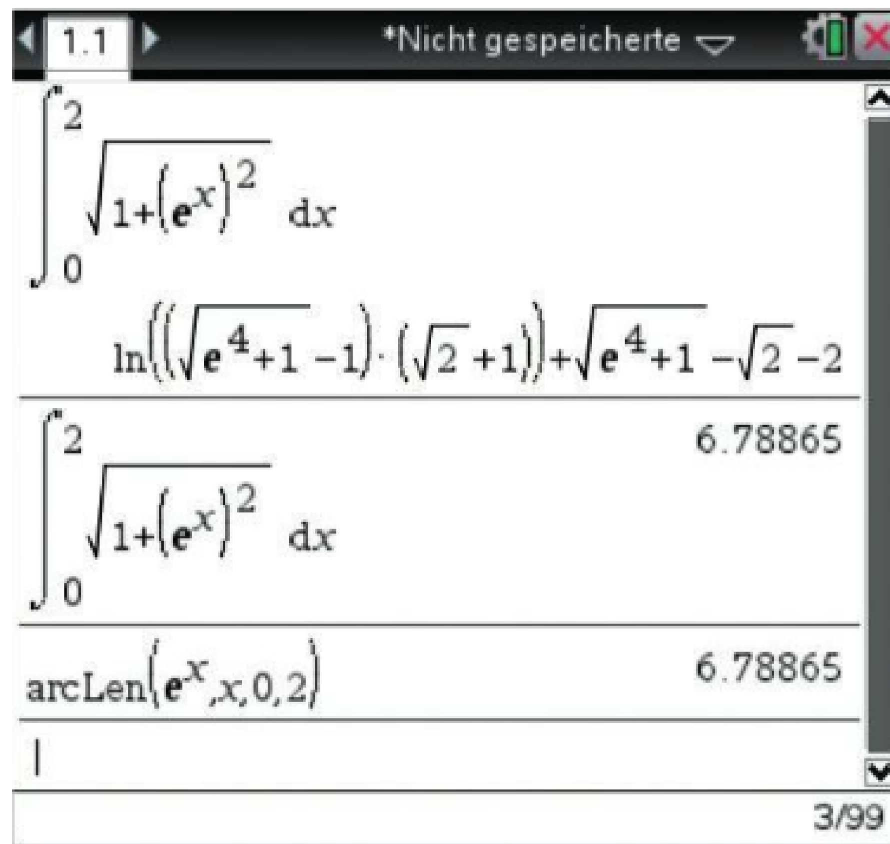
$$y' = a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$s = \int_0^{x_P} \underbrace{\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}}_{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx = \int_0^{x_P} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx = a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{x_P} = a \cdot \sinh\left(\frac{x_P}{a}\right)$$

Technologieeinsatz: Bogenlänge

TI-Nspire:

ZB: Gesucht ist die Bogenlänge des Funktionsgraphen von $f(x) = e^x$ im Intervall [0; 2].



- Die Berechnung kann mithilfe des Integrals $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ durchgeführt werden.
- Die Bogenlänge kann auch mit dem Befehl **arcLen(Funktion,Variable,untere Grenze,obere Grenze)** berechnet werden.

Bemerkung:
„arc" ist englisch für „Bogen" und „Len" steht für „lenght", also „Länge".

Aufgaben 6.74 – 6.76: Berechne die Längen der Funktionsgraphen in den angegebenen Intervallen.

6.74 **a)** $y = 4 \cdot \sqrt{x^3}$, [0; 2] **b)** $y = x \cdot \sqrt{x}$, [0; 4] **c)** $y = \cosh(x)$, [−2; 2] B

6.75 **a)** $y = 2 \cdot \sqrt{x}$, [1; 4] **b)** $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$, [−2; 2] **c)** $y = x^3$, [−1; 3] B

6.76 **a)** $y = \cos(x)$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ **b)** $y = \tan(x)$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ **c)** $y = \tanh(x)$, [0; 2] B

6.77 Der Seilverlauf der Golden Gate Bridge in San Francisco kann näherungsweise durch eine Parabel beschrieben werden. Der Abstand zwischen den beiden Stütztürmen beträgt w = 1 280 m, das Seil hängt h = 150 m tief durch. ABCD





1) Ermittle die Funktionsgleichung der Parabel, indem du den tiefsten Punkt des Seils in den Ursprung des Koordinatensystem legst.
2) Berechne die Länge der Tragseile zwischen den Türmen.
3) Die Akashi-Kaikyō-Brücke ist die Hängebrücke mit der größten Stützweite der Welt (Stand: 2013). Recherchiere ihre Abmessungen und ermittle die Länge ihrer Tragseile zwischen zwei Stütztürmen, wenn man von einer Parabel ausgeht.
4) Ermittle für beide Brücken die Gleichungen der Kurven, die ihre Form beschreiben, wenn man für die Tragseile die Form einer Kettenlinie $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ annimmt (vgl. Aufgabe 6.73) und berechne die Länge der Tragseile zwischen zwei Stütztürmen. Vergleiche die Ergebnisse mit den Werten aus **2)** und **3)** und gib den Unterschied jeweils in Prozent an.

6.78 Der Gateway Arch ist Teil einer Gedenkstätte (Jefferson National Expansion Memorial) in St. Louis (Missouri, USA). Der Bogen, dessen Höhe und Breite 192 m betragen, hat ungefähr die Form einer Kettenlinie mit $y = -38{,}92 \cdot \cosh\left(\frac{x}{38{,}92}\right) + b$. AB



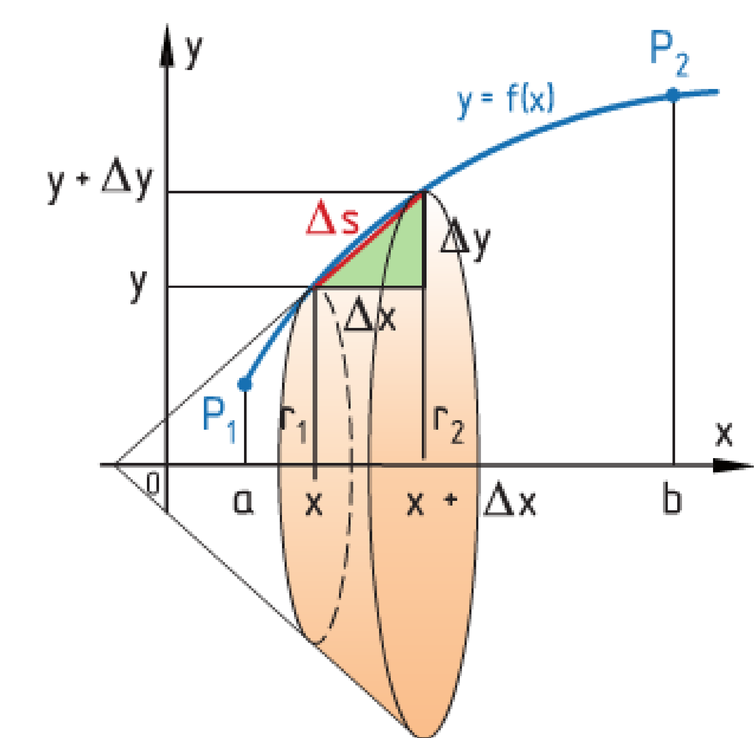
1) Berechne b und die Länge des Bogens.
2) Die Querschnittsflächen des Bogens sind gleichseitige Dreiecke. Wie viel m^2 Stahlblech waren für die Verkleidung notwendig, wenn man eine mittlere Seitenlänge von 10 m annimmt? (Krümmungen können vernachlässigt werden.)

6.4 Mantelfläche eines Drehkörpers



Parabolspiegel reflektieren parallel zur Achse einfallende Strahlen derart, dass sie in einem Punkt, dem so genannten Brennpunkt, gebündelt werden. Diese Eigenschaft kann unter anderem dazu verwendet werden, um Funkwellen zu empfangen. Kleinere Parabolspiegel werden zum Beispiel auch als Solarkocher verwendet.
Ein Parabolspiegel ist Teil eines Drehparaboloids, das durch Drehung einer Parabel um eine Achse entsteht, also eine **Drehfläche**.

Um die Größe der Spiegelfläche zu ermitteln, muss man die **Mantelfläche**, also den Inhalt der Drehfläche, ermitteln. Im Folgenden wird eine Formel zur Berechnung der Mantelfläche hergeleitet.



Man geht dabei von einer erzeugenden Kurve $y = f(x)$ mit $x \in [a; b]$ aus, die um die x-Achse gedreht wird. Der durch die Rotation entstehende Drehkörper wird in dünne Scheiben unterteilt. Diese Scheiben haben annähernd die Form von Kegelstümpfen mit der Höhe Δx, der Mantelstrecke Δs und den Radien $r_1 = y$ und $r_2 = y + \Delta y$.

Die Mantelfläche ΔM einer solchen Scheibe kann näherungsweise mithilfe der Formel für die Mantelfläche eines Kegelstumpfs berechnet werden (vgl. Band 1):
$M = (r_1 + r_2) \cdot \pi \cdot s$
Damit erhält man für eine Teilmantelfläche ΔM:
$\Delta M = [y + (y + \Delta y)] \cdot \pi \cdot \Delta s = \pi \cdot (2y \cdot \Delta s + \Delta y \cdot \Delta s)$

Führt man den Grenzübergang für $\Delta x \to 0$ durch, erhält man für das **Mantelelement** dM:

$$dM = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta M) = \lim_{\Delta x \to 0} [\pi \cdot (2y \cdot \Delta s + \Delta y \cdot \Delta s)]$$

Da für $\Delta x \to 0$ auch $\Delta y \to 0$ und $\Delta s \to 0$ gilt, nähert sich der Term $\Delta y \cdot \Delta s$ „viel schneller“ dem Wert 0, er kann daher vernachlässigt werden.

Somit gilt für das Mantelelement:
$dM = 2\pi \cdot y \cdot ds$

Mit $ds = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx$ (siehe Seite 236, Bogenlänge) ergibt sich der Gesamtflächeninhalt durch Integration.

$$M = 2\pi \cdot \int_{P_1}^{P_2} y\, ds = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Bei Drehung um die y-Achse wird analog vorgegangen.

Mantelfläche (Inhalt einer Drehfläche)

Bei Drehung der Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse: $M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$

Bei Drehung der Kurve $x = g(y)$ um die y-Achse: $M_y = 2\pi \cdot \int_c^d x \cdot \sqrt{1 + (x')^2}\, dy$

6.79 Ermittle die Formel für die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r. AB

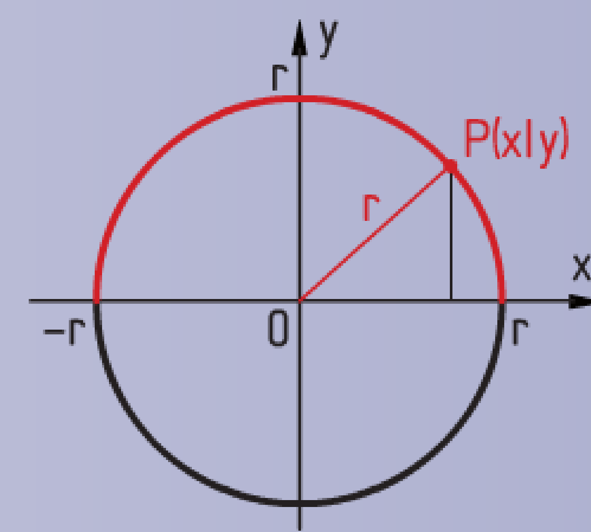
Lösung:

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\qquad y' = -\frac{2x}{2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

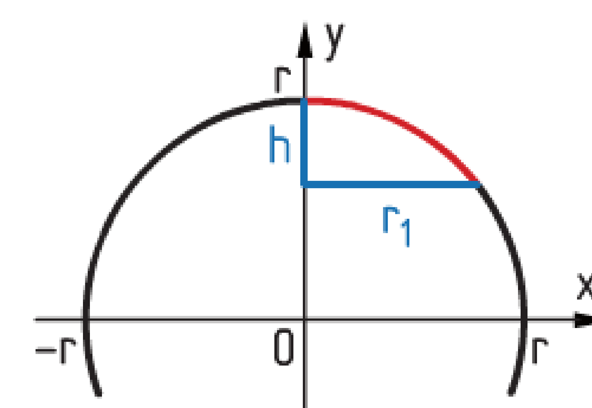
$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$

$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx =$

$= 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} r\, dx = 2\pi \cdot r \cdot x \Big|_{-r}^{r} = 2\pi \cdot r \cdot 2 \cdot r = 4r^2\pi$

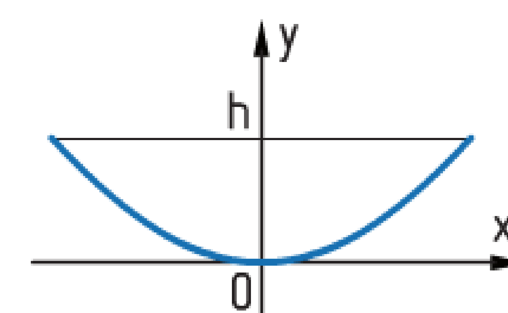


6.80 Berechne die Mantelfläche eines Drehkegels mit dem Radius r und der Höhe h. Vergleiche das Ergebnis mit der elementaren Formel. ABD

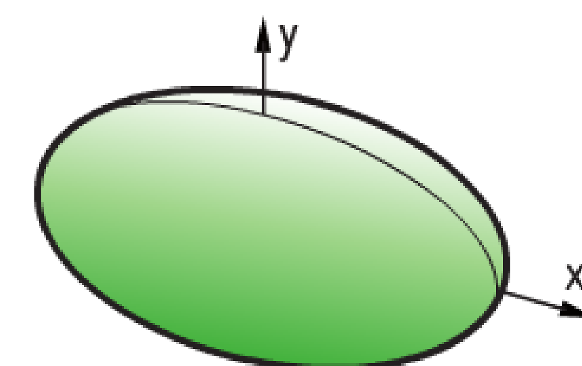


6.81 Zeige die Gültigkeit der Formel für den Flächeninhalt einer Kugelkappe: $A = 2\pi \cdot r \cdot h$ BD

6.82 Raphael möchte einen Parabolspiegel bauen. Dazu geht er von der erzeugenden Parabel $y = 0{,}25x^2$ mit der Höhe h = 1 m aus. Wie viel verspiegeltes Material wird zum Auskleiden benötigt? AB



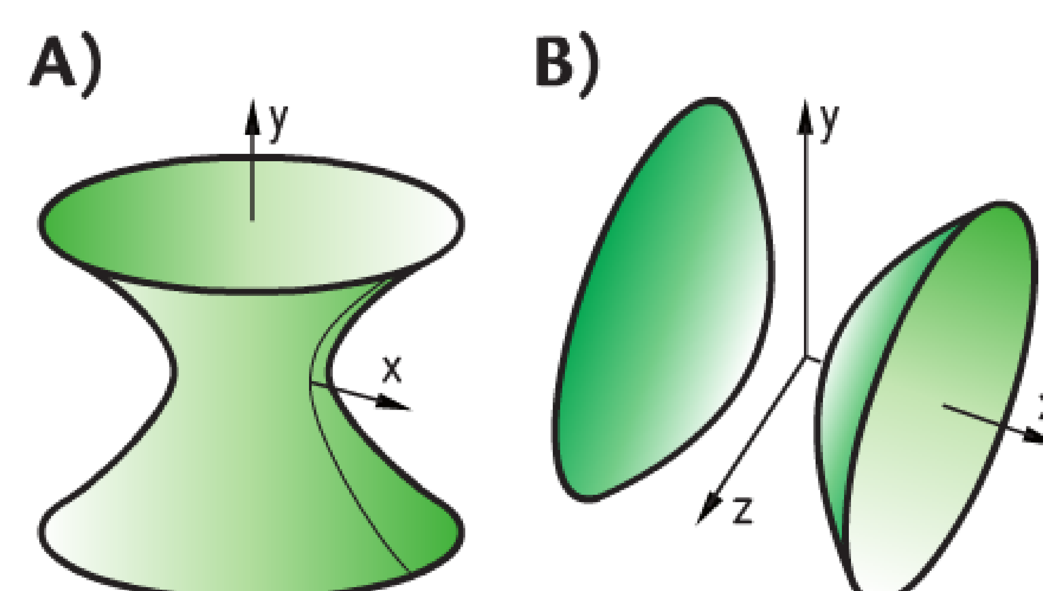
6.83 Für die Dekoration eines Ostermarkts sollen 150 große hölzerne Ostereier bemalt werden. Die Form von einem Ei kann annähernd durch ein Drehellipsoid beschrieben werden, das durch die Rotation der Ellipse ell: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ um die x-Achse entsteht (Angaben in dm). Berechne, wie viel Liter Farbe mindestens benötigt werden, wenn man mit einem Verbrauch von 0,75 Liter pro Quadratmeter rechnet. AB



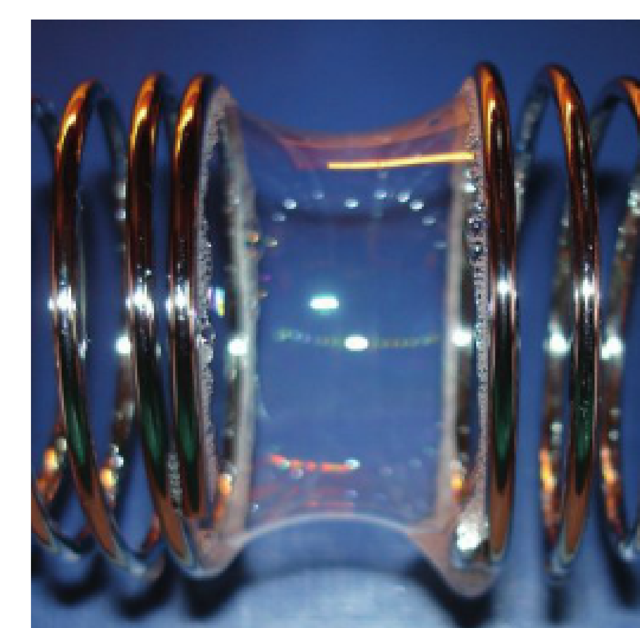
6.84 Gegeben ist die Hyperbel hyp: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. ABC

1) Ordne die Begriffe „einschaliges“ bzw. „zweischaliges Drehhyperboloid“ der jeweiligen Abbildung zu.

2) Berechne die Mantelfläche des Drehhyperboloids bei Drehung um die ***a)*** y-Achse für $-5 \leq y \leq 5$, ***b)*** x-Achse für $-5 \leq x \leq 5$.



6.85 Wird eine Kettenlinie um die x-Achse gedreht, so entsteht eine **Katenoide**. Diese ist eine Minimalfläche, also eine Fläche, die zwischen gegebenen Randkurven minimalen Flächeninhalt hat. Bei einer Katenoide sind die Randkurven zwei Kreise. Seifenblasen zwischen zwei Kreisen bilden aufgrund der Oberflächenspannung eine solche Minimalfläche.
Berechne die Mantelfläche der Katenoide, die durch Drehung der Kurve $y = \cosh(x)$ für $-1 \leq x \leq 1$ entsteht. Vergleiche das Ergebnis mit der Mantelfläche des Zylinders zwischen den beiden gleich großen Randkreisen. ABC TE

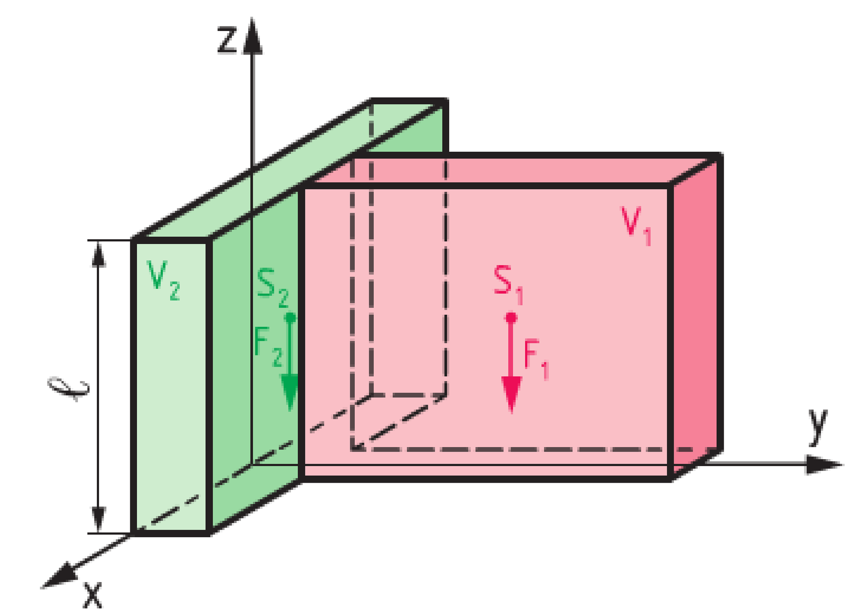


Anwendungen der Integralrechnung

6.5 Schwerpunktbestimmungen



Bei Kräfteberechnungen geht man davon aus, dass alle Kräfte im Schwerpunkt angreifen. Ist ein Körper im Schwerpunkt gelagert, so befindet er sich im Gleichgewicht. Physikalisch gesehen ist dort die Summe aller Momente null. Die Koordinaten des Schwerpunkts einer Fläche, wie zum Beispiel eines Dreiecks, können geometrisch oder vektoriell ermittelt werden. Nun sollen Schwerpunkte von beliebigen Flächen, Linien und Körpern ermittelt werden.



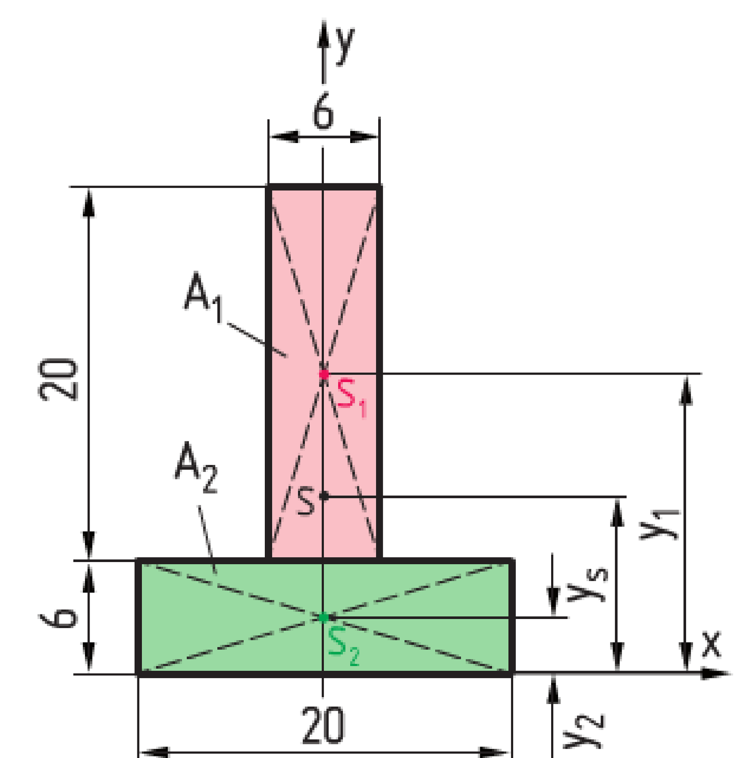
ZB: Die Lage des Schwerpunkts eines T-Trägers mit der Länge ℓ und der konstanten Dichte ρ soll ermittelt werden.

Der Träger wird dazu in einen liegenden und einen stehenden Quader zerlegt. Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt bei $x_S = 0$ und $z_S = \frac{\ell}{2}$. Es genügt also, y_S zu berechnen.

Jeder Teilquader erzeugt ein Drehmoment bezüglich der x-Achse, wenn man ihn aufstellt (siehe Abbildungen):

$M_{x_1} = F_1 \cdot y_1 = m_1 \cdot g \cdot y_1 = V_1 \cdot \rho \cdot g \cdot y_1 = A_1 \cdot \ell \cdot \rho \cdot g \cdot y_1$

$M_{x_2} = F_2 \cdot y_2 = m_2 \cdot g \cdot y_2 = V_2 \cdot \rho \cdot g \cdot y_2 = A_2 \cdot \ell \cdot \rho \cdot g \cdot y_2$



Maße in Zentimeter

Für das Gesamtmoment M_x gilt: $M_x = M_{x_1} + M_{x_2}$ und $M_x = F_{ges} \cdot y_S$

Daher ergibt sich für die y-Koordinate des Massenschwerpunkts:

$$y_S = \frac{M_x}{F_{ges}} = \frac{m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_2}{(m_1 + m_2) \cdot g} = \frac{A_1 \cdot \ell \cdot \rho \cdot y_1 + A_2 \cdot \ell \cdot \rho \cdot y_2}{A_1 \cdot \ell \cdot \rho + A_2 \cdot \ell \cdot \rho}$$

Durch Herausheben und Kürzen durch ℓ, ρ und g erhält man:

$$y_S = \frac{M_x}{F_{ges}} = \frac{M_{x_1} + M_{x_2}}{(m_1 + m_2) \cdot g} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_1}{A_1 + A_2}$$

Der Schwerpunkt des T-Trägers hat die Koordinaten $S\left(0 \middle| 9{,}5 \middle| \frac{\ell}{2}\right)$.

Die y-Koordinate des Schwerpunkts des Trägers hängt nicht von der Dichte ρ ab, da diese konstant ist. Sie hängt auch nicht von der Länge des Trägers ℓ und der Gravitationsbeschleunigung g ab, sondern nur von der Form der Querschnittsfläche. In der Statik muss oft der Schwerpunkt einer Fläche ermittelt werden. Allgemein können die Koordinaten des Schwerpunkts einer Fläche, die sich aus Teilflächen zusammensetzt, folgendermaßen berechnet werden:

$x_S = \frac{\Sigma A_i \cdot x_i}{A}$ bzw. $y_S = \frac{\Sigma A_i \cdot y_i}{A}$

Beim Bilden des Grenzwerts geht die Summe in ein Integral über. Das Integral heißt **statisches Moment** einer Fläche bzw. **Flächenmoment 1. Ordnung**.

Statisches Moment bezüglich der y-Achse: $M_y = \int_A x \, dA = A \cdot x_s$

Statisches Moment bezüglich der x-Achse: $M_x = \int_A y \, dA = A \cdot y_s$

6.5.1 Flächenschwerpunkt

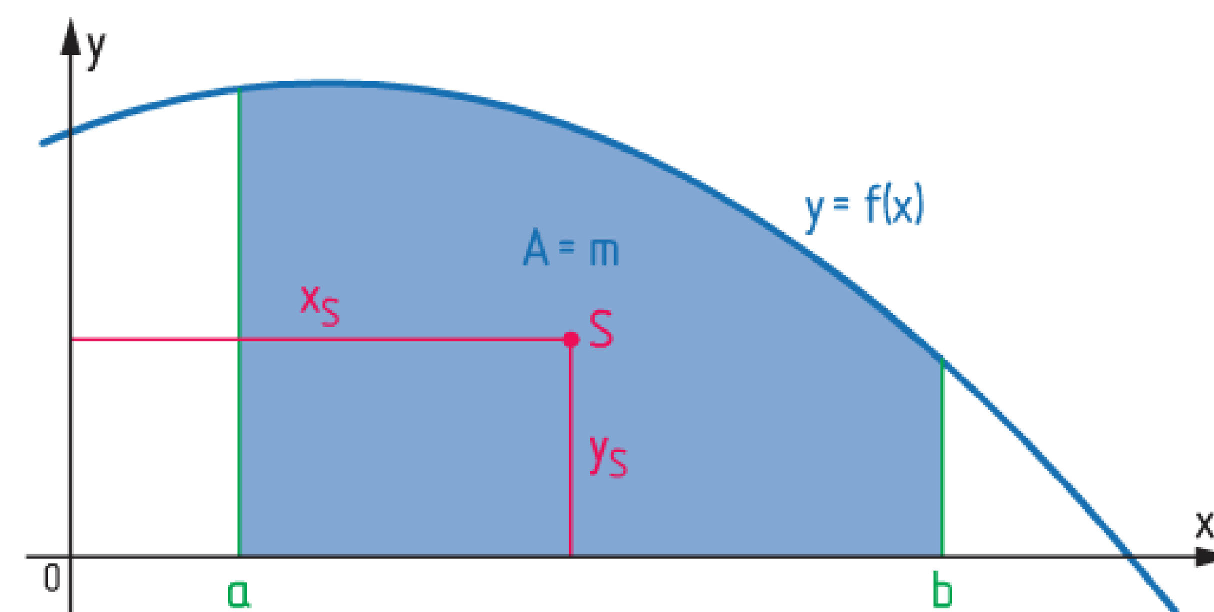
Mithilfe der statischen Momente kann der Schwerpunkt $S(x_S|y_S)$ einer beliebigen Fläche ermittelt werden.

Für die Fläche A, die vom Graphen einer Funktion y = f(x) und der x-Achse zwischen zwei Grenzen x = a und x = b eingeschlossen wird, gilt:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Stellt man sich vor, dass die Fläche A gleichmäßig mit Masse belegt ist, so ergeben sich auch für diese Fläche eine „Gewichtskraft" und damit auch die statischen Momente M_y bezüglich der y-Achse und M_x bezüglich der x-Achse:

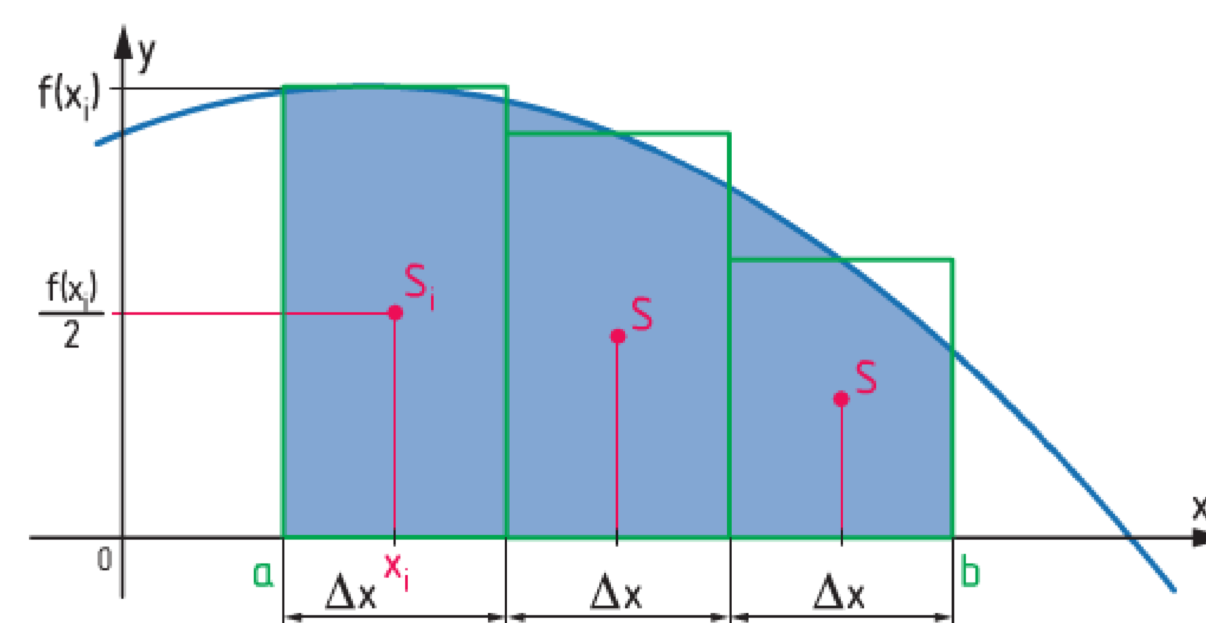
$M_y = A \cdot x_S$ und $M_x = A \cdot y_S$



Da die Koordinaten des Schwerpunkts nicht bekannt sind, werden die Flächenmomente durch Unterteilung der Gesamtfläche in Rechtecke ermittelt.

Der gesamte Flächeninhalt A wird in n Teilflächen ΔA_i mit jeweils gleicher Breite Δx unterteilt (i = 1, ..., n). Der Schwerpunkt S_i eines Flächenelements hat die Koordinaten $S_i(x_i|y_i) = S_i\left(x_i \middle| \frac{f(x_i)}{2}\right)$.

Man erhält für jede Teilfläche die Flächenmomente ΔM_{y_i} bezüglich der y-Achse sowie die Flächenmomente ΔM_{x_i} bezüglich der x-Achse:



- $\Delta M_{y_i} = \Delta A_i \cdot x_i = \Delta x \cdot f(x_i) \cdot x_i$
- $\Delta M_{x_i} = \Delta A_i \cdot \frac{f(x_i)}{2} = \Delta x \cdot f(x_i) \cdot \frac{f(x_i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot (f(x_i))^2$

Aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht ist bekannt, dass das Gesamtmoment eines Körpers gleich der Summe der Momente aller seiner Teilkörper ist. Auch für die Flächenmomente gilt daher:

- $M_y = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot x_i \cdot \Delta x$
- $M_x = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2 \cdot \Delta x$

Führt man den Grenzübergang für $\Delta x \to 0$ durch, so erhält man:

- $M_y = \int_a^b f(x) \cdot x\,dx$
- $M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$

Da für die Flächenmomente $M_y = A \cdot x_S$ bzw. $M_x = A \cdot y_S$ gilt, kann man x_S und y_S durch Gleichsetzen ermitteln:

- $M_y = A \cdot x_S = \int_a^b f(x) \cdot x\,dx$

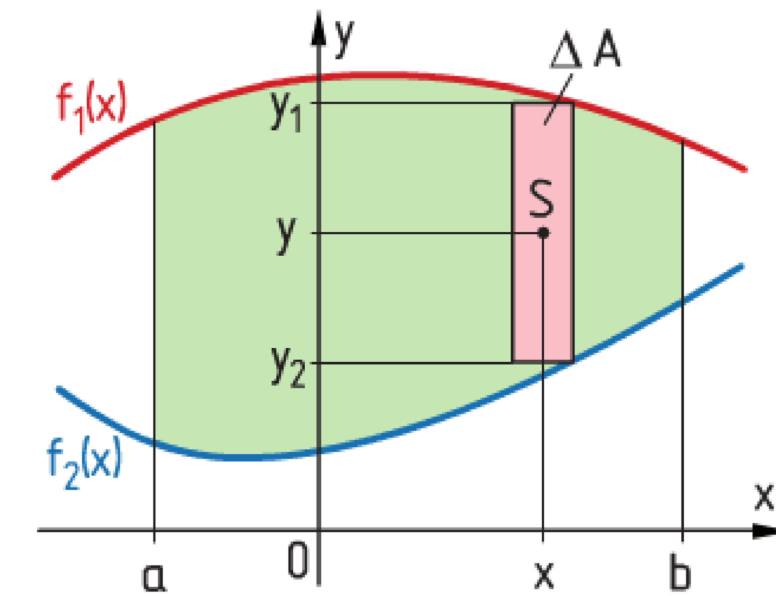
  $x_S = \frac{M_y}{A}$ bzw. $x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$

- $M_x = A \cdot y_S = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$

  $y_S = \frac{M_x}{A}$ bzw. $y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$

Anwendungen der Integralrechnung

Ist die Fläche nicht durch die x-Achse begrenzt, sondern durch eine weitere Kurve, so erfolgt die Berechnung des Schwerpunkts mit ähnlichen Überlegungen. Die Lage der Kurven bezüglich der x-Achse ist dabei nicht von Bedeutung.



Teilfläche ΔA zwischen den beiden Graphen:
$\Delta A = (f_1(x) - f_2(x)) \cdot \Delta x$

y-Koordinate des Schwerpunkts: $y = \frac{y_1 - y_2}{2} + y_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Für die Flächenmomente ergibt sich:

$\Delta M_{y_i} = \Delta A \cdot x = (y_1 - y_2) \cdot \Delta x \cdot x$

$\Delta M_{x_i} = \Delta A \cdot y = (y_1 - y_2) \cdot \Delta x \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2}) \cdot \Delta x$

Durch Aufsummieren, Grenzwertermittlung und Division durch den Flächeninhalt erhält man die Koordinaten des Schwerpunkts.

Koordinaten des Schwerpunkts $S(x_s|y_s)$ einer Fläche

- zwischen dem Funktionsgraphen von y = f(x) und der x-Achse:

  $x_S = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$ $\qquad$ $y_S = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$

  Der Graph liegt dabei im Intervall [a; b] oberhalb der x-Achse.

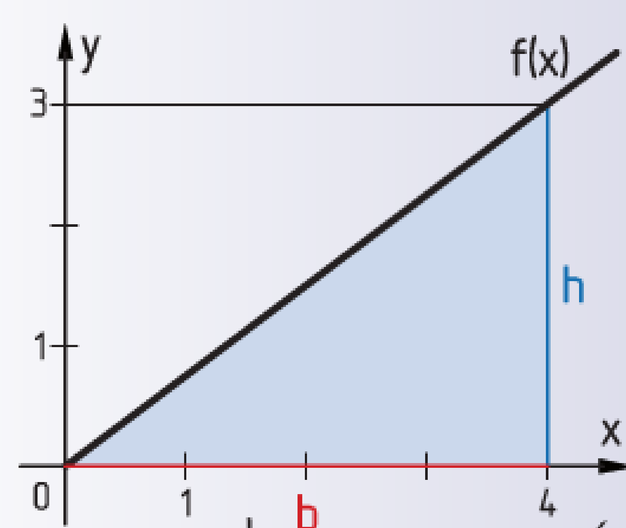
- zwischen den Funktionsgraphen von $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$:

  $x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$ $\qquad$ $y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b [(f_1(x))^2 - (f_2(x))^2]\,dx$

  Der Graph der Funktion f_1 liegt dabei im Intervall [a; b] oberhalb des Graphen von f_2.

B **6.86** Berechne mithilfe der statischen Momente die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = \frac{3}{4}x$, der x-Achse und der Senkrechten x = 4 eingeschlossen wird.

Lösung:



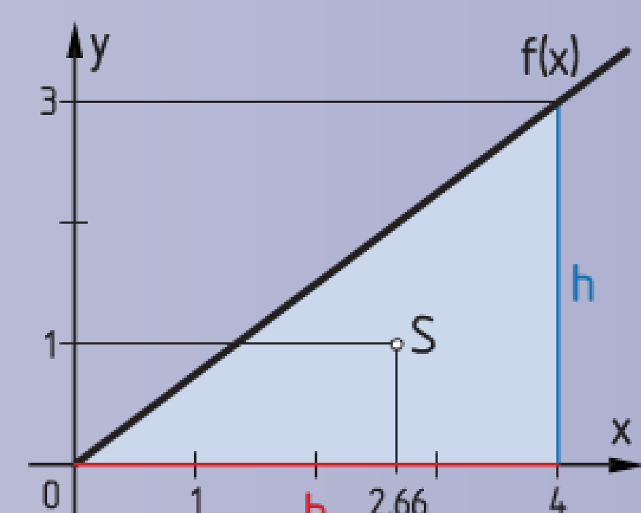
$A = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\ E^2$

- Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck.

$M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^4 \left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{3}{32} \cdot 4^3 = 6\ E^3$

$M_y = \int_a^b x \cdot y\,dx = \int_0^4 x \cdot \frac{3}{4} \cdot x\,dx = \frac{3}{4} \cdot \int_0^4 x^2\,dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{4^3}{4} = 16\ E^3$

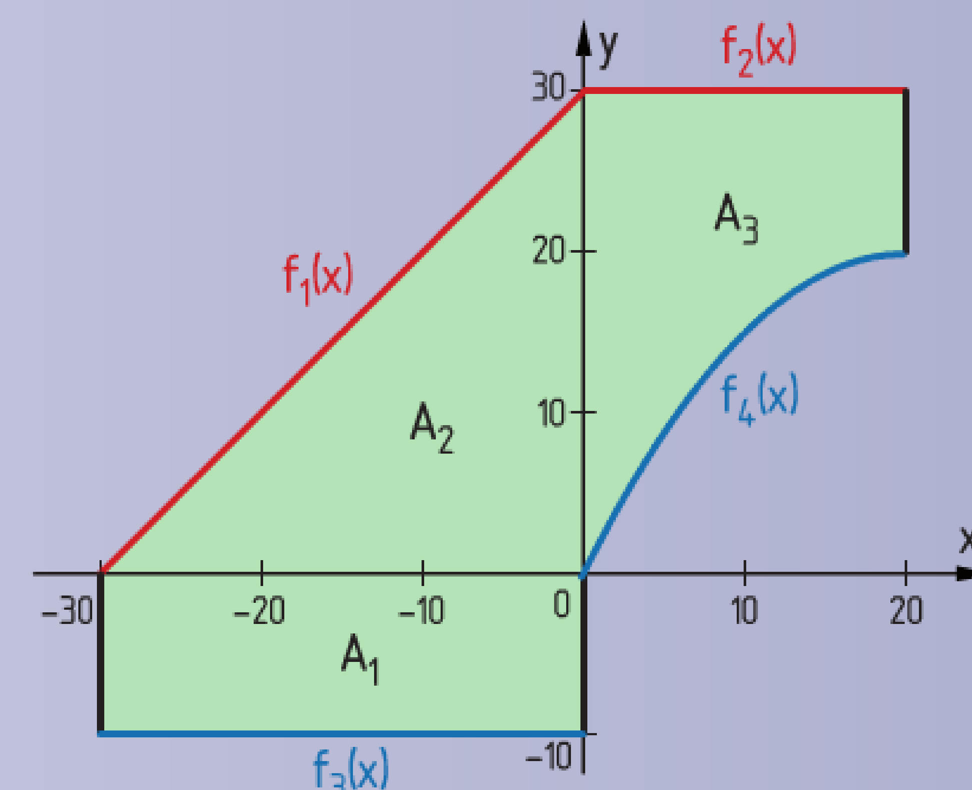
$x_S = \frac{M_y}{A} = \frac{16\ E^3}{6\ E^2} = \frac{8}{3}\ E \qquad y_S = \frac{M_x}{A} = \frac{6\ E^3}{6\ E^2} = 1\ E \qquad S\left(\frac{8}{3}\middle|1\right)$



Für den Schwerpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks in dieser Lage gilt: $S\left(\frac{2b}{3}\middle|\frac{h}{3}\right)$

AB

6.87 Berechne die Koordinaten des Flächenschwerpunkts der dargestellten Figur (Maße in cm). Dokumentiere deine Vorgehensweise.



Lösung:

Funktionsgleichungen der Teilstücke:

$f_1(x) = x + 30$ für $-30 \leqslant x < 0$
$f_2(x) = 30$ für $0 \leqslant x \leqslant 20$
} „**oben**"

$f_3(x) = -10$ für $-30 \leqslant x \leqslant 0$
$f_4(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 2x$ für $0 < x \leqslant 20$
} „**unten**"

A_1 ist ein Rechteck: $A_1 = 30\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 300\text{ cm}^2$

A_2 ist ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck: $A_2 = \frac{30\text{ cm} \cdot 30\text{ cm}}{2} = 450\text{ cm}^2$

A_3 ist die Fläche zwischen den Graphen von f_2 und f_4:

$$A_3 = \int_0^{20} \left[30 - \left(-\frac{1}{20} \cdot x^2 + 2x\right)\right] dx = \frac{1\,000}{3}\text{ cm}^2$$

Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{3\,250}{3}\text{ cm}^2 \approx 1\,083{,}33\text{ cm}^2$

Statische Momente M_y und M_x:

$$M_y = \int_a^b x \cdot [f_{oben}(x) - f_{unten}(x)]\, dx = \int_{-30}^{0} x \cdot [x + 30 - (-10)]\, dx + \int_0^{20} x \cdot \left[30 - \left(-\frac{1}{20} \cdot x^2 + 2x\right)\right] dx =$$

$$= \int_{-30}^{0} (x^2 + 40x)\, dx + \int_0^{20} \left(\frac{1}{20}x^3 - 2x^2 + 30x\right) dx = -9\,000 + \frac{8\,000}{3} = -\frac{19\,000}{3}\text{ cm}^3$$

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b [f^2_{oben}(x) - f^2_{unten}(x)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{-30}^{0} [(x + 30)^2 - (-10)^2]\, dx + \int_0^{20} \left[30^2 - \left(-\frac{1}{20} \cdot x^2 + 2x\right)^2\right] dx \right) = \frac{29\,600}{3}\text{ cm}^3$$

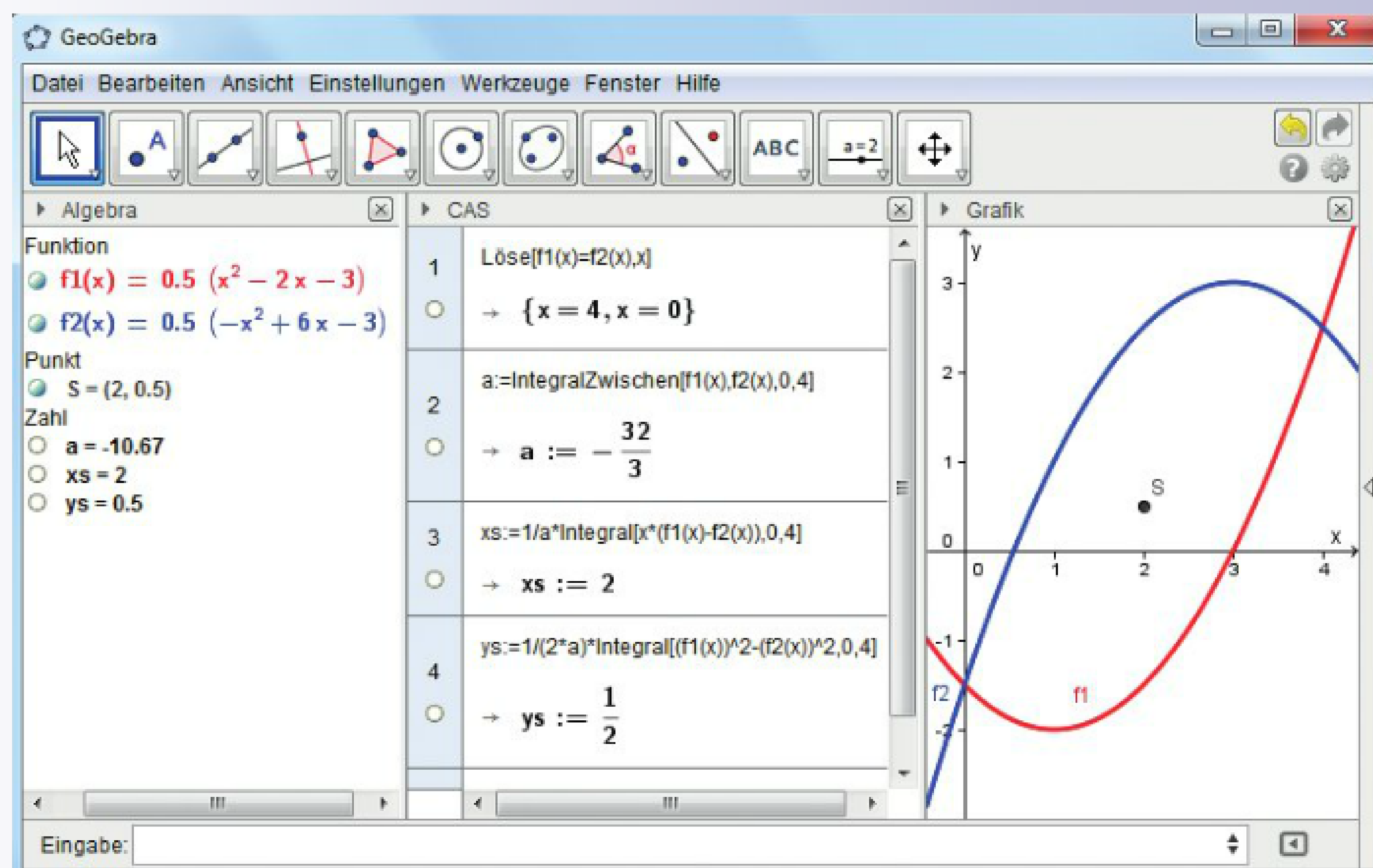
Koordinaten des Schwerpunkts:

$x_S = \frac{M_y}{A} = -\frac{19\,000\text{ cm}^3}{3\,250\text{ cm}^2} \approx -5{,}85\text{ cm}$, $y_S = \frac{M_x}{A} = \frac{29\,600\text{ cm}^3}{3\,250\text{ cm}^2} \approx 9{,}11\text{ cm}$ $S(-5{,}85|9{,}11)$

B

6.88 Berechne die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche, die von den Graphen von $f_1(x) = 0{,}5 \cdot (x^2 - 2x - 3)$ und $f_2(x) = 0{,}5 \cdot (-x^2 + 6x + 3)$ eingeschlossen wird.

Lösung mit GeoGebra:

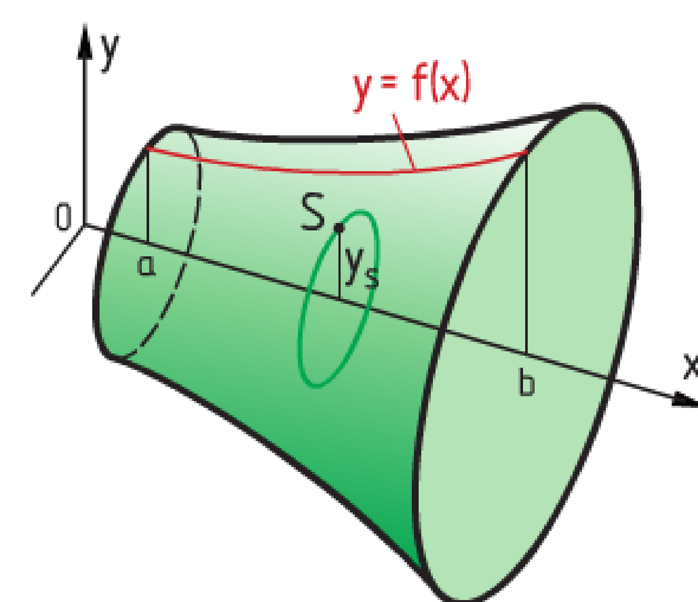


- Die Funktionen werden eingegeben und gezeichnet.
- Die Integrationsgrenzen werden im CAS-Fenster berechnet.
- Die Koordinaten des Schwerpunkts werden mithilfe des Integrals ermittelt.
- Der Schwerpunkt S wird eingezeichnet.

Der Schwerpunkt ist $S(2|0{,}5)$.

Anwendungen der Integralrechnung

1. Guldin'sche Regel



Mithilfe des Schwerpunkts kann das Volumen eines Drehkörpers mit dem Meridian $y = f(x)$ berechnet werden.

Für die y-Koordinate des Schwerpunkts wurde die Formel

$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b y^2\,dx$ hergeleitet.

Durch Umformen ergibt sich: $\int_a^b y^2\,dx = 2 \cdot A \cdot y_S$

Setzt man diesen Zusammenhang in die schon bekannte Formel für das Volumen bei Drehung um die x-Achse ein, so erhält man:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx = \pi \cdot 2 \cdot A \cdot y_S = 2 \cdot \pi \cdot y_S \cdot A = u_S \cdot A$$

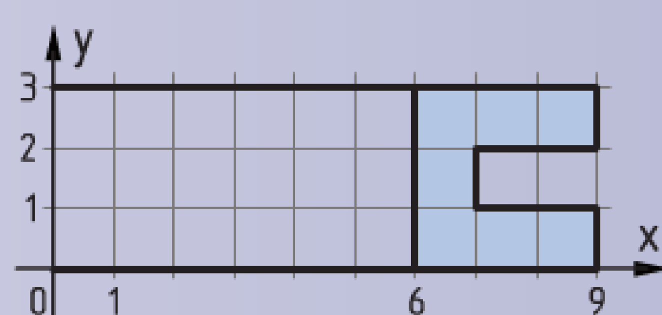
Der Ausdruck $u_S = 2 \cdot \pi \cdot y_S$ entspricht dabei dem Umfang eines Kreises mit dem Radius y_S, ist also der Weg, den der Schwerpunkt der Fläche bei der Drehung um die x-Achse zurücklegt. Dieser Zusammenhang gilt für beliebige Drehachsen und Flächen unter der Voraussetzung, dass die erzeugende Fläche die Drehachse nicht schneidet, sondern höchstens berührt.

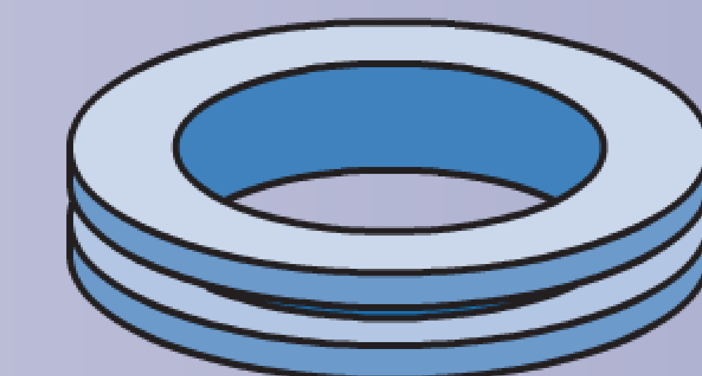
1. Guldin'sche Regel

Das Volumen eines Drehkörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche (Querschnittsfläche) und der Länge des Wegs des Schwerpunkts der Fläche bei einer vollen Drehung.
Bei Rotation um die x-Achse: $V_x = 2 \cdot \pi \cdot y_S \cdot A$
Bei Rotation um die y-Achse: $V_y = 2 \cdot \pi \cdot x_S \cdot A$

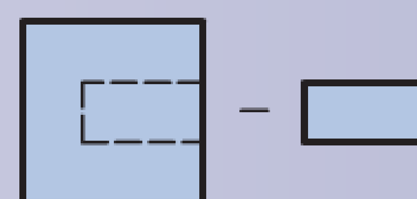
Diese Regel wurde von Paul Guldin (in der Schweiz geborener, später in Österreich tätiger Mathematiker, 1577 – 1643) formuliert und nach ihm benannt. Sie wurde sinngemäß bereits im 3. Jahrhundert von Pappos von Alexandrien (griech. Mathematiker, um 300 n. Chr.) verwendet.

B **6.89** Berechne die Masse eines Aluminiumrings mit U-förmigem Querschnitt.
$\left(\text{Maße in cm, } \rho = 2{,}7\,\frac{g}{cm^3}\right)$





Lösung:
$A = 9 - 2 = 7\text{ cm}^2$



$x_S = \frac{9 \cdot (6 + 1{,}5) - 2 \cdot (6 + 2)}{9 - 2} = \frac{103}{14} \approx 7{,}36\text{ cm}$

$V_y = 2 \cdot \pi \cdot x_S \cdot A = 2 \cdot \pi \cdot \frac{103}{14}\text{ cm} \cdot 7\text{ cm}^2 \approx 323{,}58\text{ cm}^3$

$m = V \cdot \rho \approx 873{,}68\text{ g}$

● Es wird nur x_S benötigt. Die Berechnung erfolgt durch Subtraktion der Momente bzw. Teilflächeninhalte.

ABC **6.90** Stelle ein Rechteck mit der Länge a und der Breite b so in einem Koordinatensystem dar, dass ein Eckpunkt im Ursprung und eine Seite auf der x-Achse liegt. Bestimme dessen Schwerpunktskoordinaten
1) mithilfe von Flächenelementen, ***2)*** mithilfe des Funktionsgraphen.

6.91 Ermittle den Flächenschwerpunkt des in Abbildung 6.1 dargestellten Trapezes mithilfe der statischen Momente. Überprüfe dein Ergebnis durch elementare Berechnungen. ABC

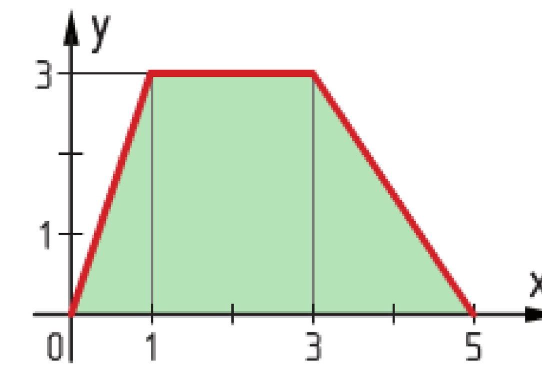


Abb. 6.1

6.92 Gib die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche an, die von dem gegebenen Funktionsgraphen, der x-Achse und der Senkrechten x = a eingeschlossen wird. B

a) $y = \sqrt{x}$, a = 4
b) $f(x) = (x-1)^2 + 2,\ x \geqslant 0,\ a = 3$
c) $y = 2x + 3,\ x \geqslant 0,\ a = 5$
d) $f(x) = -x + 4,\ x \geqslant 0,\ a = 2$

6.93 Gib die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche zwischen der Geraden y = d (d > 0), dem Funktionsgraphen von $y = \sqrt{x}$ und der y-Achse an. B

6.94 Berechne die Schwerpunktkoordinaten einer Parabelfläche mithilfe von Flächenelementen (Abb. 6.2). AB

6.95 Ermittle den Schwerpunkt der Fläche, die von den beiden gegebenen Funktionsgraphen eingeschlossen wird. B

a) $f_1(x) = -x^2 + 4,\ f_2(x) = x^2$ **b)** $f_1(x) = 0{,}5x^2,\ f_2(x) = -x + 3$

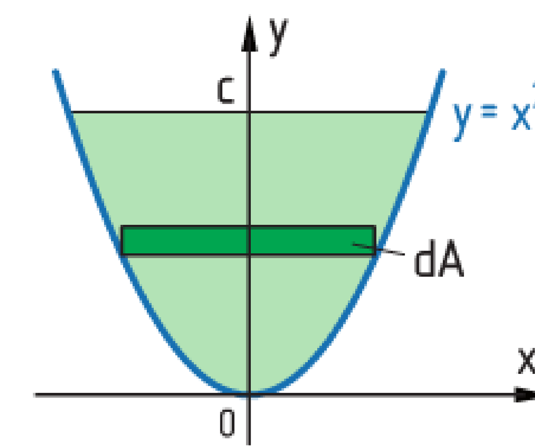
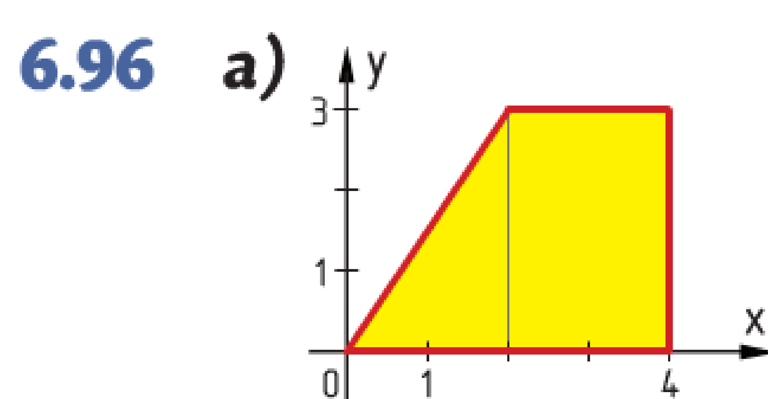


Abb. 6.2

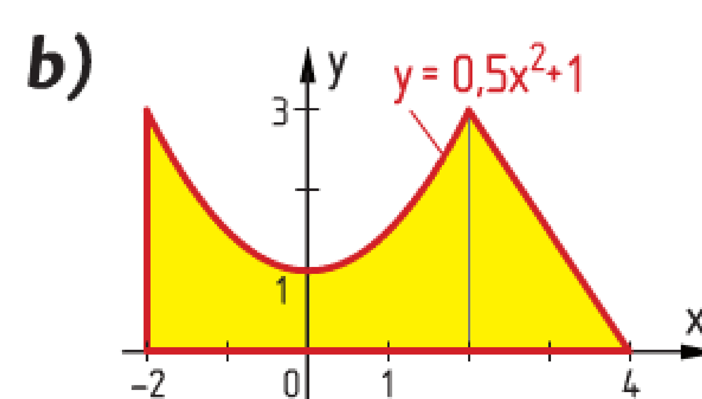
Aufgaben 6.96 – 6.98: Ermittle die Schwerpunktkoordinaten der dargestellten Flächen.

6.96 ABC

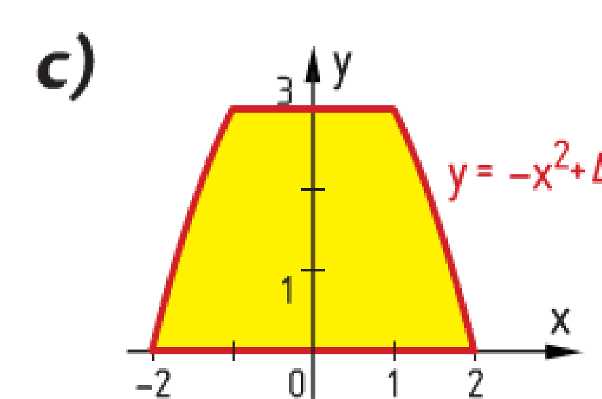
a)



b)

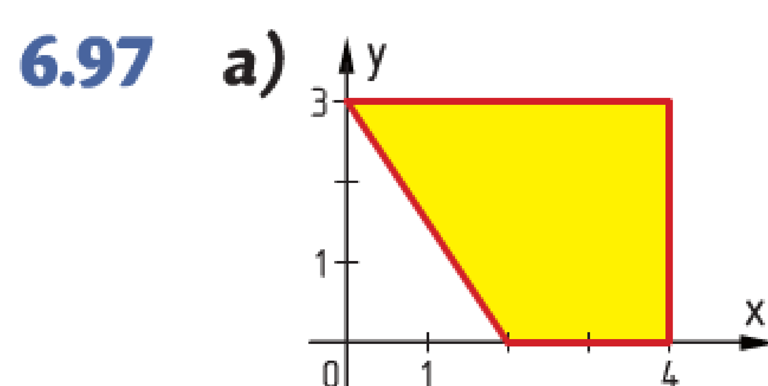


c)

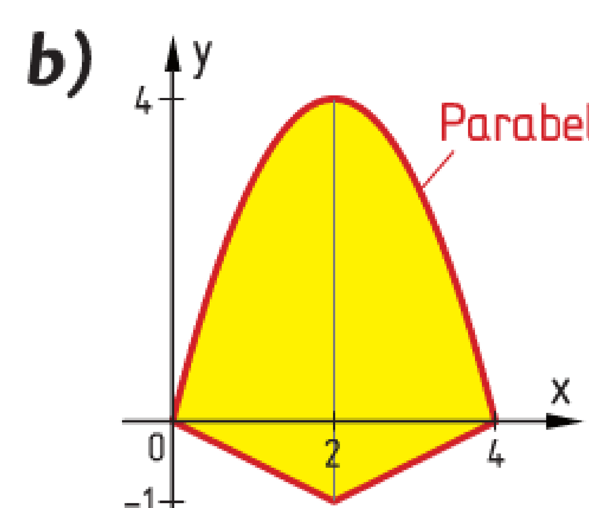


6.97 ABC

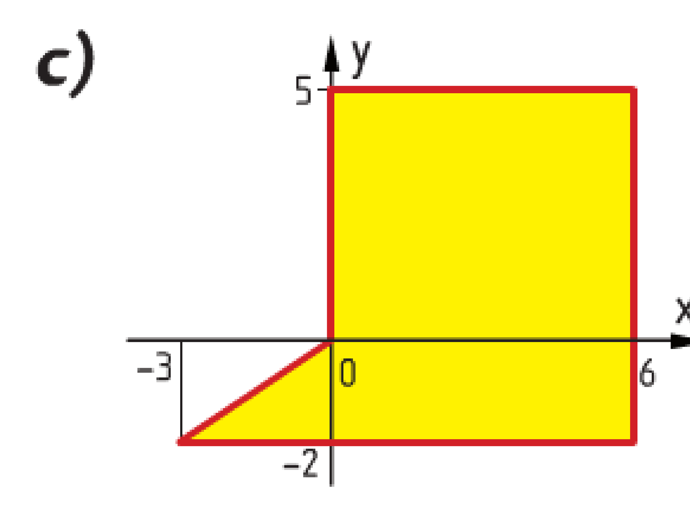
a)



b)

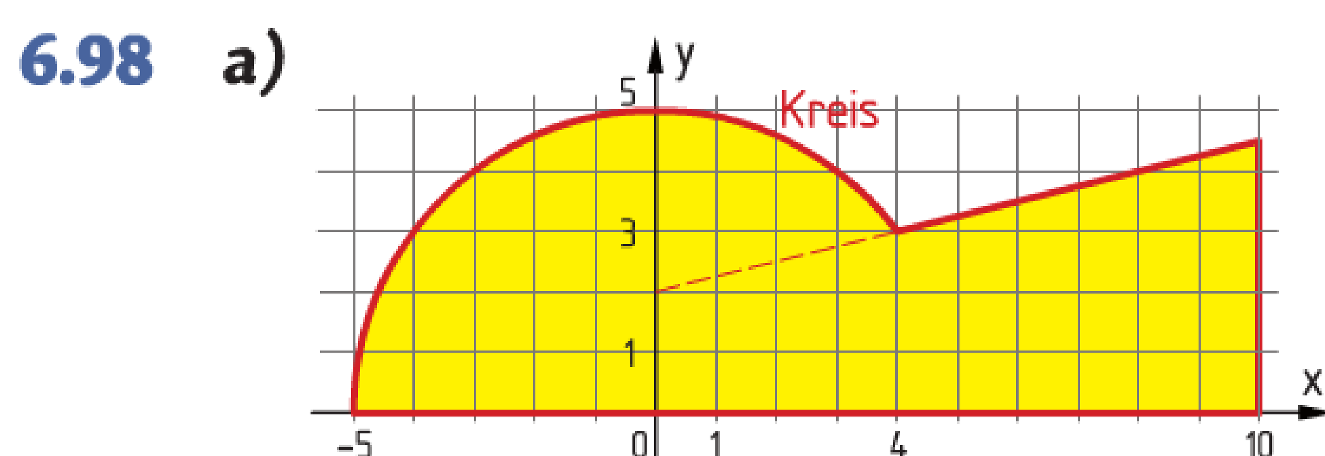


c)

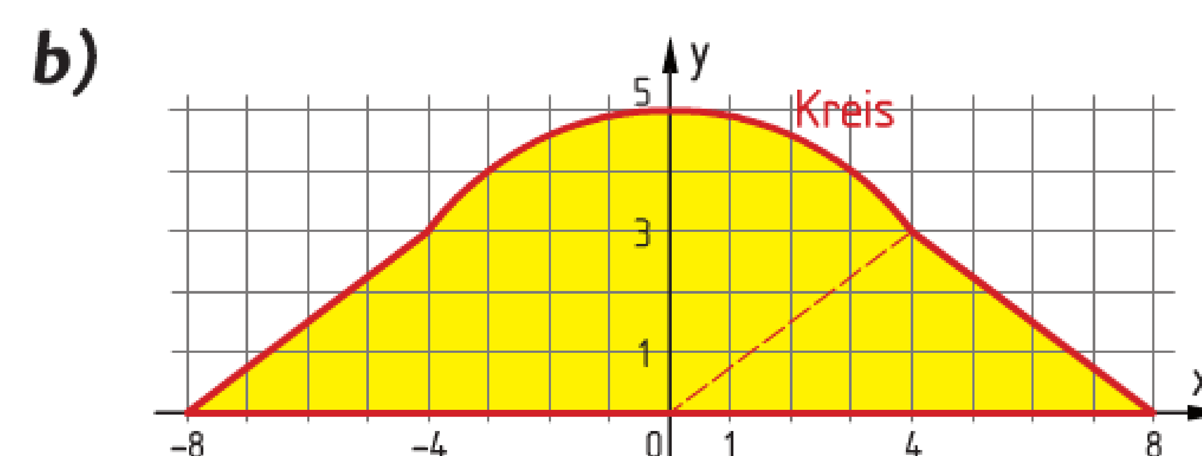


6.98 ABC TE

a)



b)



6.99 Gib die Koordinaten des Schwerpunkts der Fläche an, die vom Funktionsgraphen, der x-Achse und den Senkrechten x = a und x = b eingeschlossen wird. B

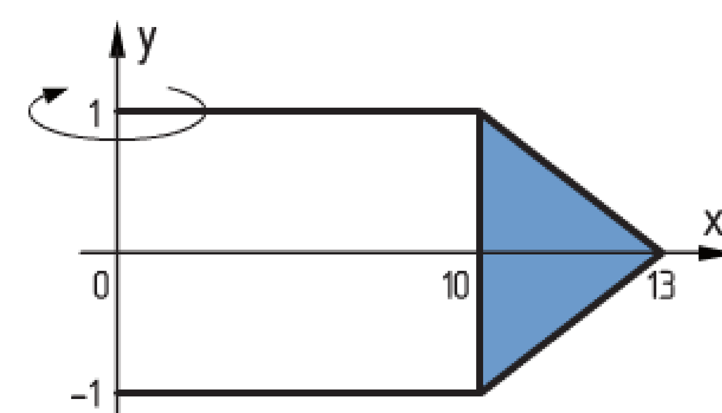
a) $y(x) = \cos(x),\ a = 0,\ b = \frac{\pi}{4}$ **b)** $y(x) = \sin(x),\ a = 0,\ b = \pi$ **c)** $f(x) = e^x,\ a = -2,\ b = 1$

6.100 Florian möchte für Lena einen Gugelhupf backen. Der Meridian der Backform kann durch die Kurve $y = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - 16x^2 + 69x - 54)$ zwischen ihren Nullstellen im ersten Quadranten bei Rotation um die y-Achse genähert werden (Maße in cm). Stelle die Kurve grafisch dar und berechne mithilfe der 1. Guldin'schen Regel, wie viel Milliliter Teigmasse Florian für den Gugelhupf vorbereiten muss, wenn er die Backform bis 1 cm unter den Rand mit Teig füllen möchte. AB TE

Anwendungen der Integralrechnung

BC **6.101** Ermittle den Schwerpunkt einer Halbkreisfläche mithilfe der 1. Guldin'schen Regel. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

AB **6.102** Die Querschnittsfläche eines Riemens aus Kunststoff ist ein gleichschenkliges Dreieck. Berechne die Masse des Riemens, wenn die Dichte $\rho = 1{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ beträgt (Maße in cm).



AB **6.103** Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn sich die Cosinuskurve im Bereich $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ um die x-Achse dreht,
1) durch Anwenden der Volumenformel, ***2)*** mithilfe der 1. Guldin'schen Regel.

6.5.2 Linien- und Volumenschwerpunkt

Linienschwerpunkt

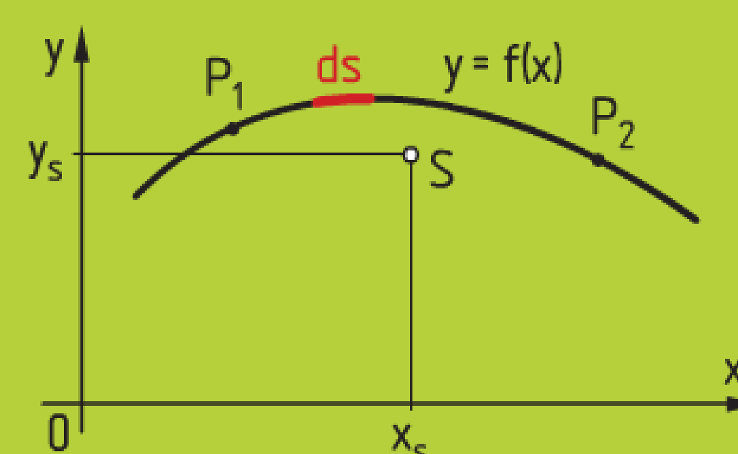
Der Schwerpunkt einer Linie kann durch die Zerlegung einer Kurve in Streckenelemente ds ermittelt werden. Dieser Schwerpunkt liegt im Allgemeinen nicht auf der Kurve.

Statische Momente einer Linie

$$M_x = \int_{x_1}^{x_2} y\,ds \qquad M_y = \int_{x_1}^{x_2} x\,ds \qquad \text{mit } ds = \sqrt{1 + (y')^2}\cdot dx$$

Linienschwerpunkt

$$x_S = \frac{M_y}{s} \qquad y_S = \frac{M_x}{s} \qquad \text{mit } s = \int_{x_1}^{x_2} ds$$

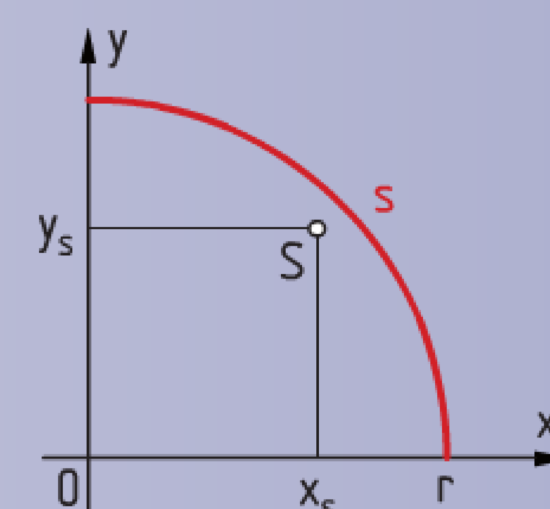


Mithilfe des Linienschwerpunkts kann die Mantelfläche eines Drehkörpers berechnet werden.

2. Guldin'sche Regel

Die Mantelfläche M eines Drehkörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge des erzeugenden Kurvenstücks und der Länge des Wegs des Linienschwerpunkts bei einer vollen Drehung.
Bei Rotation um die x-Achse: $M = 2 \cdot \pi \cdot x_S \cdot s$
Bei Rotation um die y-Achse: $M = 2 \cdot \pi \cdot y_S \cdot s$

BC **6.104** Bestimme den Schwerpunkt eines Viertelkreisbogens mit dem Radius r mittels ***1)*** Linienschwerpunkt, ***2)*** 2. Guldin'scher Regel.



Lösung:

1) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $1 + (y')^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$

$M_x = \int_{P_1}^{P_2} y\,ds = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = r^2$

$s = \frac{r \cdot \pi}{2}$

$y_S = \frac{M_x}{s} = \frac{r^2}{\frac{r \cdot \pi}{2}} = \frac{2 \cdot r}{\pi}$

$S\left(\frac{2 \cdot r}{\pi} \middle| \frac{2 \cdot r}{\pi}\right) \approx S(0{,}64r|0{,}64r)$

2) $M_E = 2 \cdot r^2 \cdot \pi$

$M_G = 2 \cdot \pi \cdot x_S \cdot s$

mit $s = \frac{r \cdot \pi}{2}$

$M_G = x_S \cdot \pi^2 \cdot r$

$2 \cdot r^2 \cdot \pi = x_S \cdot \pi^2 \cdot r$

$x_S = \frac{2 \cdot r}{\pi} = y_S$

- Durch Gleichsetzen der elementaren Formel für M_E und der Guldin'schen Regel M_G kann der Schwerpunkt ermittelt werden.

Volumenschwerpunkt

Der Schwerpunkt eines Drehkörpers mit konstanter Dichte kann auf ähnliche Art ermittelt werden. Dazu wird der Drehkörper in Volumenelemente dV geteilt. Bei Drehung um die x-Achse liegt der Schwerpunkt aus Symmetriegründen auf der x-Achse. Die Herleitung der Formel erfolgt in Aufgabe 6.112.

Bei Dehnung um die y-Achse geht man analog vor.

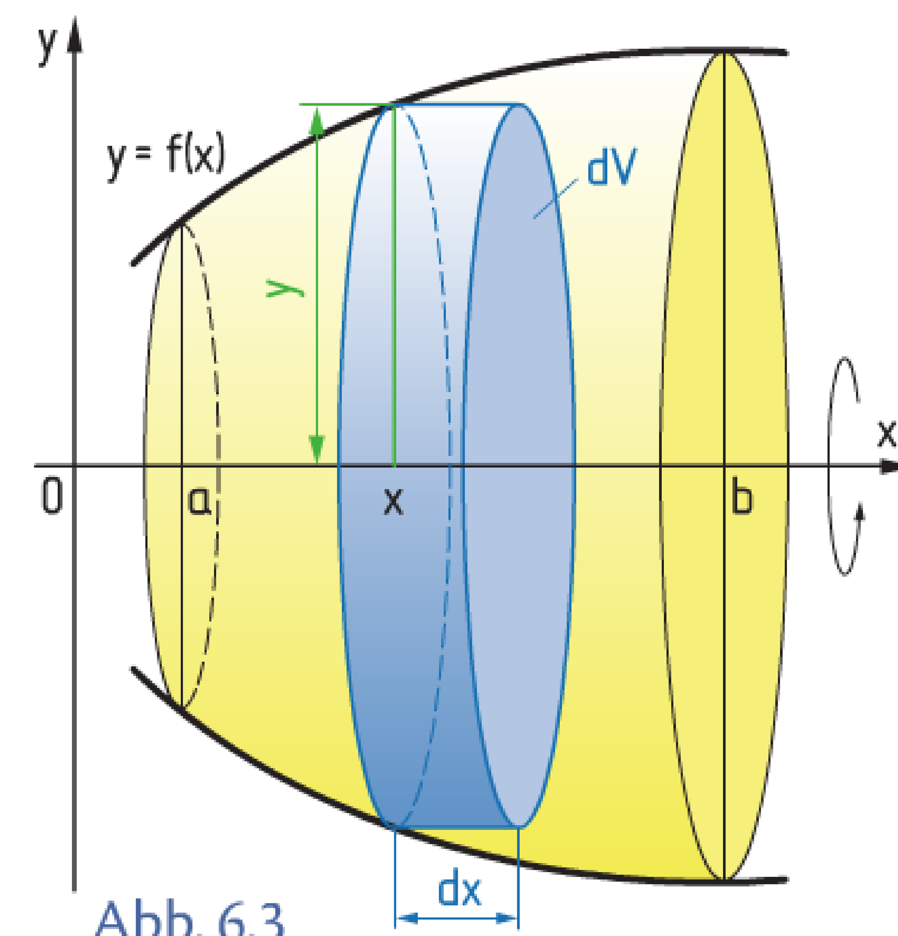


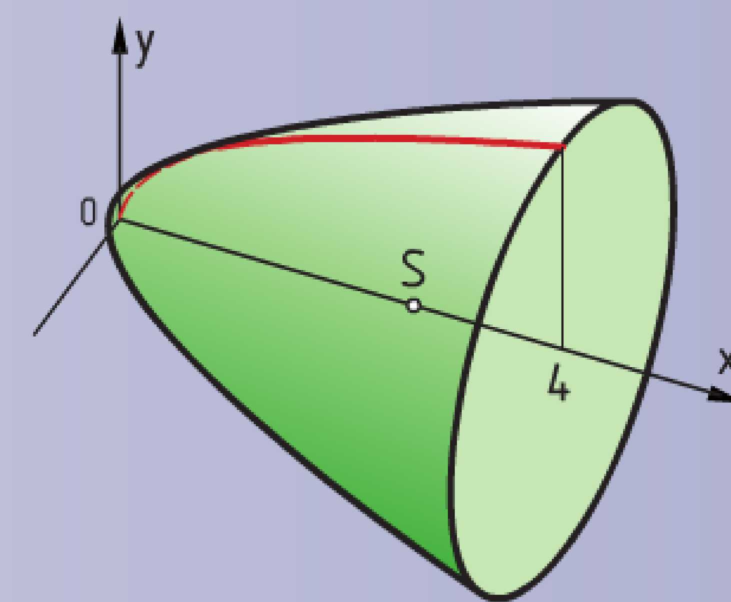
Abb. 6.3

Statisches Moment und **Schwerpunkt** eines Drehkörpers

Bei Drehung um die x-Achse: $M_{yz} = \pi \cdot \int_a^b x \cdot y^2\,dx \quad x_S = \frac{M_{yz}}{V_x},\ y_S = z_S = 0 \quad \text{mit } V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx$

Bei Drehung um die y-Achse: $M_{xz} = \pi \cdot \int_a^b y \cdot x^2\,dy \quad y_S = \frac{M_{xz}}{V_y},\ x_S = z_S = 0 \quad \text{mit } V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dx$

6.105 Ermittle den Schwerpunkt des Drehkörpers, der durch Drehung der Funktion $y = \sqrt{x}$ um die x-Achse für $0 \leq x \leq 4$ entsteht. B



Lösung:

$$M_{yz} = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} x \cdot y^2\,dx = \pi \cdot \int_0^4 x \cdot x\,dx = \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{64}{3}\pi\ E^4$$

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx = \pi \cdot \int_0^4 x\,dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi\ E^3$$

$$x_S = \frac{M_{yz}}{V_x} = \frac{8}{3}\,E \qquad S\left(\frac{8}{3}\Big|0\Big|0\right)$$

6.106 Für die Mantelfläche eines Kegelstumpfs mit den Radien r_1 und r_2 und der Höhe h gilt: ABD
$M = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$ mit $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$ ... Mantellinie
Überprüfe die Richtigkeit dieser Formel mithilfe der 2. Guldin'schen Regel.

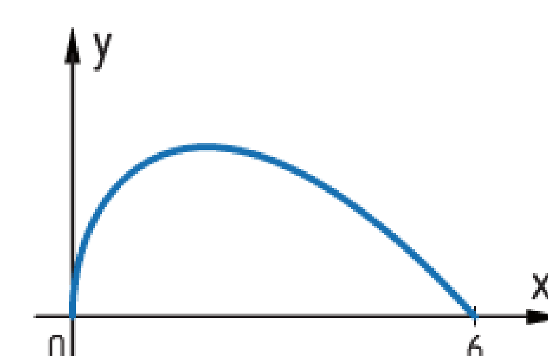
6.107 Gib mithilfe der 2. Guldin'schen Regel und der Mantelfläche eines Drehkegels mit dem Radius r und der Höhe h den Schwerpunkt der erzeugenden Strecke an. ABD

6.108 Ermittle die Koordinaten des Schwerpunkts der gegebenen Kurve. B
a) $y = x^2$, $[-2; 2]$ ***b)*** $y = \sin(x)$, $[0; \pi]$ ***c)*** $y = \cosh(x)$, $[-2; 2]$

6.109 Berechne die Schwerpunktskoordinaten des Drehkörpers. AB
a) Halbkugel mit dem Radius r ***b)*** Drehkegel mit dem Radius r und der Höhe h

6.110 Berechne den Volumenschwerpunkt des halben eiförmigen Drehellipsoids, das durch Drehung der Ellipse ell: $4x^2 + 9y^2 = 36$ um die x-Achse entsteht. B

6.111 Die Schleife der Parabola nodata mit $y = \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot (6 - x)$ (siehe nebenstehende Abb.) dreht sich um die x-Achse. Berechne den Schwerpunkt des entstehenden Drehkörpers. B



6.112 Leite die Formel für den Volumenschwerpunkt her. Benutze dazu Abbildung 6.3. ABD

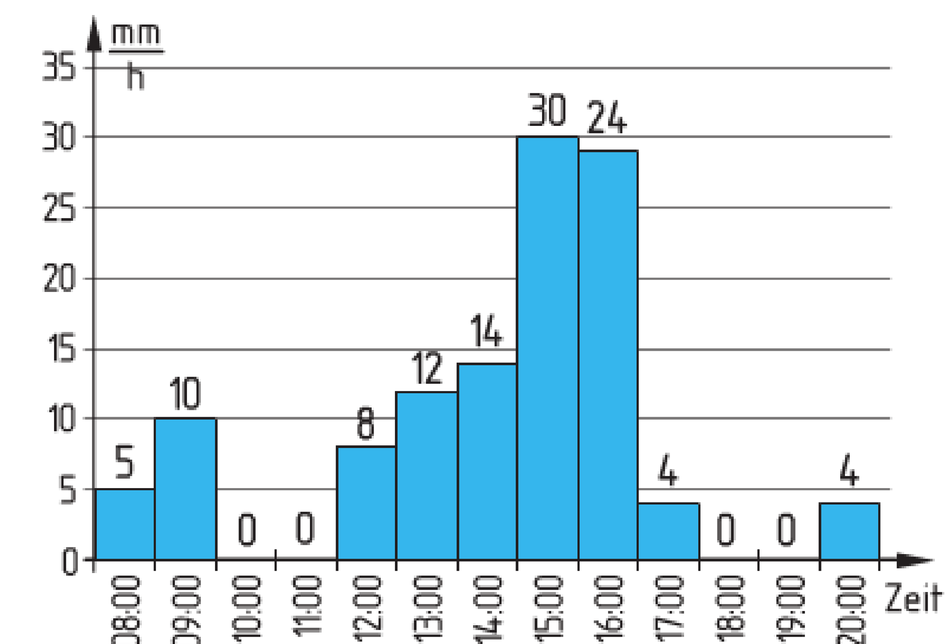
Anwendungen der Integralrechnung

6.6 Mittelwerte

Oft ist es notwendig, den „mittleren Wert" einer Funktion zu bestimmen. Dabei handelt es sich zum Beispiel um den mittleren Wasserverbrauch in einem Zeitraum oder die von einem Kraftwerk im Mittel gelieferte Leistung. In der Elektrotechnik sind der Gleichrichtwert, der den Mittelwert des Betrags eines Wechselstroms angibt, und der Effektivwert, der dem quadratischen Mittelwert entspricht, von praktischer Bedeutung (siehe Abschnitt 6.8.3).

ABC **6.113** In der Abbildung ist die Regenmenge (in $\frac{mm}{h}$) während eines Tages dargestellt.

Gib die mittlere Regenmenge in $\frac{mm}{h}$
1) von 10:00 – 13:00 Uhr,
2) von 14:00 – 17:00 Uhr,
3) während der dargestellten Zeit an.

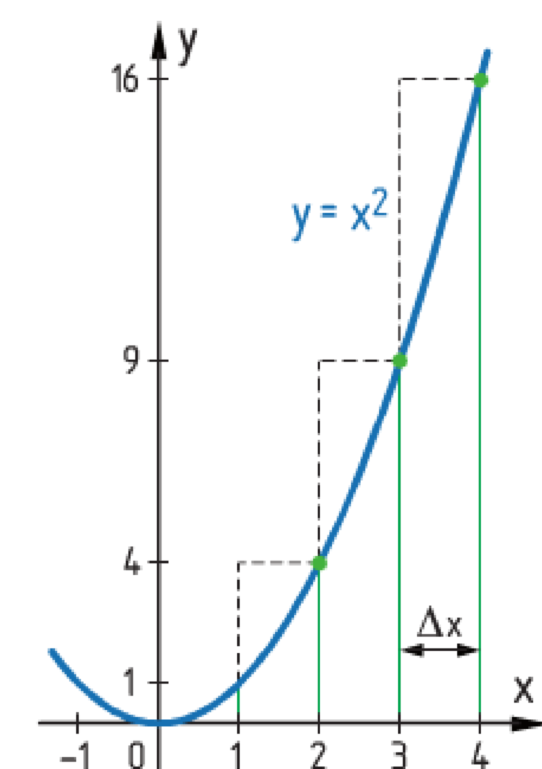


Um den Mittelwert von diskreten Werten zu ermitteln, verwendet man das arithmetische Mittel. Bei stetigen Vorgängen benötigt man die Integralrechnung.

ZB: Der „mittlere" Funktionswert der Funktion $y = x^2$ soll bestimmt werden. Um diesen näherungsweise zu ermitteln, wird das Intervall [1; 4] zum Beispiel in drei gleich große Teilintervalle unterteilt und der Mittelwert der Funktionswerte ermittelt:

$\bar{f}(x) = \frac{4 + 9 + 16}{3} = 9{,}\dot{6}$

Dieser Wert nähert den Mittelwert der Funktion umso genauer an, je mehr Unterteilungen getroffen werden.



Allgemein wird ein Intervall [a; b] in n gleiche Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{b - a}{n}$ unterteilt.

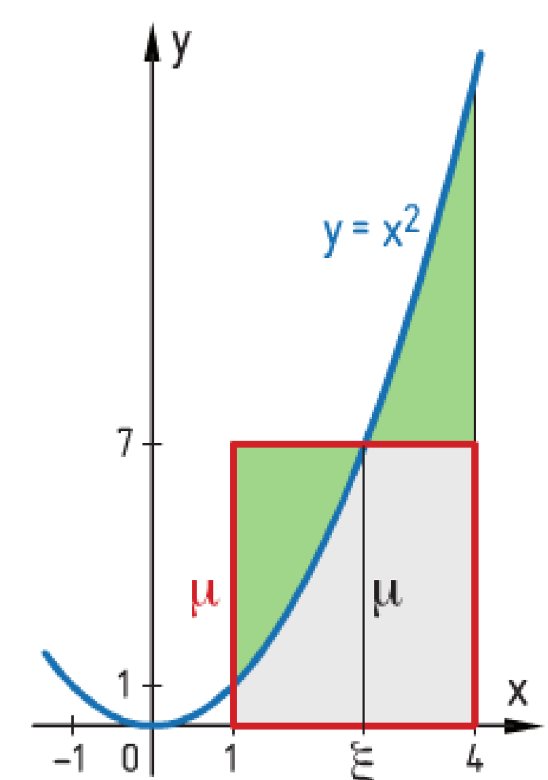
Für den mittleren Funktionswert gilt dann:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{b - a} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Die Summe im zweiten Term ist die Obersumme der Funktion. Führt man den Grenzübergang für $n \to \infty$ durch, so erhält man den Mittelwert μ einer Funktion:

$$\mu = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Formt man die Gleichung auf $\mu \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$ um, so kann die linke Seite als Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Länge (b – a) und der Höhe μ interpretiert werden. Gilt $f(x) \geqslant 0$ in [a; b], so hat das Rechteck denselben Flächeninhalt wie die Fläche zwischen dem Graphen von y = f(x) und der x-Achse.



Flächeninhalt im Intervall [1; 4]: $\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21\ E^2$

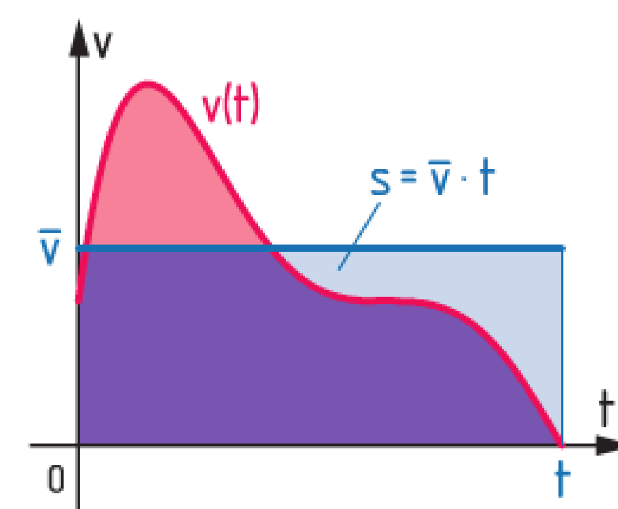
Das Rechteck hat die Breite (4 – 1) E = 3 E und den Flächeninhalt $A = 21\ E^2$.
Die Höhe und somit der Mittelwert der Funktion $f(x) = x^2$ ist daher $\mu = 7$ E.
Der **erste Mittelwertsatz der Integralrechnung** besagt, dass der so genannte **lineare Mittelwert** μ einer Funktion immer existiert und bei stetigen Funktionen f ein Funktionswert ist: $\mu = f(\xi)$ mit $\xi \in D_f$

Anwendungen der Integralrechnung

Ist die Funktion f eine auf dem Intervall [a; b] stetige Funktion, so gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in [a; b]$, für die gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a)$

$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ heißt (linearer) **Mittelwert der Funktion** f.

Handelt es sich zum Beispiel um eine Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v mit $v \geqslant 0$, so entspricht der Mittelwert der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$. Sind auch negative Geschwindigkeiten möglich, so muss zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit der Betrag der Funktion verwendet werden.



Ist es notwendig, einen Mittelwert unabhängig von den Vorzeichen der Funktionswerte zu bestimmen, verwendet man den Betrag der Funktion und schreibt $\mu_{abs} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |f(x)|\,dx$.

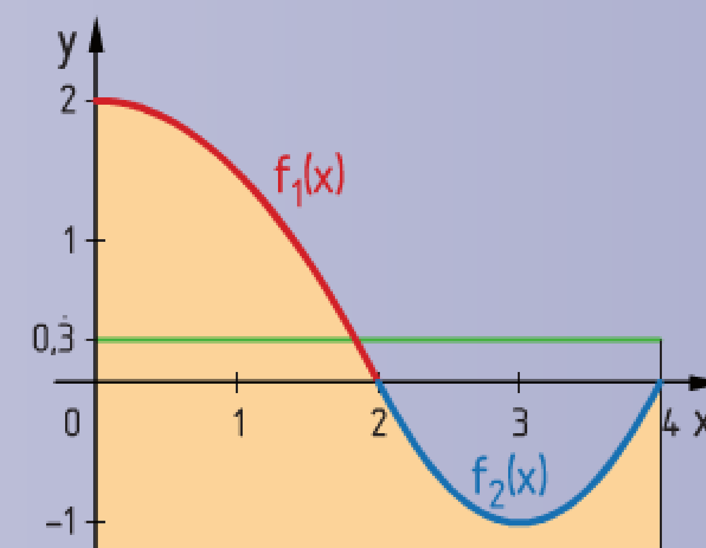
Werden die Funktionswerte quadriert und wird aus dem berechneten Mittelwert die Wurzel gezogen, so erhält man den **quadratischen Mittelwert** μ_Q. Er wird vor allem in der Elektrotechnik zum Berechnen von Effektivwerten verwendet.

Quadratischer Mittelwert: $\mu_Q = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx}$

6.114 Ein Graben neben einem Damm soll durch das Erdmaterial des Damms zugeschüttet werden, sodass das Niveau danach eben ist. Der Querschnitt kann durch quadratische Funktionen genähert werden (Angaben in Meter).

ABC

1) Wie hoch wird das Gelände im dargestellten Bereich sein?
2) Überprüfe, ob der Abtrag gleich der Auffüllung ist.



Lösung:

1) $f_1(x) = ax^2 + 2$, P(2|0): $0 = a \cdot 2^2 + 2 \Rightarrow a = -0{,}5$
$f_1(x) = -0{,}5x^2 + 2$ für $0 \leqslant x < 2$
$f_2(x) = (x - 2) \cdot (x - 4) = x^2 - 6x + 8$ für $2 \leqslant x \leqslant 4$

- Aufstellen der Funktionsgleichungen

$\mu = \frac{1}{4-0} \cdot \left(\int_0^2 f_1(x)\,dx + \int_2^4 f_2(x)\,dx\right) = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{8}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)\right] = \frac{1}{3}$ m

- Mittelwert berechen

Das Gelände wird nach dem Abtragen eine Höhe von rund 33 cm haben.

2) Der Abtrag liegt zwischen $f_1(x)$ und μ:
$f_1(x) = \mu$: $-0{,}5x^2 + 2 = \frac{1}{3}$
$(x_1 = -1{,}825...$ m), $x_2 = 1{,}825...$ m

- Ermitteln der x-Koordinate des Schnittpunkts zwischen μ und $f_1(x)$

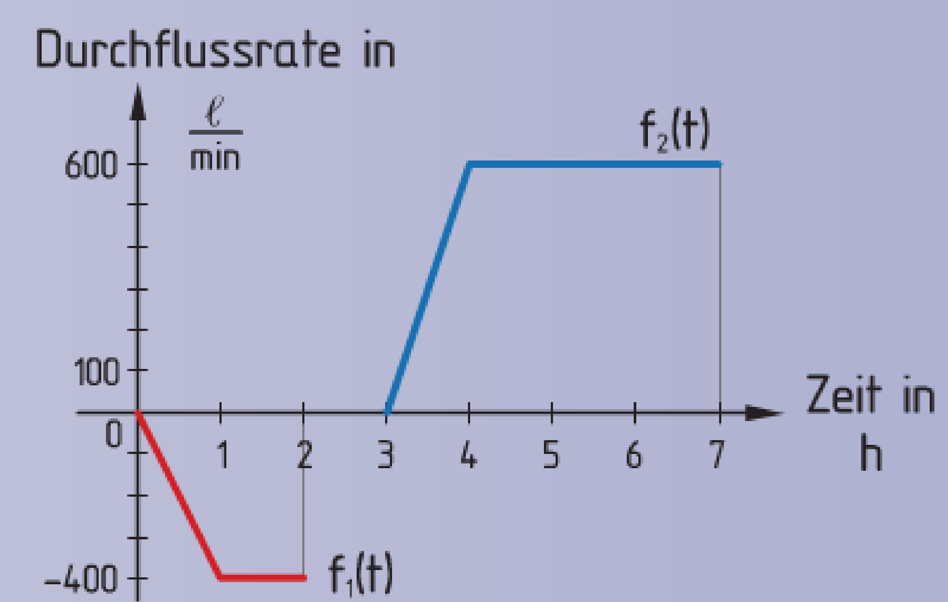
Querschnittsfläche des Abtrags: $A_{Abtrag} = \int_0^{x_2} \left[f_1(x) - \frac{1}{3}\right] dx = 2{,}028... \approx 2{,}03\ \text{m}^2$

Die Querschnittfläche der Auffüllung setzt sich aus zwei Teilflächen zusammen:

$A_{Auffüllung} = \int_{x_2}^{2} \left[\frac{1}{3} - f_1(x)\right] dx + \int_2^4 \left[\frac{1}{3} - f_2(x)\right] dx \approx 2{,}03\ \text{m}^2$

Die Flächeninhalte haben den gleichen Wert, der Mittelwert wurde richtig berechnet.

ABC **6.115** Ein Schwimmbecken, das zum Teil befüllt ist, soll zur Reinigung zuerst entleert und dann wieder befüllt werden (siehe Abbildung). Zum Entleeren und Befüllen wird dasselbe Rohr benutzt.
Berechne, um wie viel m^3 mehr Wasser dann im Becken sind und wie viel Liter Wasser pro Minute durch das Rohr geflossen sind. Beschreibe deine Vorgehensweise.



Lösung:
Zuerst stelle ich die Funktionsgleichungen von f_1 und f_2 auf:

$$f_1(t) = \begin{cases} -\frac{400}{60}\,\frac{\ell}{\text{min}^2}\cdot t & \text{für } 0\text{ min} \leq t < 60\text{ min} \\ -400\,\frac{\ell}{\text{min}} & \text{für } 60\text{ min} \leq t \leq 120\text{ min} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 10\,\frac{\ell}{\text{min}^2}\cdot(t - 180\text{ min}) & \text{für } 180 \leq t < 240\text{ min} \\ 600\,\frac{\ell}{\text{min}} & \text{für } 240\text{ min} \leq t \leq 420\text{ min} \end{cases}$$

Nun berechne ich die Volumen, die in das Becken aus- und einfließen, indem ich die Flächen unter den Funktionsgraphen in Dreiecke und Rechtecke zerlege:

$$V = \int_0^{120} f_1(t)\,dt + \int_{180}^{420} f_2(t)\,dt = -\frac{400\cdot 60}{2} - 400\cdot 60 + \frac{600\cdot 60}{2} + 600\cdot 180 =$$

$$= \frac{1}{420}\cdot\left(\frac{400\cdot 60}{2} + 400\cdot 60 + \frac{600\cdot 60}{2} + 600\cdot 180\right) =$$

$$= 90\,000 \text{ Liter} = 90\text{ m}^3$$

Im Becken befinden sich um 90 m^3 mehr Wasser.

Um die Durchflussmenge des Wassers pro Minute durch das Rohr zu berechnen, muss ich mit dem Betrag rechnen, da das Wasser auch durch das Rohr fließt, wenn abgepumpt wird:

$$\mu_{abs} = \frac{1}{420}\cdot\left(\int_0^{120} |f_1(t)|\,dt + \int_{180}^{420} |f_2(t)|\,dt\right) = \frac{162\,000}{420} \approx 385{,}7\,\frac{\ell}{\text{min}}$$

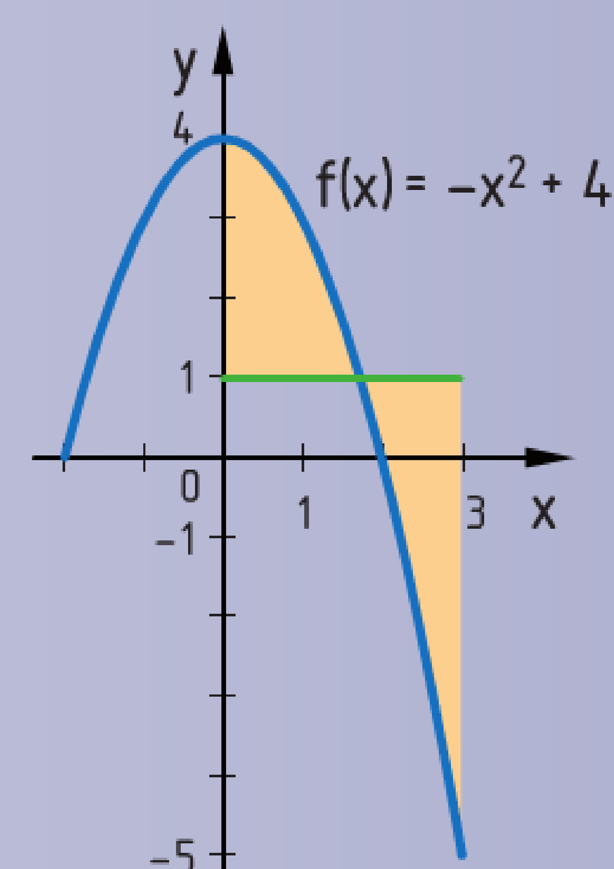
Durch das Rohr flossen im Mittel 385,7 Liter pro Minute.

B **6.116** Berechne den linearen und den quadratischen Mittelwert der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ im Bereich [0; 3].
Veranschauliche den linearen Mittelwert.

Lösung:

$$\mu = \frac{1}{3-0}\cdot\int_0^3(-x^2 + 4)\,dx = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Big|_0^3 = 1$$

$$\mu_Q = \sqrt{\frac{1}{3-0}\cdot\int_0^3(-x^2 + 4)^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{123}{5}} \approx 2{,}8$$



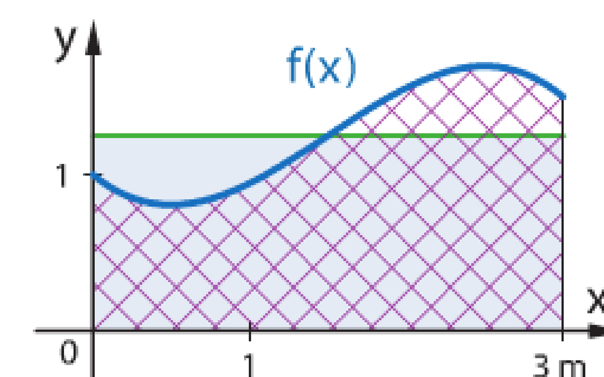
6.117 Berechne **1)** den linearen und **2)** den quadratischen Mittelwert der Funktion im gegebenen Bereich. B

a) $f(x) = x^2 + 2$, $[-1; 2]$ **b)** $f(x) = \sin(x)$, $[0; \pi]$ **c)** $y = 3e^x$, $[0; 3]$

6.118 Berechne den linearen Mittelwert μ sowie μ_{abs} der Funktion. Erkläre, warum es zu unterschiedlichen Ergebnissen kommt. BD

1) $y = \cos(x)$, $[0; \pi]$ **2)** $y = \sin(x)$, $[0; 2\pi]$

6.119 Die dargestellte Verfliesung mit Mosaiken soll begradigt werden. Dazu können nur bereits vorhandene Mosaiksteine verwendet werden. Der Rand wird durch folgende Funktion beschrieben: $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2 - \frac{5}{6}x + 1$
Wie hoch wird die neue Fläche, wenn die Breite gleich bleibt und kein Verschnitt berücksichtigt wird? ABC

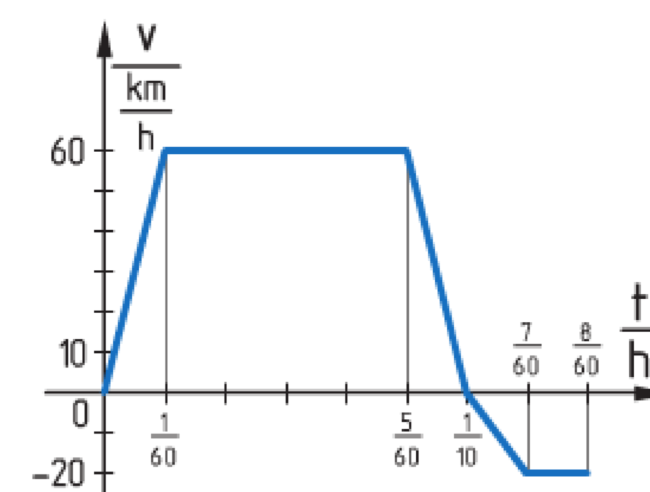


6.120 Die Temperaturkurve eines Junitags in Klagenfurt lässt sich durch folgende Funktion beschreiben: $\vartheta(t) = -0{,}1t^2 + 2t + 10$ ABD
ϑ … Temperatur in °C, t … Zeit in Stunden, beginnend um 07:00 Uhr

1) Stelle die Funktion grafisch dar.
2) Ermittle den Mittelwert der Temperatur an diesem Tag.
3) Wie verändert sich der Mittelwert der Temperatur, wenn die Kurve um $\vartheta = 5$ °C nach oben verschoben wird? Begründe deine Vermutung durch eine Rechnung.

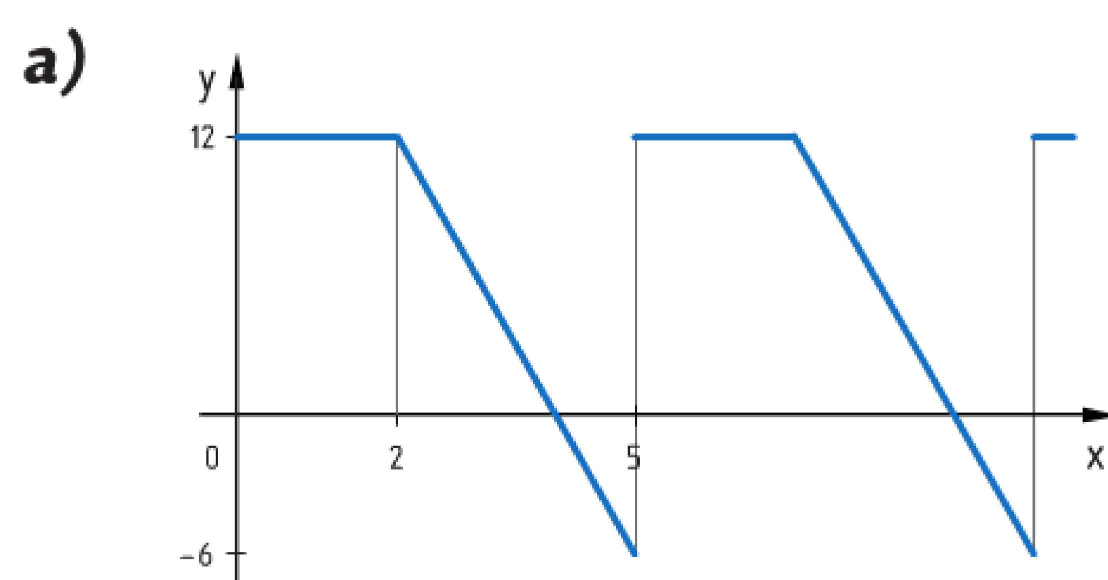
6.121 In der Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm einer Autofahrt dargestellt. ABCD

1) Was bedeuten negative Geschwindigkeiten?
2) Berechne die mittlere Geschwindigkeit der gesamten Autofahrt.
3) Welchen Weg hat das Auto zurückgelegt und wie weit ist es am Fahrtende von seinem Ausgangspunkt entfernt?

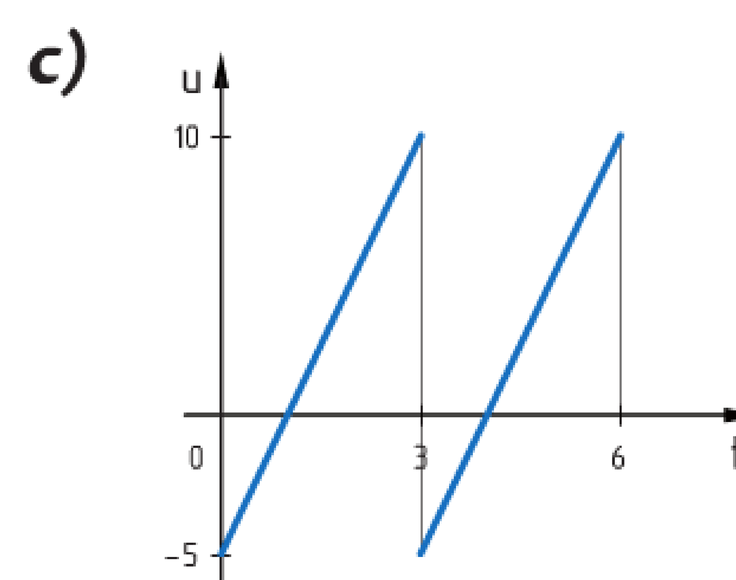


6.122 Berechne die Mittelwerte μ, μ_{abs} und μ_Q der dargestellten periodischen Funktion innerhalb einer Periode. BC

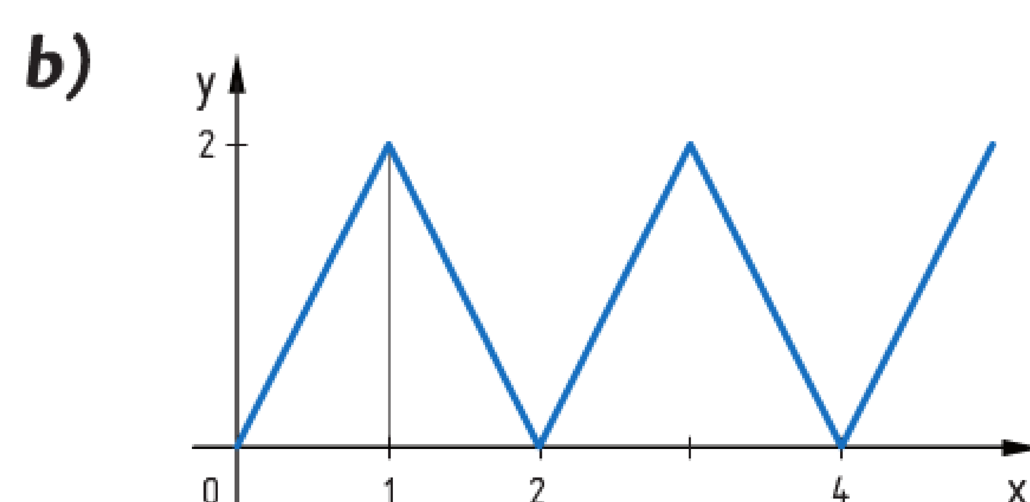
a)



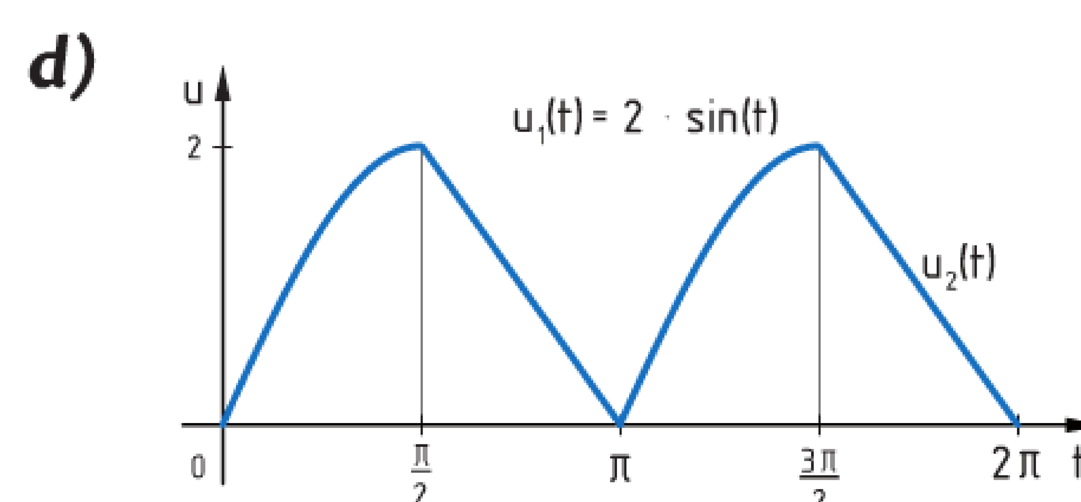
c)



b)



d)



6.123 Zeige, dass für den Mittelwert μ einer linearen Funktion $y = k \cdot x + d$ im Intervall $[a; b]$ gilt: BD

a) $\mu = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ **b)** $\mu = \frac{1}{2} \cdot (f(a) + f(b))$

Anwendungen der Integralrechnung

6.7 Parameterdarstellung und Polarkoordinaten

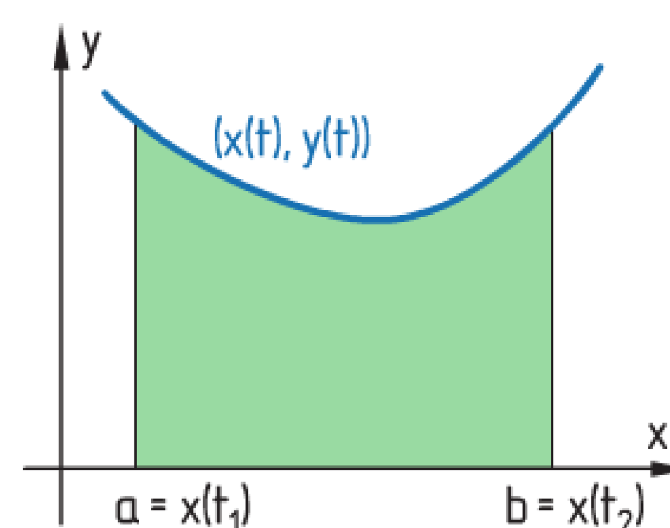
In Band 2 wurden zwei weitere Darstellungsformen für Kurven verwendet. Bei der Parameterdarstellung hängen die x- und y-Koordinaten von einem Parameter, zum Beispiel von der Zeit, ab, $x = x(t)$ und $y = y(t)$. Die Polarform gibt den Abstand vom Pol in Abhängigkeit vom Drehwinkel an, $r = r(\varphi)$.

Flächeninhalt unter einer Kurve in Parameterdarstellung

Es soll der Inhalt der Fläche zwischen einer Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ und der x-Achse berechnet werden.

Aus $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ folgt $dx = \dot{x}\,dt$ und daher $A = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \dot{x}\,dt$.

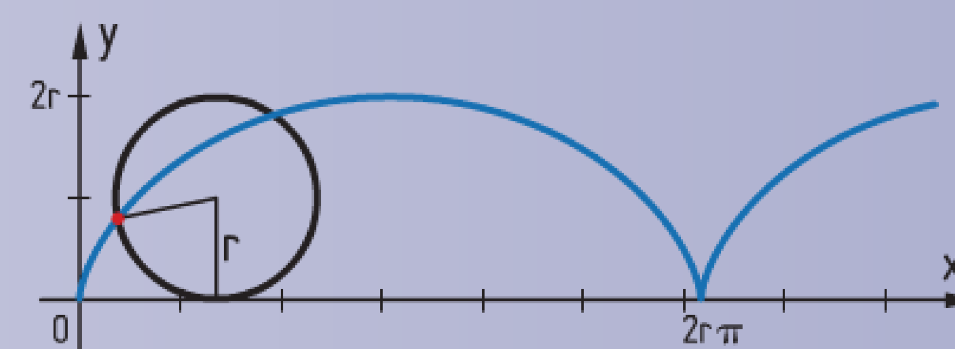
t_1 und t_2 sind dabei jene Werte des Parameters, für die gilt:
$a = x(t_1)$ und $b = x(t_2)$



Flächeninhalt unter einer Kurve in **Parameterdarstellung** $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \dot{x}(t)\,dt \quad \text{mit den Integrationsgrenzen } a = x(t_1) \text{ und } b = x(t_2)$$

B **6.124** Berechne den Flächeninhalt unter einem Bogen einer gespitzten Zykloide (siehe Band 2, Abschnitt 6.2) mit der Parameterdarstellung $x = r \cdot (t - \sin(t))$, $y = r \cdot (1 - \cos(t))$.



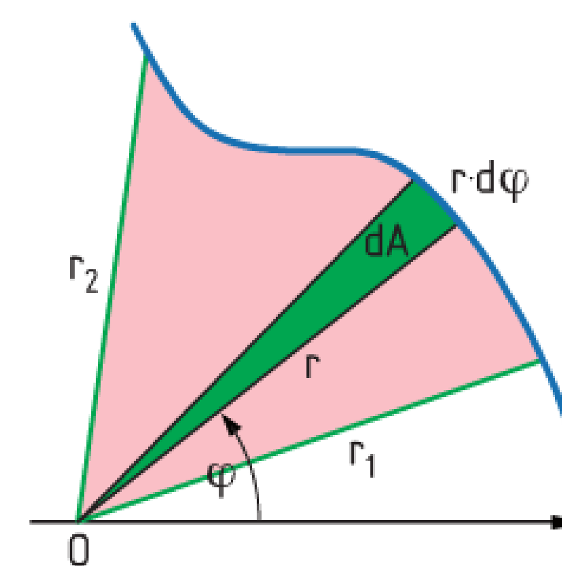
Lösung:
Integrationsgrenzen:
$a = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \quad b = 2r\pi \Rightarrow t_2 = 2\pi$
Ableitung:
$\dot{x} = r \cdot (1 - \cos(t))$

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \dot{x}\,dt = \int_0^{2\pi} \overbrace{r \cdot (1 - \cos(t))}^{y} \cdot \overbrace{r \cdot (1 - \cos(t))}^{\dot{x}}\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} r^2 \cdot (1 - \cos(t))^2\,dt = r^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cdot \cos(t) + \cos^2(t))\,dt =$$
$$= r^2 \cdot \left(t - 2 \cdot \sin(t) + \frac{\sin(t) \cdot \cos(t) + t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3r^2\pi$$

- Geht man von der Erzeugung durch einen rollenden Kreis aus, so sieht man, dass ein Bogen durch eine Umdrehung entsteht.

Flächeninhalt einer Kurve in Polarkoordinaten

Eine Kurve ist in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ gegeben. Es soll der Inhalt der Fläche berechnet werden, die von den zwei Polstrahlen $r_1 = r(\varphi_1)$ und $r_2 = r(\varphi_2)$ und der Kurve begrenzt wird. Man betrachtet ein sehr kleines Flächenstück mit dem Winkel $d\varphi$, das annähernd einen Kreissektor bildet. Der Radius des Kreissektors ist r, die Länge des kleinen Bogenstücks ist dann $r \cdot d\varphi$. Für den Flächeninhalt des Sektors gilt: $dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot d\varphi$.



Den Gesamtflächeninhalt erhält man durch Aufsummierung aller Flächenelemente dA.

Flächeninhalt einer Kurve in **Polarkoordinaten** $r = r(\varphi)$, begrenzt durch die Polstrahlen $r(\varphi_1)$ und $r(\varphi_2)$:

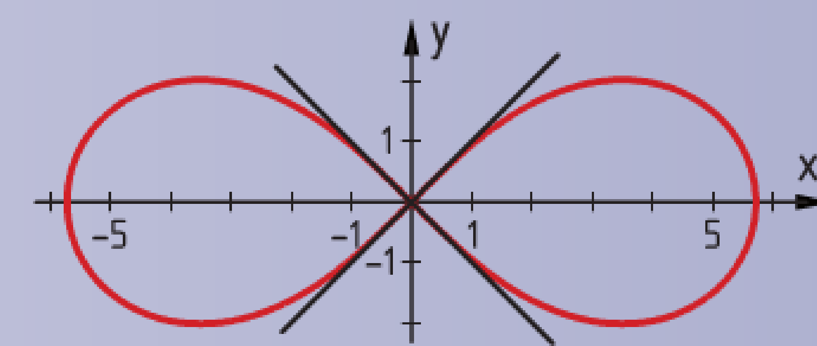
$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi$$

6.125 Eine Lemniskate ist eine „liegende Acht" und wird zum Beispiel für das Unendlichkeitszeichen verwendet. Ihre Darstellung in Polarkoordinaten lautet:

$r(\varphi) = a \cdot \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$ für $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ und $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$

Ermittle den Flächeninhalt.

B



Lemniskate, zB a = 4

Lösung:

$r^2 = a^2 \cdot 2 \cdot \cos(2\varphi)$

$A_S = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi)\, d\varphi =$

$= a^2 \cdot \frac{\sin(2\varphi)}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = a^2$

$A = 2 \cdot A_S = 2a^2$

- Zuerst wird der Flächeninhalt A_S einer Schleife berechnet. Die Kurve beginnt im Nullpunkt beim Winkel $-\frac{\pi}{4}$ und endet bei $\frac{\pi}{4}$.
- Man erhält den Flächeninhalt A durch Verdopplung von A_S.

Bogenlänge einer Kurve in Parameterdarstellung

Ist eine Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gegeben, so gilt:

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \dot{x} \cdot dt$ und $\dot{y} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = \dot{y} \cdot dt.$

Für das Bogenelement ds erhält man also:

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (\dot{x} \cdot dt)^2 + (\dot{y} \cdot dt)^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \cdot dt^2 \Rightarrow ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt$

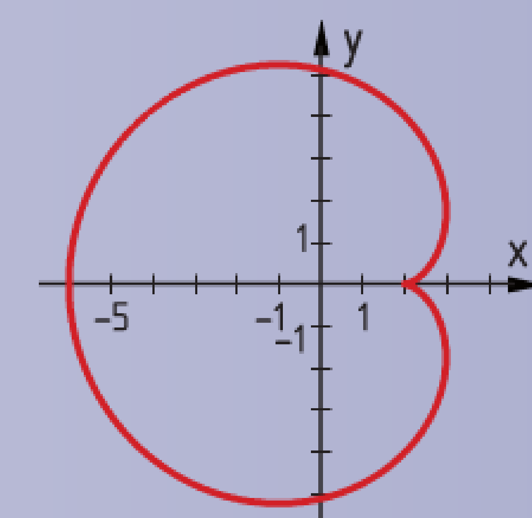
Bogenlänge einer Kurve in **Parameterdarstellung** $x = x(t), y = y(t)$: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

6.126 Die dargestellte Herzkurve ist ein Spezialfall der gespitzten Epizykloide. Ihre Parameterdarstellung lautet:

$x(t) = 4 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \cos(2t)$, $y(t) = 4 \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(2t)$ für $0 \leqslant t < 2\pi$

Berechne die Bogenlänge.

B



Lösung:

$\dot{x} = -4 \cdot \sin(t) + 4 \cdot \sin(2t) = 4 \cdot (-\sin(t) + \sin(2t))$

$\dot{y} = 4 \cdot \cos(t) - 4 \cdot \cos(2t) = 4 \cdot (\cos(t) - \cos(2t))$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 16 \cdot [(-\sin(t) + \sin(2t))^2 + (\cos(t) - \cos(2t))^2] =$

$= 32 - 32 \cdot [\sin(t) \cdot 2\sin(t) \cdot \cos(t) + \cos(t) \cdot (1 - 2\sin^2(t))] =$

$= 32 \cdot (1 - \cos(t))$

$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{32 \cdot (1 - \cos(t)}\, dt =$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8 \cdot 2 \cdot \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]\Big|_0^{2\pi} = 32\ E$

- $\sin(2t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$
- $\cos(2t) = 1 - 2 \cdot \sin^2(t)$
- Summensätze:

  $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\alpha))$

  bzw. $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(t))$

  $\Rightarrow \sqrt{1 - \cos(t)} = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)$

Bogenlänge einer Kurve in Polarkoordinaten

Ist eine Kurve in der Form r = r(φ) gegeben, so kann sie in Parameterdarstellung dargestellt werden (vgl. Band 2):

$x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$, $y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$

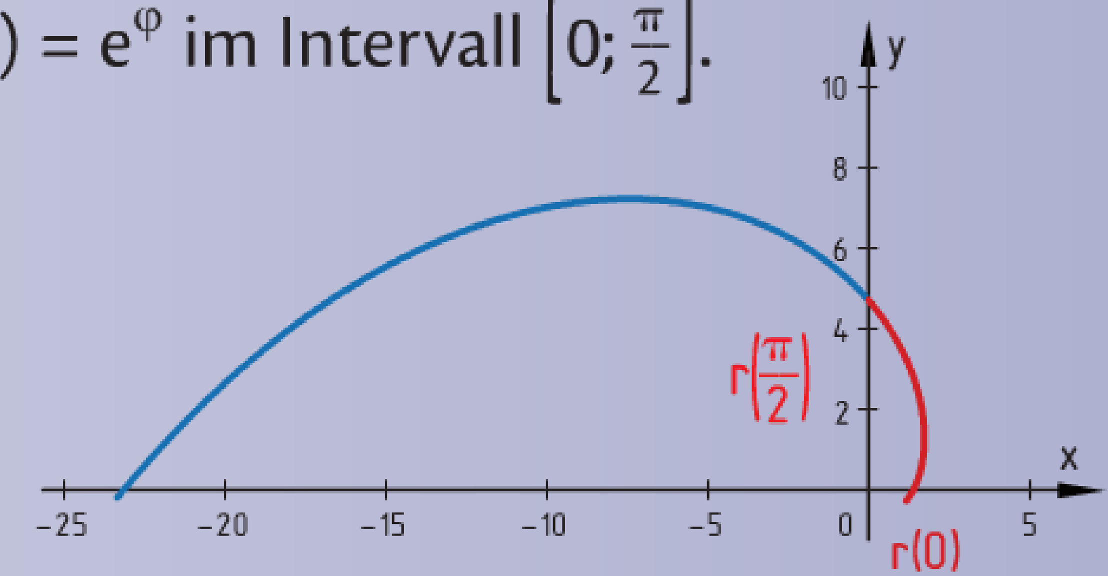
Nun kann die Formel für die Berechnung der Bogenlänge in Parameterdarstellung verwendet werden:

$x' = \frac{dx}{d\varphi} = r'(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$, $y' = \frac{dy}{d\varphi} = r'(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$

$(x')^2 + (y')^2 = (r' \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\varphi))^2 + (r' \cdot \sin(\varphi) + r \cdot \cos(\varphi))^2 = r^2 + (r')^2$

Bogenlänge einer Kurve in **Polarkoordinaten** r = r(φ): $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$

B **6.127** Berechne die Länge der logarithmischen Spirale $r(\varphi) = e^{\varphi}$ im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



Lösung:

$r' = e^{\varphi}$

$r^2 + (r')^2 = e^{2\varphi} + e^{2\varphi} = 2e^{2\varphi}$

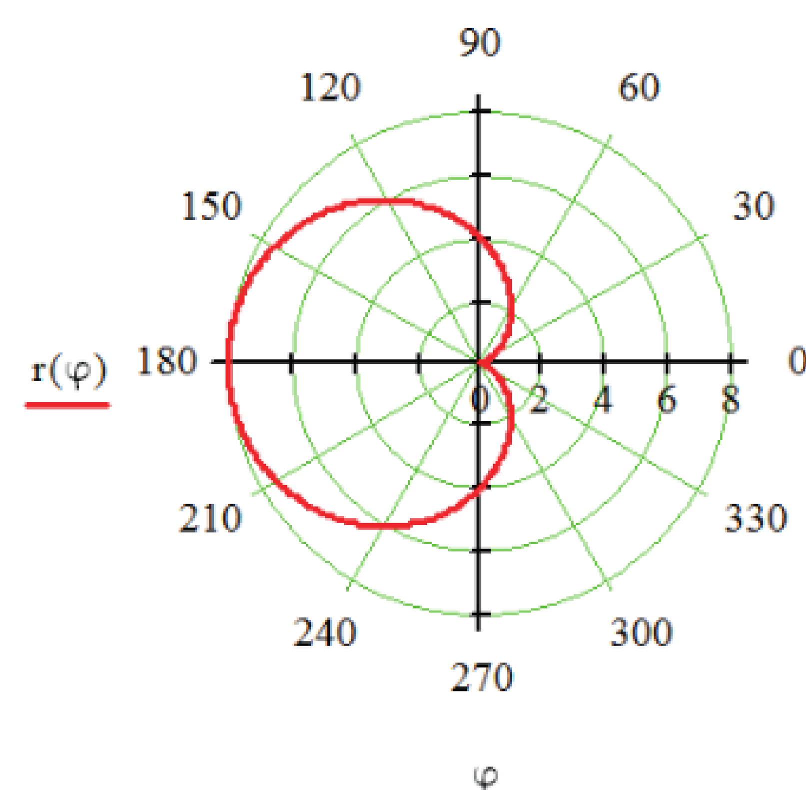
$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2\varphi}}\, d\varphi = \sqrt{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\varphi}\, d\varphi = \sqrt{2} \cdot e^{\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \cdot (e^{\frac{\pi}{2}} - 1) = 5{,}388... \approx 5{,}39$ E



Technologieeinsatz: Bogenlänge

Mathcad

ZB: Die Herzkurve $r(\varphi) = 4 \cdot (1 - \cos(\varphi))$ soll grafisch dargestellt und ihr Umfang berechnet werden.



Durch Klicken auf das Symbol (Kreisdiagramm) erfolgt die Darstellung in Polarkoordinaten. Die Berechnung des Umfangs erfolgt mithilfe der Formel für die Bogenlänge.

$s_H := \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + \left(\frac{d}{d\varphi} r(\varphi)\right)^2}\, d\varphi \qquad s_H = 32$

Flächenberechnungen

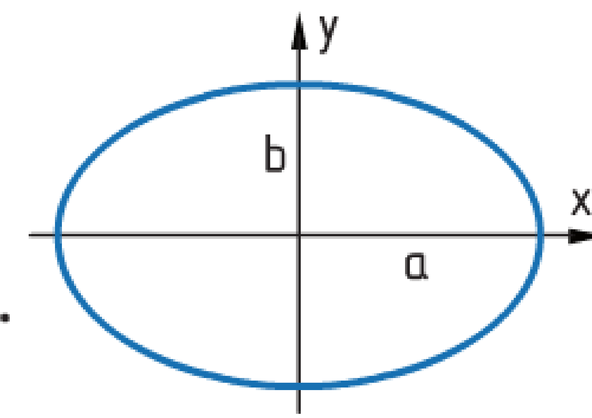
B **6.128** Berechne den Flächeninhalt der Spirale zwischen den Polstrahlen im gegebenen Intervall.

a) Archimedische Spirale: $r(\varphi) = a \cdot \varphi$, $[0; 2\pi]$

b) Hyperbolische Spirale: $r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$, $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

6.129 Die Parameterdarstellung einer Ellipse mit der halben Hauptachsenlänge a und der halben Nebenachsenlänge b lautet:
$x(t) = a \cdot \cos(t)$, $y(t) = b \cdot \sin(t)$, für $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$
1) Berechne den Flächeninhalt der Ellipse mit a = 8 cm und b = 5 cm.
2) Ermittle den Flächeninhalt einer Ellipse allgemein.
Hinweis: Berechne zuerst den Flächenteil im 1. Quadranten.

BD



6.130 Berechne den Flächeninhalt der Schleife der Parabola nodata (vgl. Aufgabe 3.225) mit der Parameterdarstellung:
$x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t}{4} \cdot (4 - t^2)$

B

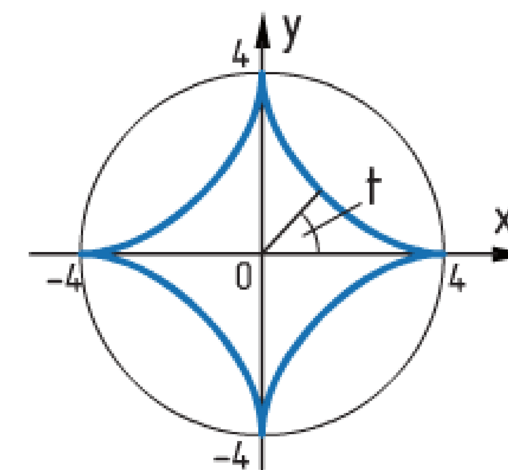


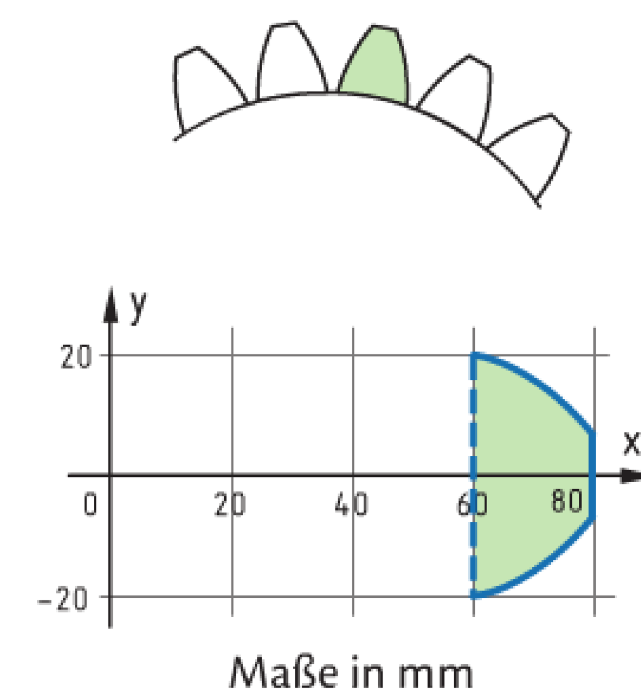
Abb. 6.4

6.131 Berechne den Flächeninhalt einer Astroide (Abb. 6.4) mit
$x(t) = 4 \cdot \cos^3(t)$, $y(t) = 4 \cdot \sin^3(t)$, für $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

B TE

6.132 Zähne eines Zahnrads werden oft durch Kreisevolventen begrenzt (Evolventenverzahnung). Berechne die Fläche des dargestellten Zahns mit der Funktionsgleichung
$x(t) = 60 \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t))$,
$y(t) = -60 \cdot (\sin(t) - t \cdot \cos(t)) + 20$
für $0 \leqslant t < \frac{7\pi}{24}$.

BC TE



Bogenlänge

6.133 Gib die Länge des Kurvenbogens der Astroide mit $x(t) = 4 \cdot \cos^3(t)$, $y(t) = 4 \cdot \sin^3(t)$ an. B

6.134 Berechne die Länge eines Zykloidenbogens mit $x(t) = r \cdot (t - \sin(t))$, $y(t) = r \cdot (1 - \cos(t))$. B

6.135 Berechne die Länge einer archimedischen Spirale $r(\varphi) = a \cdot \varphi$ im Intervall $[0; 2\pi]$. B

6.136 Bei der Eröffnungsfeier einer internationalen Sportveranstaltung soll eine geschlossene Schleife zum Zeichen der Verbundenheit der Nationen über ein Stadiondach gespannt werden. Die Kurve kann allgemein durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

ABCD TE

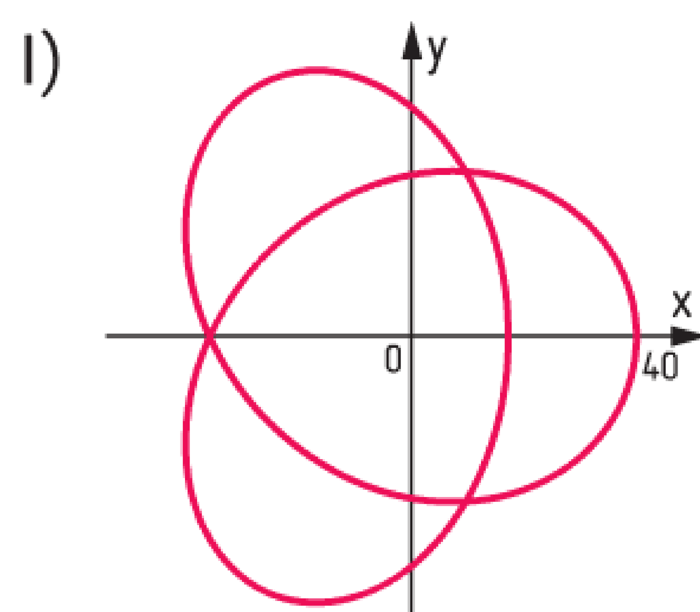
$$x(t) = r_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + r_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t), \quad y(t) = r_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + r_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)$$

Ein Designer schlägt zwei unterschiedliche Varianten vor:

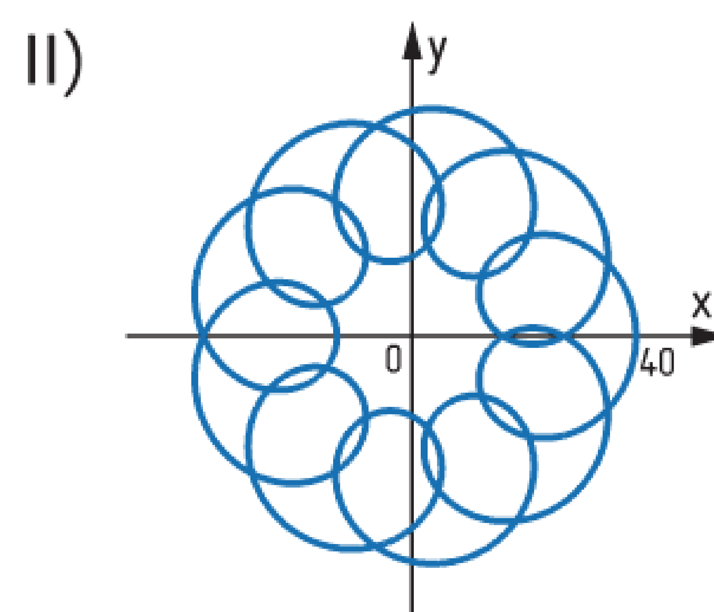
A) $r_1 : r_2 = 1 : 3$ und $\omega_1 : \omega_2 = -1 : 2$, bzw. ***B)*** $r_1 : r_2 = 2 : 1$ und $\omega_1 : \omega_2 = -2 : 3$

1) Ordne beiden Möglichkeiten jeweils den entsprechenden Graphen zu.

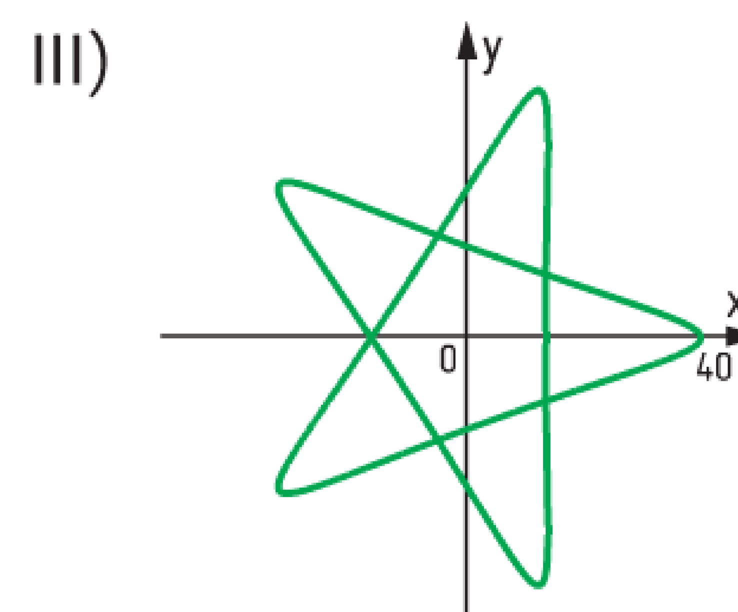
I)



II)



III)



Angaben in Meter, $r_1 + r_2 = 40$

2) Die Materialkosten für die Schleife sollen möglichst gering ausfallen. Ermittle durch Berechnung der Bogenlängen beider Varianten, welche Form den Organisatoren der Feier zu empfehlen wäre.

6.8 Technische und wirtschaftliche Anwendungen

Im folgenden Abschnitt werden die bisher behandelten Rechenmethoden zur Integralrechnung auf Themengebiete aus Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaft angewendet. Dabei werden Größen, die mithilfe von Produktsummen berechnet werden, wie zum Beispiel „Arbeit = Leistung · Zeit", durch Integration ermittelt.



6.8.1 Geschwindigkeiten und zeitliche Änderungsraten

ABCD **6.137** An einer Kreuzung startet ein Mopedfahrer mit einer konstanten Beschleunigung von $a = 1{,}2\,\frac{m}{s^2}$. Für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t gilt: $v = a \cdot t$

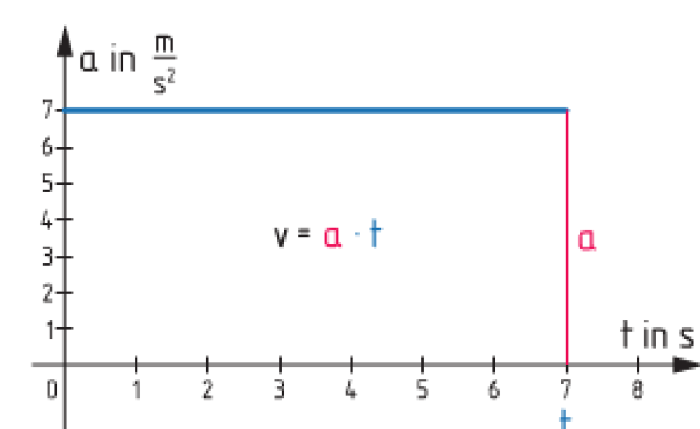
1) Fertige das Beschleunigung-Zeit-Diagramm für das Moped für die ersten fünf Fahrsekunden an.

2) Berechne den Flächeninhalt zwischen der Kurve und der Zeitachse im Intervall [0 s; 5 s] und ermittle anschließend die Geschwindigkeit v des Mopeds nach t = 5 s mit der oben angegebenen Formel. Was fällt dir auf?

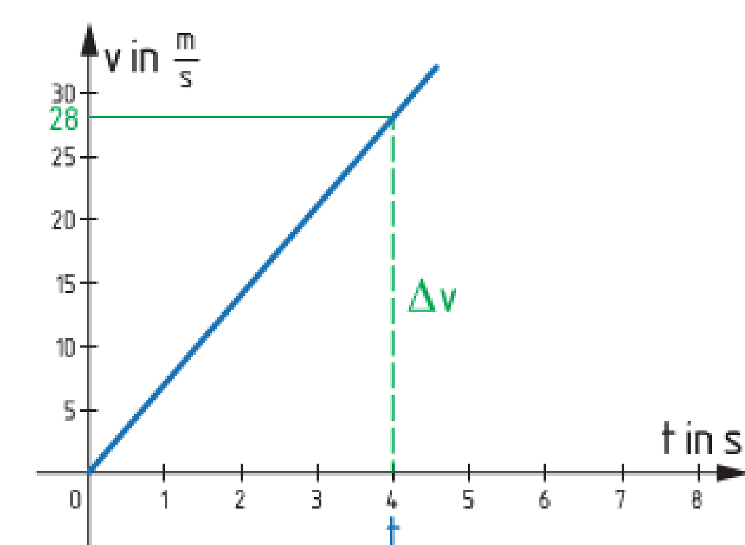
3) Zeichne die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion des Mopeds. Erkläre anhand dieser Zeichnung, dass für den zurückgelegten Weg s bei konstanter Beschleunigung $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ gilt.

In Abschnitt 5 wurde die Integralrechnung anhand des Zusammenhangs zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegtem Weg erläutert. Dabei wurde gezeigt, dass in einem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm die Fläche zwischen der Kurve und der Zeitachse dem zurückgelegten Weg entspricht.

ZB: Ein Rennmotorrad beschleunigt konstant mit $a = 7\,\frac{m}{s^2}$.



Fertigt man das zugehörige a-t-Diagramm an, so ergibt sich eine Gerade, die parallel zur Zeitachse verläuft.
Aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht ist bekannt, dass man die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t mithilfe der Formel $v = a \cdot t$ berechnen kann.
Dies entspricht dem Flächeninhalt zwischen der Geraden und der Zeitachse im a-t-Diagramm.



Für die **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion** gilt allgemein:
$v(t) = \int a(t)\,dt$

Um den **Geschwindigkeitszuwachs** Δv des Rennmotorads zB zwischen $t_1 = 0$ s und $t_2 = 4$ s zu ermitteln, muss das **bestimmte Integral** zwischen den Grenzen t_1 und t_2 berechnet werden:

$$\Delta v = \int_{0\,s}^{4\,s} 7\,\frac{m}{s^2}\,dt = 7\,\frac{m}{s^2} \cdot t\,\Big|_{0\,s}^{4\,s} = 7\,\frac{m}{s^2} \cdot (4\,s - 0\,s) = 28\,\frac{m}{s} \approx 100\,\frac{km}{h}$$

Bei einer Beschleunigung-Zeit-Funktion a(t) gilt für die **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion** v(t):

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$

Für die **Geschwindigkeitsänderung** Δv zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 gilt:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

Anwendungen der Integralrechnung

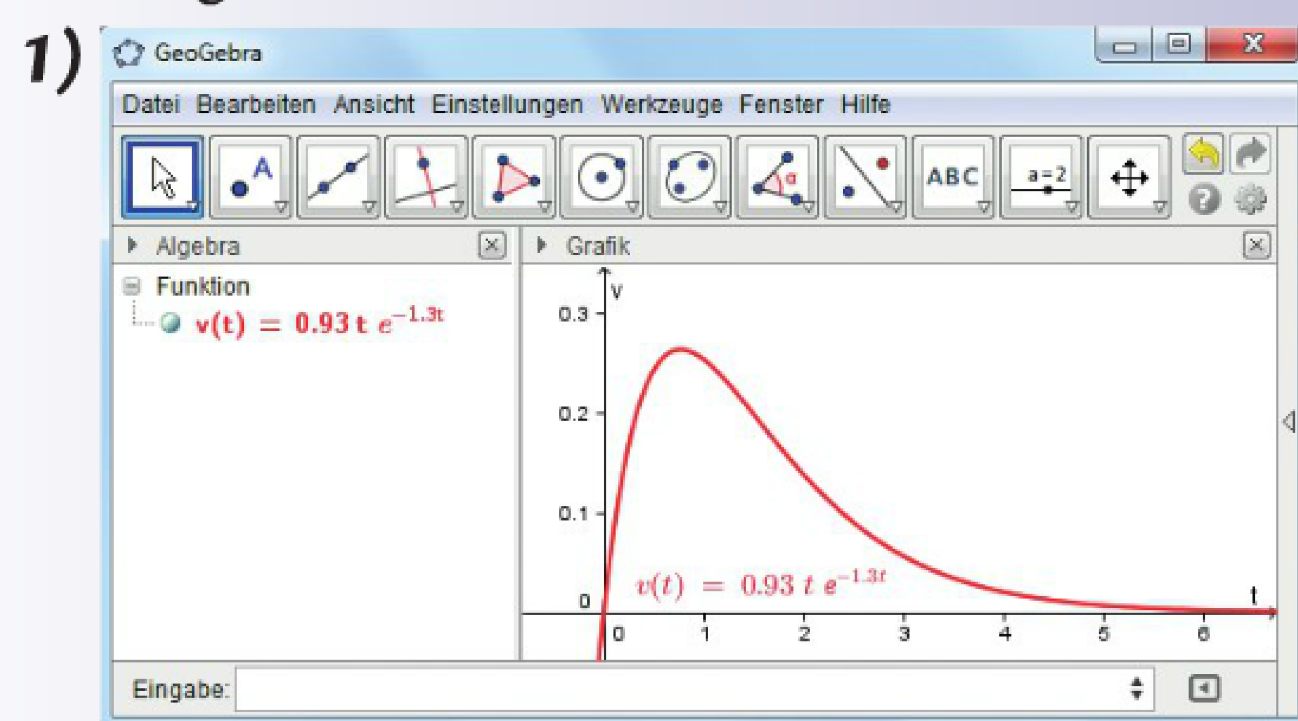
Viele Vorgänge können mithilfe zeitlich veränderlicher Größen beschrieben werden, wie zum Beispiel eine Durchflussmenge. Bei solchen Änderungsraten spricht man im Allgemeinen auch von Änderungsgeschwindigkeiten. Daher kann man die absoluten Änderungen mithilfe der Integralrechnung ermitteln.

6.138 Die automatische Zapfanlage einer Gaststätte befüllt Gläser mit einer Füllgeschwindigkeit v, die durch die Funktion $v(t) = 0{,}93 \cdot t \cdot e^{-1{,}30 \cdot t}$ beschrieben werden kann (v … Füllgeschwindigkeit in Liter pro Sekunde, t … Zeit in Sekunden). ABC TE

1) Stelle die Funktion v grafisch dar und beschreibe den Füllvorgang.
2) Berechne, welche Flüssigkeitsmenge in den ersten zwei Sekunden eingefüllt wird.
3) Berechne, zu welchem Zeitpunkt die maximale Füllgeschwindigkeit erreicht wird sowie den Wert dieser Geschwindigkeit.

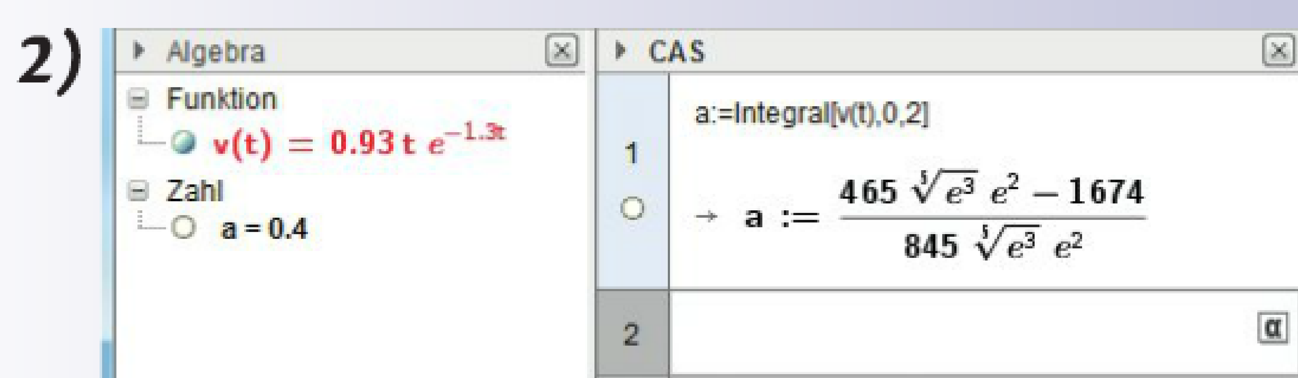
Lösung mit GeoGebra:

1)



Die Füllgeschwindigkeit wächst zu Beginn der Befüllung stark an und erreicht nach etwa einer Sekunde ihren größten Wert. Danach wird die Kurve wieder flacher, die Füllgeschwindigkeit sinkt also allmählich und nähert sich dem Wert 0 Liter pro Sekunde. Man kann davon ausgehen, dass der Füllvorgang nach etwa 6 Sekunden beendet ist.

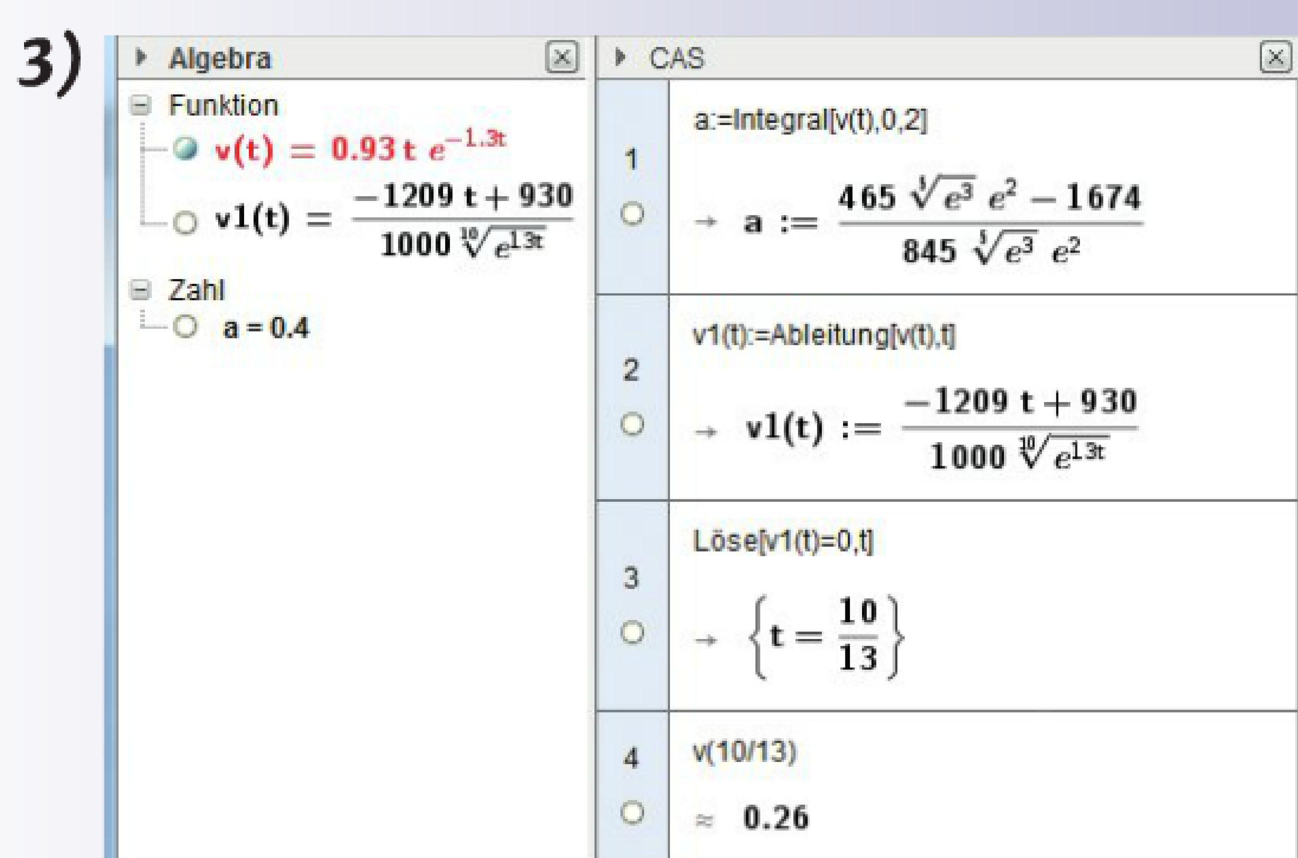
2)



- Die Fläche unter der Kurve gibt die Füllmenge in Liter an. Sie wird mithilfe des Integralbefehls ermittelt.

Innerhalb der ersten zwei Sekunden wird das Glas mit ungefähr 0,4 Liter befüllt.

3)



- Mit **v1(t):=Ableitung[v(t),t]** wird im CAS-Fenster die erste Ableitung von v(t) gebildet. Durch Nullsetzen von v1(t) erhält man den Zeitpunkt $t = \frac{10}{13}$ s, an dem die Füllgeschwindigkeit maximal ist. Setzt man diesen Wert in v(t) ein, erhält man numerisch den Wert 0,26 Liter pro Sekunde.

6.139 Der zum Zeitpunkt t = 0 s stehende Triebwagen eines Zugs wird 6 Sekunden lang so beschleunigt, dass seine Geschwindigkeit pro Sekunde um jeweils $0{,}9\ \frac{m}{s}$ steigt. ABCD

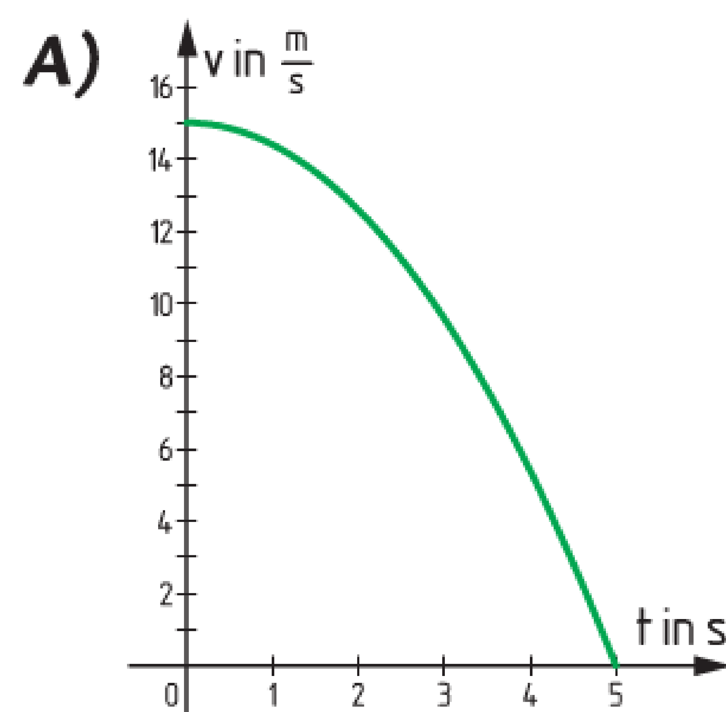
1) Erstelle das Beschleunigung-Zeit-Diagramm, das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm sowie das Weg-Zeit-Diagramm der Fahrt für die ersten 6 Sekunden.
2) Beschreibe den geometrischen Zusammenhang zwischen den Funktionsgraphen von Beschleunigung, Geschwindigkeit und zurückgelegtem Weg.

Anwendungen der Integralrechnung

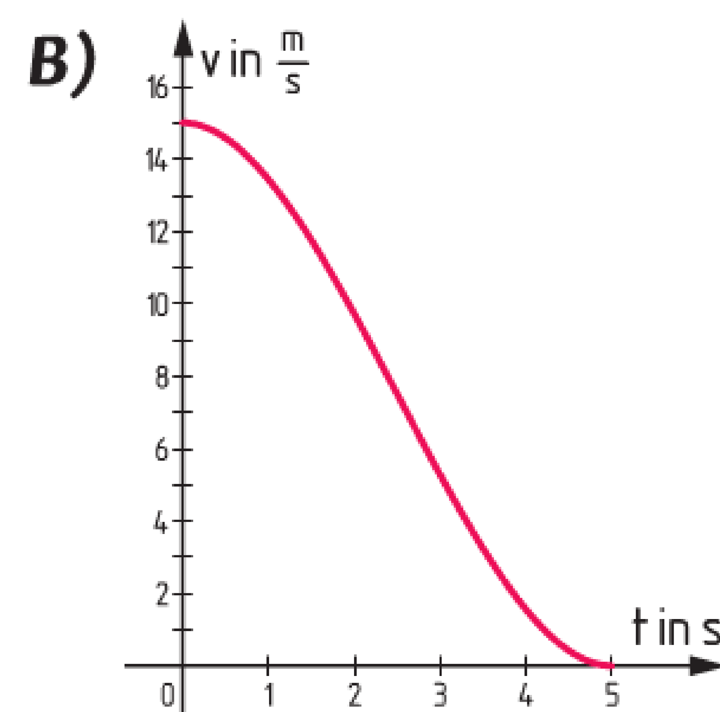
ABCD **6.140** Ein Autofahrer fährt auf einer Landstraße mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 54\ \frac{km}{h}$ auf eine rote Ampel zu und leitet zum Zeitpunkt t = 0 s den Bremsvorgang ein.

1) Argumentiere, welcher der dargestellten Geschwindigkeitsverläufe die Situation am ehesten realitätsnahe beschreibt.

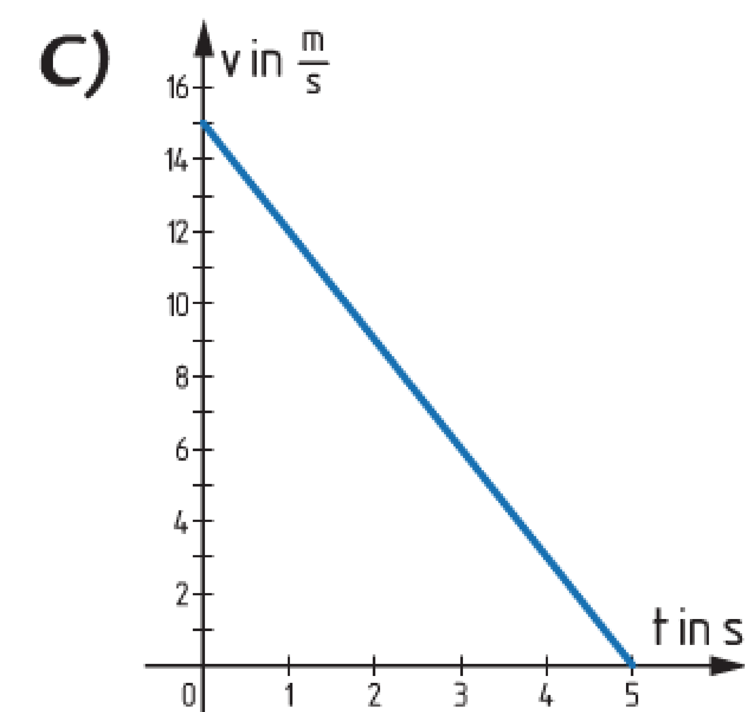
A)



B)



C)



2) Das Auto ist zu Beginn des Bremsvorgangs 35 m von der Ampel entfernt. Gib an, ob es rechtzeitig anhalten kann, wenn der Geschwindigkeitsverlauf durch die Funktion $v(t) = 0{,}024t^4 - 1{,}2t^2 + 15$ für $v(t) \geqslant 0$ beschrieben wird.
v … Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$, t … Zeit in Sekunden

ABD **6.141** Bei einem gesunden Menschen werden bei einer Infektion durch einen bestimmten Virus Antikörper gebildet. Die Funktion $A(t) = \frac{2000 \cdot t}{t^2 + 25}$ beschreibt dabei die Anzahl der Antikörper, die t Tagennach der Infektion gebildet werden.

1) Stelle die Funktion A grafisch dar. Beschreibe den Verlauf des Graphen.

2) Berechne, wie viele Antikörper sich in den ersten 10 Tagen und in den ersten 4 Wochen bilden.

ABC **6.142** Bei einem Experiment im naturwissenschaftlichen Unterricht werden Stoßversuche durchgeführt, indem man kleine Wägelchen zum Zeitpunkt t = 0 s aus dem Stand mithilfe von Schraubenfedern beschleunigt. Dabei ändert sich die Beschleunigung nach der Funktion $a(t) = -1{,}2t^2 + 2{,}4t$.
a … Beschleunigung in $\frac{m}{s^2}$, t… Zeit in Sekunden

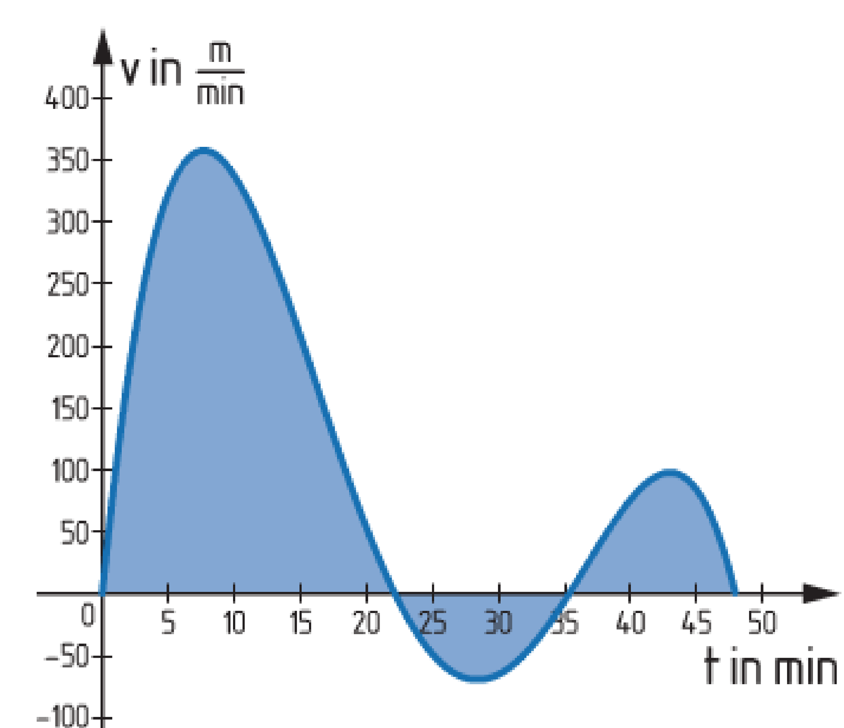
1) Zeichne die Funktion a und ermittle den Flächeninhalt, den der Graph im ersten Quadranten mit der Zeitachse einschließt.

2) Wie viel Sekunden nach dem Anstoßen hat die Beschleunigung den Wert $0\ \frac{m}{s^2}$? Berechne den Wert der Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

3) Erkläre, mithilfe welcher Methode der zurückgelegte Weg eines Wägelchens ermittelt werden kann und berechne diesen anschließend.

ABD **6.143** Das Diagramm zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit eines Schienenfahrzeugs.





1) Gib an, welche Bedeutung jener Bereich hat, in dem die Geschwindigkeit negative Werte annimmt.

2) Die Funktionsgleichung lautet:
$v(t) = -0{,}0029t^4 + 0{,}306t^3 - 10{,}28t^2 + 109{,}1t$
v … Geschwindigkeit in Meter pro Minute,
t … Zeit in Minuten
Berechne, welchen Gesamtweg das Schienenfahrzeug zurückgelegt hat und wie weit der Endpunkt der Fahrt vom Startpunkt entfernt war.

6.144 Die Durchflussgeschwindigkeit bei einer Toilettenspülung kann nach dem Betätigen des Spülknopfs zum Zeitpunkt t = 0 s mithilfe folgender Funktion beschrieben werden: ABC

$v(t) = 4{,}4 \cdot t \cdot e^{-1{,}5 \cdot t}$

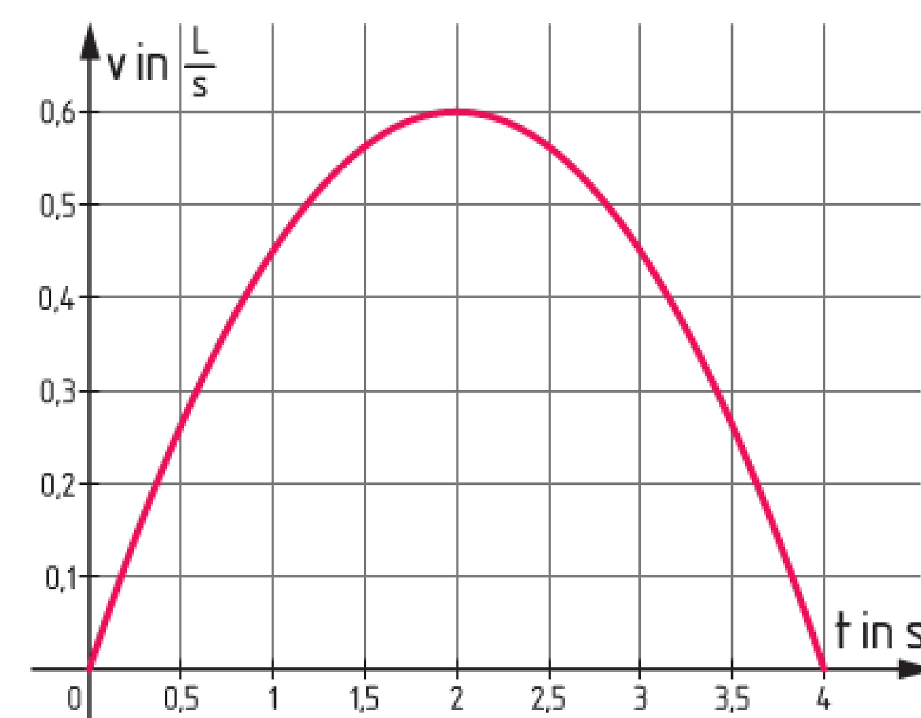
v … Geschwindigkeit in Liter pro Sekunde, t … Zeit in Sekunden

1) Erkläre, was durch die Funktion $g(t) = \int v(t)\,dt$ beschrieben wird.

2) Ermittle jenen Zeitpunkt, an dem die Durchflussgeschwindigkeit den höchsten Wert hat und berechne jene Wassermenge, die bis zu diesem Zeitpunkt abgeflossen ist.

3) Berechne, wie viel Liter Wasser in den ersten 5 Sekunden abfließen. Wie viel Liter Wasser fließen bei dem Spülvorgang theoretisch insgesamt ab?

6.145 Ein Pneumotachograph ist ein Gerät zur Überprüfung der Lungenfunktion. Dabei wird unter anderem die Fließgeschwindigkeit von Luft beim Ein- und Ausatmen in die Lunge in Liter pro Sekunde aufgezeichnet. Der nebenstehende Funktionsgraph zeigt die Aufzeichnung der Fließrate eines Patienten beim Einatmen. ABCD



1) Beschreibe den Verlauf der Fließrate v beim Einatmen. Erkläre den Verlauf der Fließrate beim Ausatmen, wenn Ein- und Ausatmen punktsymmetrisch zum Schnittpunkt mit der Zeit-Achse sind.

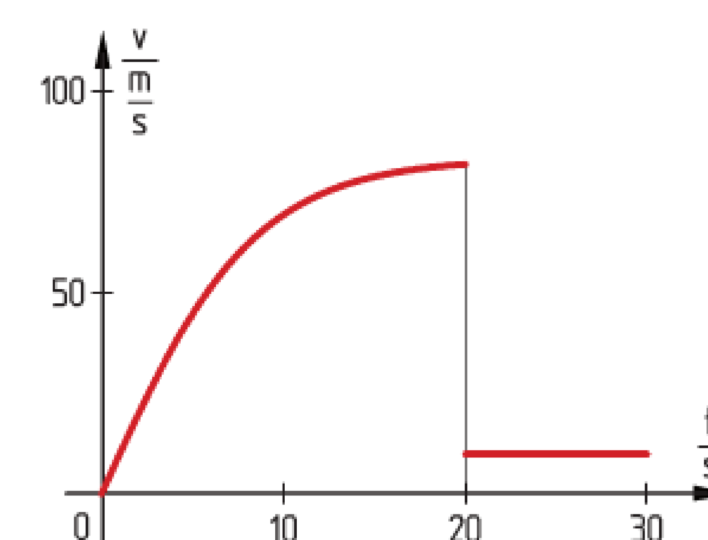
2) Der Funktionsgraph wird durch eine Parabel genähert. Ermittle die Gleichung der Funktion für die Fließrate v beim Einatmen mithilfe des Diagramms.

3) Bestimme die Funktion der eingeatmeten Luftmenge L abhängig von der Zeit.

4) Ein Patient hat eine Einatmungsphase von 3 Sekunden. Nach 1,5 Sekunden hat er eine Fließrate von 0,5 Liter pro Sekunde erreicht. Nähere seine Ein- und Ausatemgeschwindigkeit durch eine Polynomfunktion 3. Grads unter der Voraussetzung, dass Ein- und Ausatemphase punktsymmetrisch zum Schnittpunkt mit der Zeit-Achse sind. Stelle die Funktion im Intervall [0 s; 6 s] grafisch dar.

5) Berechne, wie viel Liter Luft der Patient aus **4)** zwischen der ersten und der dritten Sekunde einatmet. Welche Luftmenge wird zwischen der zweiten und der vierten Sekunde transportiert?

6.146 Bei einem Fallschirmsprung wird die Geschwindigkeit vor dem Öffnen des Schirms durch folgende Funktion (freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstands) beschrieben. ABD



$v(t) = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{k \cdot g}{m}} \cdot t\right)$

m … Masse in kg, $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, $k = \frac{c_w \cdot A \cdot \rho}{2}$,

c_w … Widerstandskoeffizient, A … Querschnittsfläche, $\rho = 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$ … Dichte der Luft

1) Eine Fallschirmspringerin öffnet nach 20 Sekunden den Fallschirm, wodurch die Geschwindigkeit auf rund $5\,\frac{m}{s}$ reduziert wird. Wie viel Meter hat sie während des freien Falls zurückgelegt, wenn m = 65 kg, A = 0,2 m^2 und c_w = 0,78 betragen?

2) Gib eine allgemeine Formel für den zurückgelegten Weg s(t) an, wenn s(0 s) = 0 m ist.

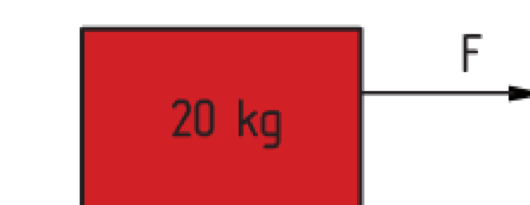
6.8.2 Arbeitsintegrale



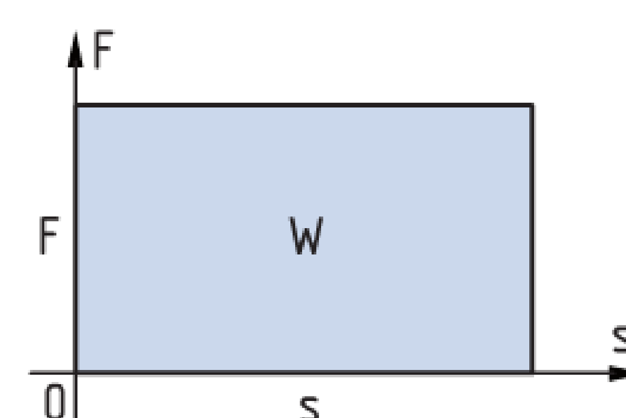
Jedes Mal, wenn wir uns bewegen, verrichten wir Arbeit, für die wir Energie benötigen. Der Mensch benötigt außerdem Energie, um die Körpertemperatur und die Körperfunktionen aufrecht zu erhalten. Diese Energie nehmen wir über die Nahrung auf.
Für die Einheit der Energie werden Joule (J) oder Kalorien (cal, latein: „calor" = Wärme) verwendet, wobei gilt: 1 cal = 4,1868 J
Der Energiegehalt von Lebensmitteln ist zwar immer in kcal und kJ angegeben, in der Alltagssprache wird aber fälschlicherweise die Vorsilbe weggelassen und kurz von „Kalorien" gesprochen.

Arbeit ist das Produkt aus Kraft in Wegrichtung mal Weglänge:
$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha)$

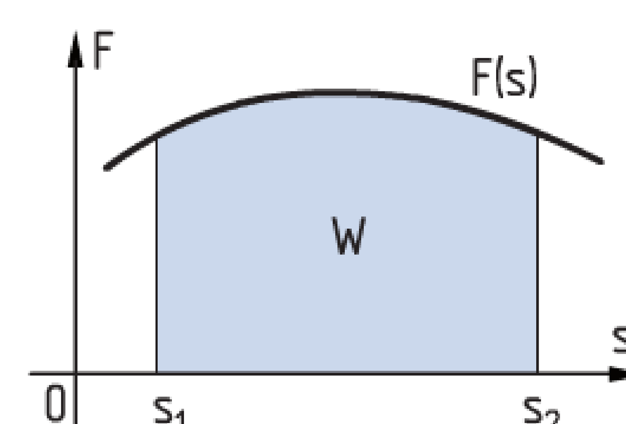
AB **6.147** Beim Verzehr einer Tafel Schokolade nimmt man 500 kcal Energie auf. Wie weit müsste man eine Kiste mit 20 kg Masse ziehen, um diese Energie umzuwandeln? Nimm an, dass dazu eine Kraft von 240 N nötig ist.



Wird zum Beispiel eine Kiste mit der konstanten Kraft $\vec{F}$ entlang eines Wegs $\vec{s}$ gezogen und haben die Kraft und der Weg dieselbe Richtung, so erhält man mit $F = |\vec{F}|$ und $s = |\vec{s}|$ als verrichtete Arbeit: $W = F \cdot s$



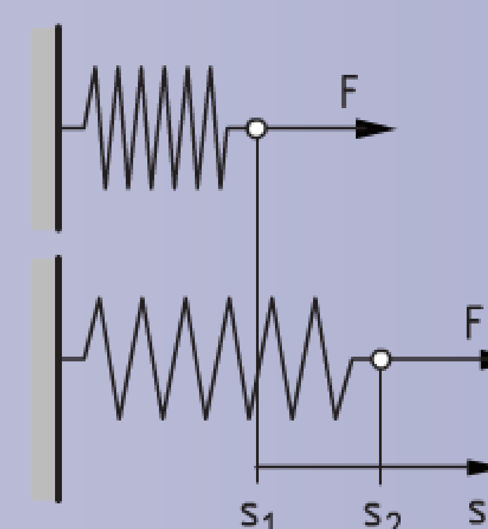
Das Kraft-Weg-Diagramm veranschaulicht, dass die Maßzahl der Arbeit dem Flächeninhalt des Rechtecks mit der Länge s und der Breite F entspricht. Ist die Kraft nicht konstant, sondern ändert sie sich in Abhängigkeit vom Weg s, ist also F = F(s), so erhält man eine beliebige Kurve. Der Betrag der verrichteten Arbeit entspricht dann der Maßzahl des Flächeninhalts unter der Kurve, also $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$.



Wirkt eine veränderliche Kraft F(s) längs eines Wegs s, so gilt für die **verrichtete Arbeit** W zwischen einem Anfangspunkt s_1 und einem Endpunkt s_2:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$$

AB **6.148** Um eine Feder zu dehnen, muss die Federkraft F wirken:
$F(s) = k \cdot s$ mit k ... Federkonstante
1) Ermittle allgemein die benötigte Dehnungsarbeit.
2) Gib die Dehnungsarbeit allgemein an, wenn die Feder aus der Ruhelage bewegt wird.



Lösung:

1) $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} k \cdot s\,ds = \frac{k}{2} \cdot s^2 \Big|_{s_1}^{s_2} = \frac{k}{2} \cdot (s_2^{\,2} - s_1^{\,2})$

2) Ruhelage $s_1 = 0$: $W = \int_0^{s_2} k \cdot s\,ds = \frac{k}{2} \cdot s_2^{\,2}$

6.149 Eine Feder mit der Federkonstate $k = 3\,000\,\frac{N}{m}$ wurde um 4 cm gedehnt. Welche Arbeit wird verrichtet, wenn man sie um weitere 2 cm dehnt? AB

6.150 Ein Körper mit der Masse m wird von einer Höhe h_1 in eine bestimmte Höhe h_2 gehoben. Dabei muss Arbeit verrichtet werden. ABD

1) Gib die Hebearbeit an, wenn die Kraft zum Heben des Körpers $F(s) = m \cdot g$ beträgt.

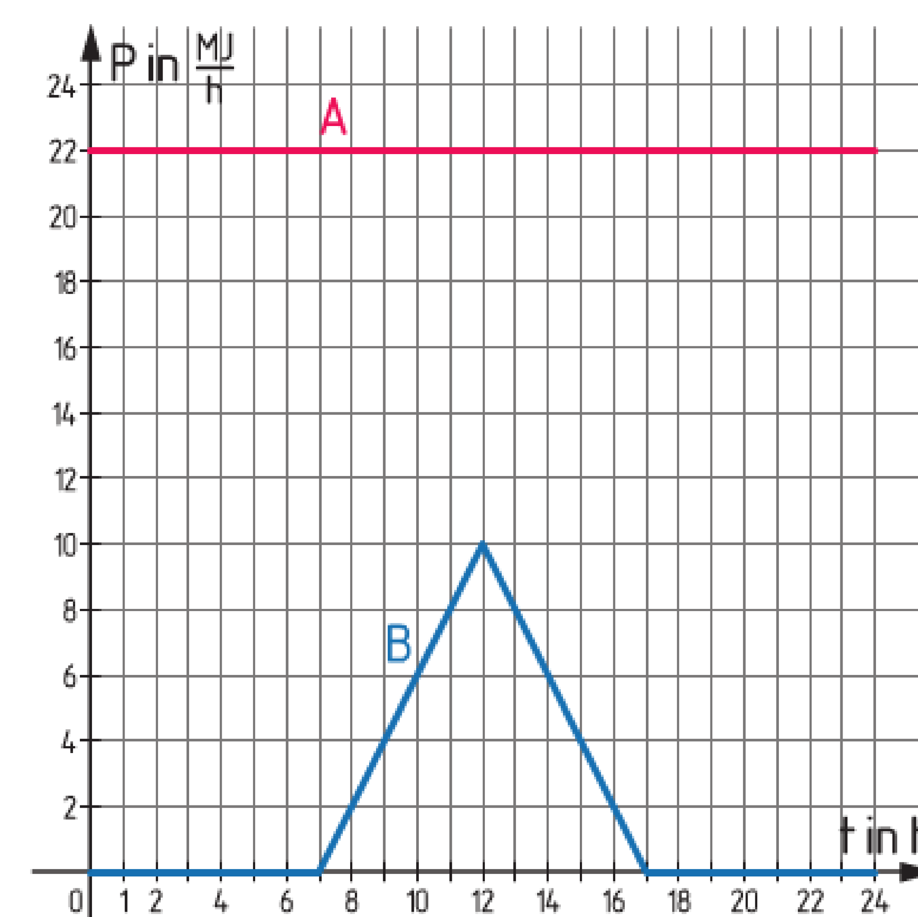
2) Wie lautet die Formel, wenn $h_1 = 0$ m ist?

3) Berechne die Hebearbeit, die aufgebracht werden muss, um einen Körper mit der Masse m = 5 kg aus einer Höhe von 1 m auf eine Höhe von 4 m zu bringen ($g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$).

6.151 Ein Feriendorf auf einer hoch gelegenen Alm ist nur in den Wintermonaten voll belegt. Um den Energiebedarf des Dorfs an einem bestimmten Tag ermitteln zu können, misst man die benötigte Leistung P. Für die Energie gilt dann: $E = \int P(t)\,dt$ ABCD

$P(t) = -\frac{5}{24}t^2 + 5t + 6$

P … Leistung in $\frac{MJ}{h}$, t … Zeit in h



Die Versorgung des Feriendorfs erfolgt über mehrere Benzingeneratoren A sowie durch eine Solaranlage B, deren jeweilige Leistungskurve im nebenstehenden Diagramm dargestellt ist. Die überschüssig gewonnene Energie wird in einer Batterieanlage gespeichert und im Bedarfsfall verwendet. Dabei können lediglich 80% der gespeicherten Energie genutzt werden.

1) Erkläre, warum die benötigte Energie mit $E = \int P(t)\,dt$ berechnet werden kann.

2) Ermittle die Gleichungen der Funktionen A und B aus dem Diagramm.

3) Stelle die Funktionen A, B und P in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch dar.

4) Ermittle, ob die von den bestehenden Energieanlagen gelieferte Energie den Bedarf des Feriendorfs bis 12:00 Uhr decken kann oder ob Energie zugekauft werden muss.

6.152 Die elektrostatische Anziehungskraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 wird durch die Coulombkraft F_C beschrieben: AB

$F_C(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$

$\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}$ … elektrische Feldkonstante; q_1, q_2 … Ladungen in Coulomb C;

r … Abstand zwischen den Punktladungen in Meter

Ein Wasserstoffatom hat ein Proton im Kern und ein Elektron in der Hülle. Die Teilchen haben die gleiche Elementarladung $q \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C. Der Radius eines Wasserstoffatoms beträgt $r_0 \approx 0{,}53$ Å (Å … Ångström, benannt nach Anders Jonas Ångström, schwedischer Physiker, 1814 – 1874, 1 Å = 10^{-10} m).
Bei einer chemischen Reaktion wird der Abstand zwischen Proton und Elektron immer größer.
Berechne, welche Arbeit aufgewendet wird, wenn gilt: $W = \int_{r_0}^{r_1} F_C(r)\,dr$

Anwendungen der Integralrechnung

AB **6.153** Soll ein Körper der Masse m von der Erdoberfläche (Erdmasse $M \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, Erdradius $r_0 \approx 6\,370$ km) gehoben werden, so ist nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz die Kraft F notwendig: $F(r) = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$

$G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ … Gravitationskonstante, r wird vom Erdzentrum gemessen

Welche Arbeit wird verrichtet, wenn eine Rakete mit einer Masse von sechs Tonnen in eine Höhe von 400 km befördert wird?

AB **6.154** Ein Körper bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_1 auf einer waagrechten Ebene. Um ihn auf die Geschwindigkeit v_2 zu beschleunigen, ist eine Kraft $F = m \cdot a$ notwendig.

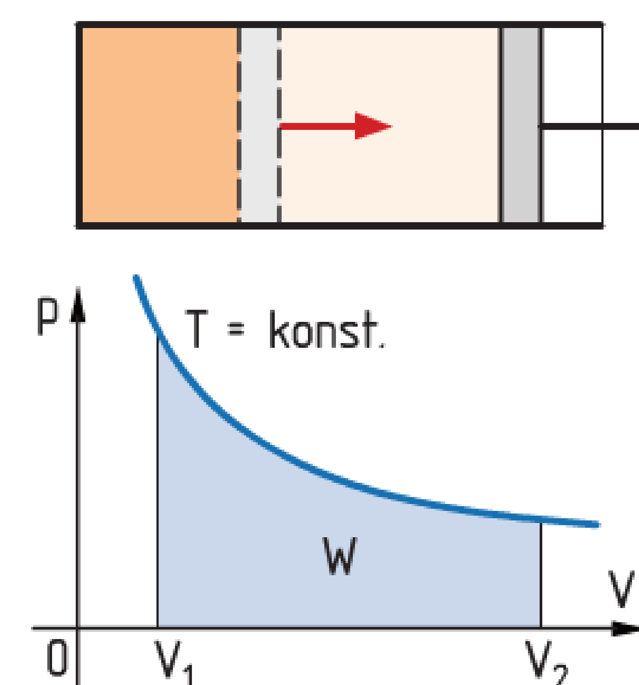
1) Gib die Beschleunigungsarbeit an.

Hinweis: Setze $a = \frac{dv}{dt}$ und verwende $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v \cdot dt$

2) Wie lautet die Formel für $v_1 = 0\,\frac{m}{s}$?

3) Welche Arbeit ist notwendig, um ein Auto mit der Masse m = 900 kg von einer Geschwindigkeit von 30 $\frac{km}{h}$ auf eine Geschwindigkeit von 60 $\frac{km}{h}$ zu beschleunigen?

ABC **6.155** Als Modell für reale Gase wird das ideale Gas verwendet. Ein ideales Gas besteht aus masselosen Teilchen, die sich ungeordnet bewegen und keine Kräfte aufeinander ausüben. Wird es zum Beispiel in einem Zylinder durch Bewegen eines Kolbens ausgedehnt (expandiert), ändert sich mit dem größer werdenden Volumen V auch der Druck p. Der Zusammenhang zwischen dem Druck p und dem Volumen V kann in einem p-V-Diagramm dargestellt werden. Die verrichtete Expansionsarbeit errechnet sich aus der Fläche unter der Kurve: $W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$



Bleibt bei diesem Prozess die Temperatur konstant (isotherme Zustandsänderung), wird Wärmeenergie zugeführt. Diese ist gleich dem Betrag der Expansionsarbeit.

Bei der Verdichtung (Kompression) gilt $W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV$, Wärmeenergie wird abgeführt.

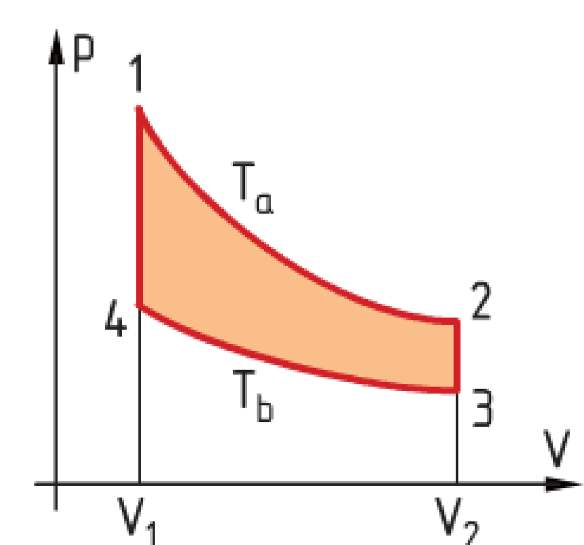
Im isothermen Fall bleibt das Produkt aus Volumen und Druck konstant (Gesetz von Boyle-Mariotte). Es gilt die allgemeine Zustandsgleichung: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

n … Stoffmenge in mol, R … spezifische Gaskonstante in $\frac{J}{mol \cdot K}$, T … Temperatur in K

1) Gib die Arbeit an einem idealen Gas bei Expansion von V_1 auf V_2 an.

2) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn das Volumen verdoppelt wird?

ABC **6.156** Der Stirling-Prozess (benannt nach Robert Stirling, schottischer Pastor und Ingenieur, 1790 – 1878) ist ein Modell für den idealen Viertaktmotor. Er ist ein Kreisprozess, der sich aus zwei Isothermen 1-2 und 3-4 (Temperatur konstant, vergleiche Aufgabe 6.155) und zwei Isochoren 2-3 und 4-1 (Volumen konstant) zusammensetzt. Der Betrag jener Fläche, die im p-V-Diagramm von den Graphen eingeschlossenen wird, entspricht der während des Kreisprozesses verrichteten Arbeit.



Es gilt: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

1) Gib die Gesamtarbeit eines solchen Kreisprozesses an.

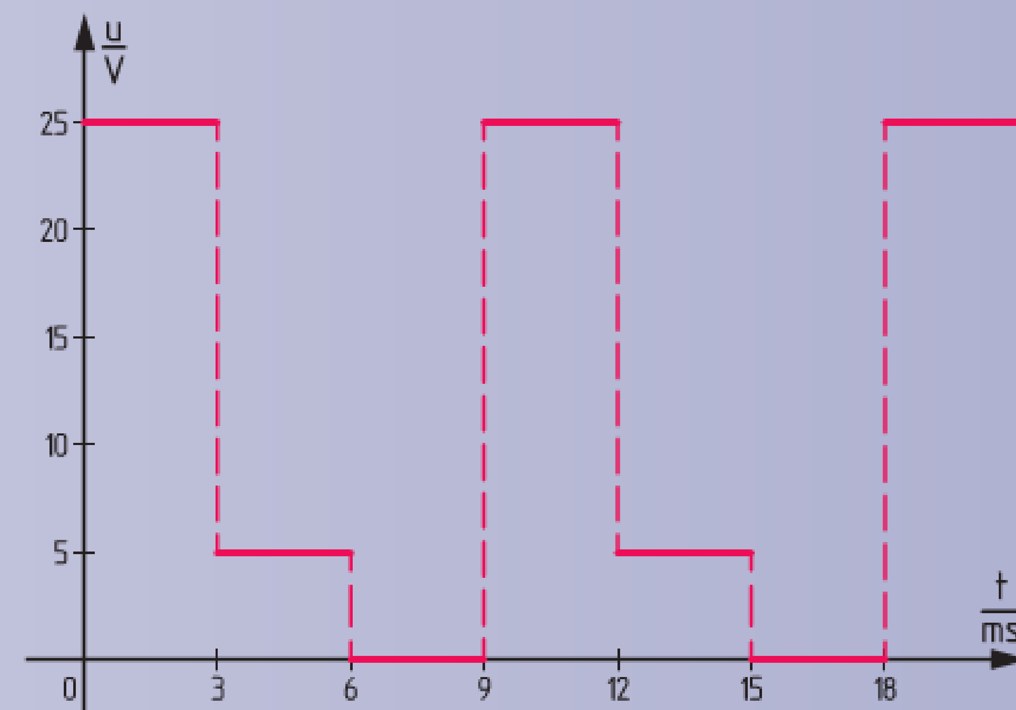
2) Berechne die Arbeit für $T_a = 355$ K, $T_b = 293$ K, $n \cdot R = 1\,500\,\frac{J}{K}$, $V_1 = 1\,m^3$, $V_2 = 3\,m^3$.

6.8.3 Anwendungen aus der Elektrotechnik

Liegt eine Mischung aus Gleich- und Wechselstrom bzw. Gleich- und Wechselspannung vor, so gibt der **arithmetische Mittelwert** den entsprechenden **Gleichanteil** an. Ist das arithmetische Mittel verschieden von null, spricht man von einer Mischgröße, die aus einem Gleichanteil und einem Wechselanteil besteht. Der **Effektivwert** einer Wechselgröße entspricht dem **quadratischen Mittelwert**. Er entspricht dem Gleichstromwert oder dem Spannungswert, der an einem Ohm'schen Widerstand die gleiche Leistung P erzeugt wie die über die vollen Perioden gemittelten Wechselgrößen.

6.157 ***1)*** Zerlege die dargestellte Spannung in einen Gleich- und einen Wechselanteil.
2) Berechne den Effektivwert U_{eff} dieser Spannung.

AB



Lösung:
Periodendauer T = 9 ms

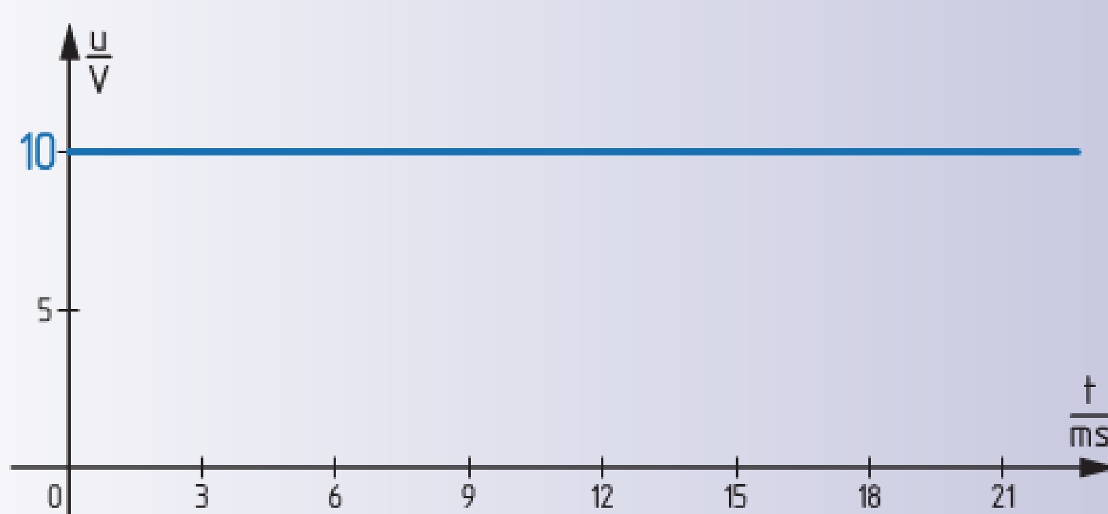
$$u(t) = \begin{cases} 25\text{ V} & 0\text{ ms} \leqslant t < 3\text{ ms} \\ 5\text{ V} & 3\text{ ms} \leqslant t < 6\text{ ms} \\ 0\text{ V} & 6\text{ ms} \leqslant t < 9\text{ ms} \end{cases}$$

1) Gleich- und Wechselanteil – linearer Mittelwert:

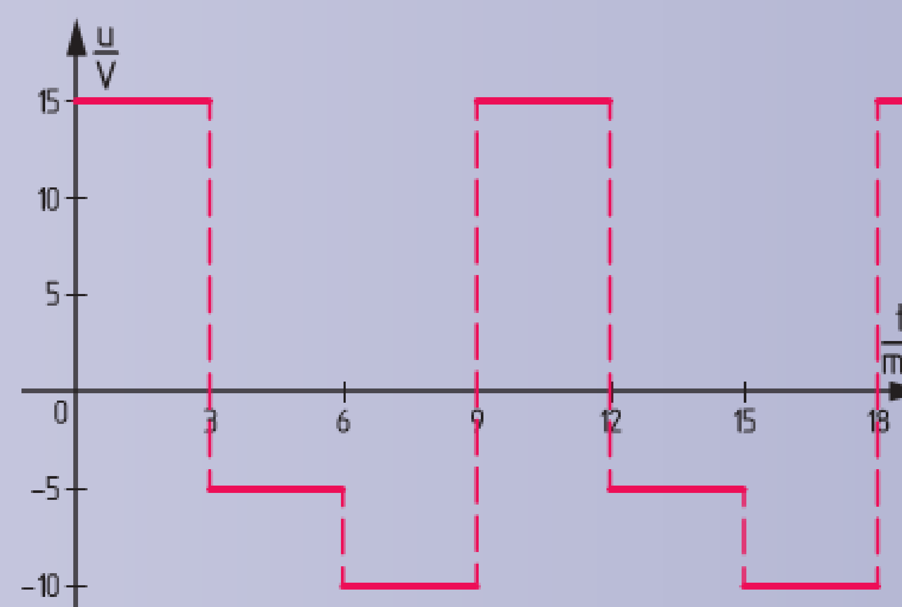
$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)\,dt = \frac{1}{9} \cdot (25 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 0) = 10\text{ V}$$

- Die Integration erfolgt durch die Berechnung von Rechteckflächen.

Gleichanteil:



Wechselanteil:
Die angegebene Kurve wird um den Gleichanteil nach unten verschoben.



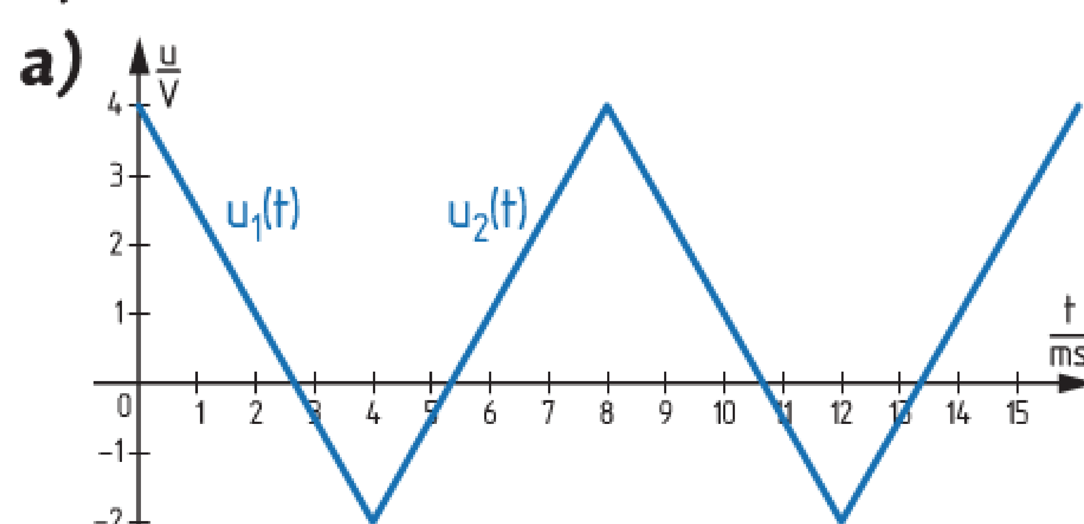
2) Effektivwert – quadratischer Mittelwert:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u(t))^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot (25^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 3)} = 14{,}719\ldots\text{ V} \approx 14{,}72\text{ V}$$

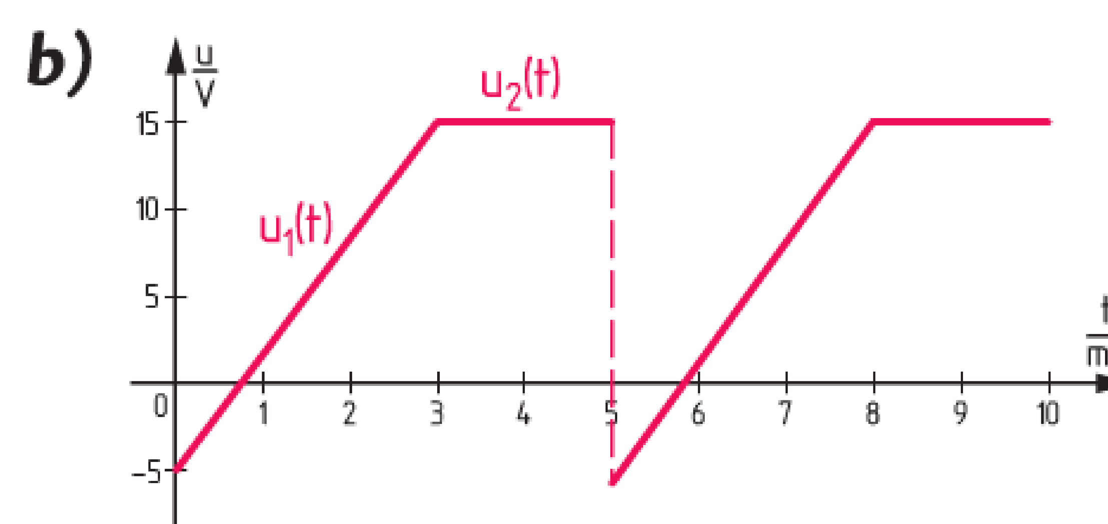
6.158 ***1)*** Zerlege die dargestellte Wechselspannung in einen Wechsel- und einen Gleichanteil.
2) Berechne den Effektivwert.

ABC

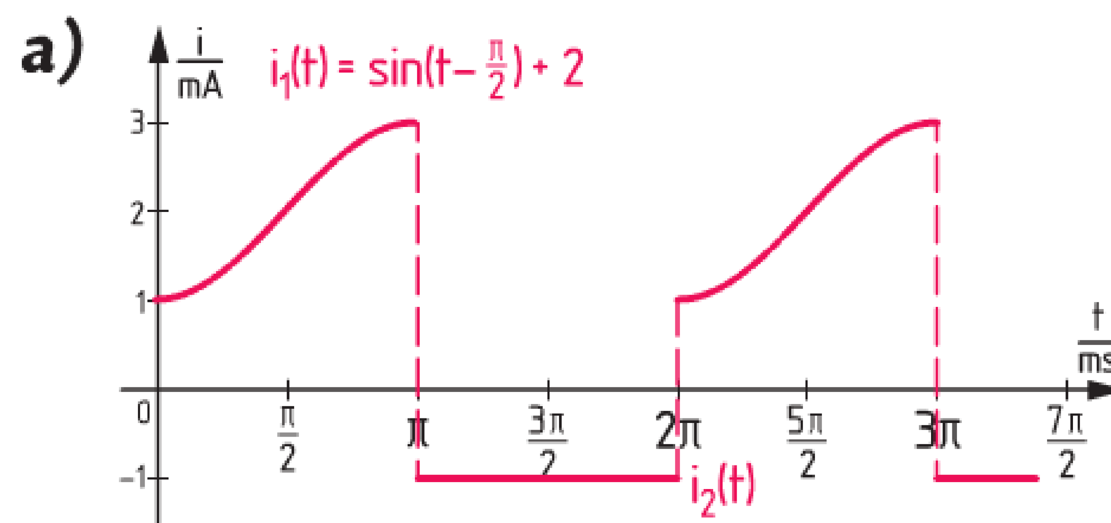
a)

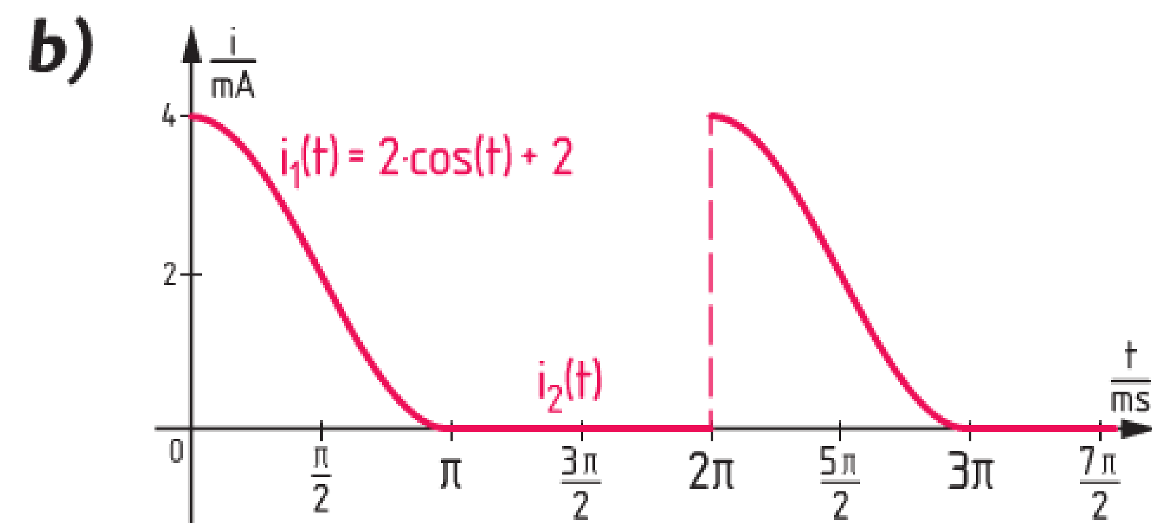


b)



ABC TE **6.159** ***1)*** Zerlege den dargestellten Wechselstrom in einen Wechsel- und einen Gleichanteil.
2) Berechne den Effektivwert.

a)


b)


AB **6.160** Einer gegebenen Wechselspannung u(t) wird in einem Zeitraum von $t_1 = 0{,}05$ s und $t_2 = 0{,}08$ s über einen Widerstand von R = 70 Ω ein anfangs leerer Kondensator zugeschaltet. Wie groß ist die Kondensatorladung q am Ende des Ladevorgangs?

Es gilt: $q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t)}{R}\,dt$

a) $u(t) = 140\text{ V} \cdot \sin(28\text{ s}^{-1} \cdot t + 0{,}6)$ ***b)*** $u(t) = 90\text{ V} \cdot \sin(14\text{ s}^{-1} \cdot t + 0{,}3)$

AB **6.161** Der Verlauf einer Spannung mit einer Periodendauer von T = 0,4 s wird während der ersten Periode durch die Funktion $u(t) = 80\text{ V} - 50\text{ V} \cdot e^{-5\text{ s}^{-1} \cdot t}$ beschrieben. Berechne den Effektivwert U_{eff} der Spannung.

6.8.4 Anwendungen aus der Wirtschaft

Bislang wurden wirtschaftliche Gegebenheiten wie Kosten-, Gewinn-, Nachfrage- oder Preisfunktion meist mithilfe von einfachen Funktionen beschrieben. Kenntnisse über die Integralrechnung eröffnen die Möglichkeit, auch komplexe Problemstellungen zu behandeln.

ABC TE **6.162** Eine Spielwarenhandlung stellt Teddybären her. Die Grenzkostenfunktion ist durch $K'(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 1\,600}}{1\,000} + 30$ (K′ … Grenzkosten in €, x … Stückzahl) gegeben, die Kosten belaufen sich bei 30 produzierten Stück auf 1 000 €.

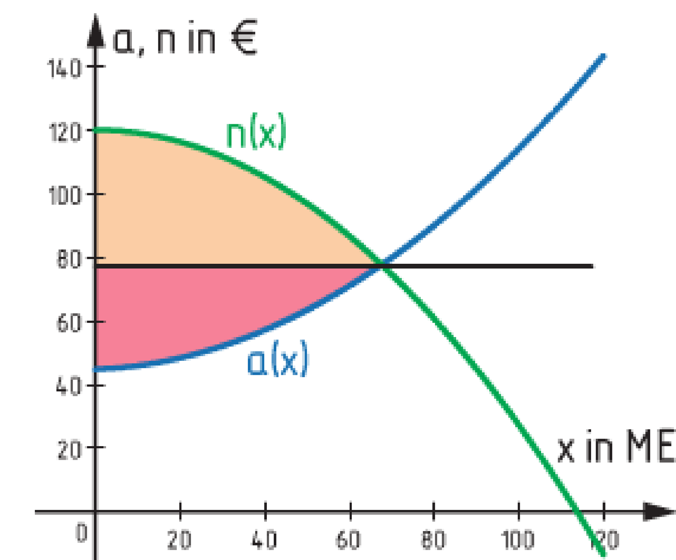


1) Ermittle die Kostenfunktion K und stelle sie grafisch dar. Begründe, warum ihr Verlauf tatsächlich für diese Situation geeignet ist.
2) Berechne, bei welcher produzierten Stückzahl die Stückkosten minimal sind und ermittle diesen Wert.

ABCD TE **6.163** Die Logistik-Abteilung einer Ölgesellschaft hat für die Fördermenge eines Ölfeldes für einen Zeitraum von 10 Jahren zwei Modelle erstellt, die den Trend für den Ölfluss in Mengeneinheiten für die kommenden Jahre beschreiben sollen:
A) $f(t) = 10t^2 - t^3$ ***B)*** $g(t) = t^3 - 20t^2 + 100t$
f, g … Ölmenge in Mengeneinheiten, t … Zeit in Jahren
1) Stelle beide Funktionen in einem Koordinatensystem grafisch dar. Überlege, welches der beiden Modelle eine höhere geförderte Ölmenge für die nächsten 10 Jahre prognostiziert. Überprüfe deine Vermutung rechnerisch.
2) Es wird angenommen, dass sich der Ölpreis im Lauf der Jahre verändern wird. Man geht daher von der Preisfunktion $p(t) = 1 + \frac{1}{11 - t}$ für den Verkaufspreis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit aus (t in Jahren). Überprüfe rechnerisch, welches Modell nach 10 Jahren einen höheren Erlös liefert.

6.164 Für ein Produkt wurden die Funktionen der Entwicklung des Verkaufspreises eines Produkts pro Mengeneinheit aus Sicht der Produzenten a und aus Sicht der Konsumenten n entwickelt. a und n geben den Preis des Produkts pro Mengeneinheit x an:

ABCD

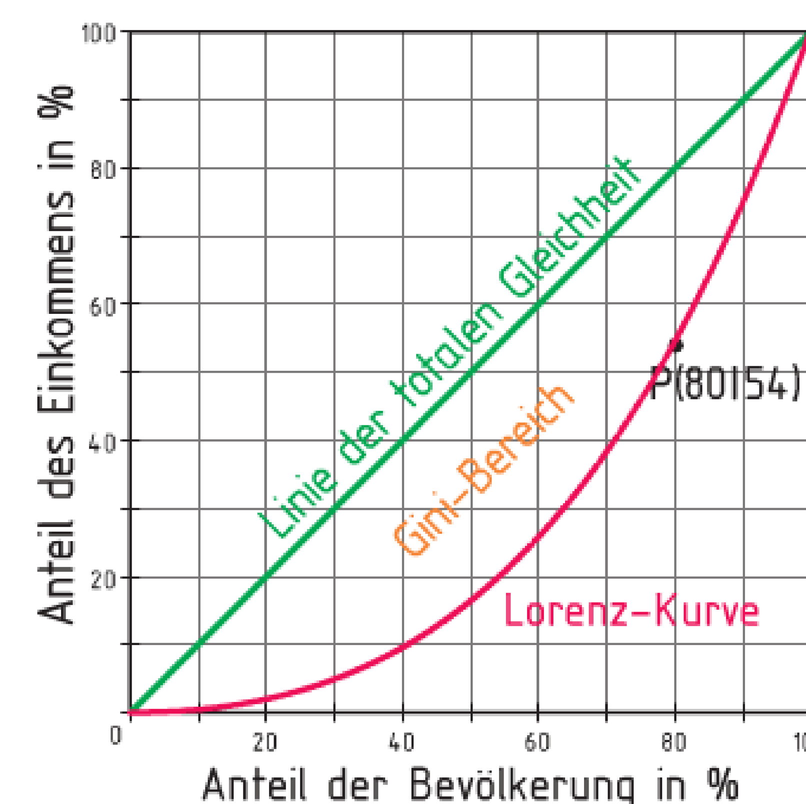


$a(x) = 0{,}0064x^2 + 0{,}052x + 45$ … Angebotsfunktion
$n(x) = -0{,}0093x^2 + 0{,}0061x + 120$ … Nachfragefunktion

1) Interpretiere die Kurven hinsichtlich Produzenten- und Konsumenteninteressen.
2) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts und gib seine Bedeutung an.
3) Berechne jeweils den Flächeninhalt der unterschiedlich farbig markierten Flächen. Erkläre, was durch die markierten Flächeninhalte beschrieben wird.

6.165 Die Einkommensverteilung eines Landes kann mithilfe einer **Lorenz-Kurve** (Max Lorenz, US-amerikanischer Ökonom, 1876 – 1959) dargestellt werden. Dabei wird auf der waagrechten Achse der prozentuelle Anteil der Bevölkerung, beginnend mit jenem mit dem geringeren Einkommen, und auf der senkrechten Achse deren Anteil am Gesamteinkommen aufgetragen. Würde jeder Einwohner dasselbe Einkommen haben, wäre die Lorenz-Kurve die erste Mediane.

ABCD



Das Maß für die (Ungleich-)verteilung von Einkommen in einem Land wird durch den **Gini-Koeffizienten** g (Corrado Gini, italienischer Mathematiker, 1884 – 1965)

festgelegt: $g = \frac{\text{Flächeninhalt zwischen Lorenz-Kurve und 1. Mediane in } [0\%;\ 100\%]}{\text{Flächeninhalt unter der 1. Mediane in } [0\%;\ 100\%]}$

1) Erkläre, was durch den Punkt P in der Abbildung beschrieben wird.
2) Beantworte folgende Fragen. Verwende die Abbildung:
  A) Wie viel % des Gesamteinkommens haben die ärmsten 10 % der Bevölkerung?
  B) Wie viel % des Gesamteinkommens haben die ärmeren 40 % der Bevölkerung?
  C) Wie viel % des Gesamteinkommens haben die reichsten 10 % der Bevölkerung?
3) Die Lorenz-Kurve eines Zwergstaats lässt sich näherungsweise durch die Funktion $f(x) = 0{,}21x^4 + 0{,}38x^3 + 0{,}41x^2$ im Intervall [0; 1] beschreiben. Berechne den Gini-Koeffizienten.
4) Recherchiere den aktuellen Gini-Koeffizienten von Österreich und interpretiere seinen Wert.

6.166 Für den Gegenwartswert K_{t^*} eines Zahlungsstroms R(t) zum Zeitpunkt t*, der in einem Zeitraum von t_1 bis t_2 fließt, gilt: $K_{t^*} = e^{j_\infty \cdot (t^* - t_1)} \cdot \int_{t_1}^{t_2} R(t) \cdot e^{-j_\infty \cdot t}\, dt$

ABC

R … Zahlungsstrom in $\frac{\text{Geldeinheit}}{\text{Zeiteinheit}}$, t … Zeit, j_∞ … stetiger Zinssatz

Die Hausverwaltung einer gemeinnützigen Wohnungsgenossenschaft modelliert die zu erwartenden Einnahmen nach heutigem Stand (t* = 0) durch den kontinuierlichen Zahlungsstrom R.
$R(t) = 1\,800\,000 + 200\,000 \cdot t$ t … Zeit in Jahren
Dabei wird von einem stetigen Zinssatz $j_\infty = 4\%$ ausgegangen. Man geht davon aus, dass der Zahlungsstrom in 3 Jahren zu fließen beginnt und 9 Jahre anhält. Berechne den heutigen Wert der Einnahmen.

Anwendungen der Integralrechnung

Zusammenfassung

Flächeninhalt

Flächeninhalt zwischen einer Kurve und der x-Achse im Intervall [a; b]: $A = \int_a^b f(x)\,dx$

Liegt der Funktionsgraph unterhalb der x-Achse, wird der Betrag des bestimmten Integrals verwendet.

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $y_1 = f(x)$ und $y_2 = g(x)$ im Intervall [a; b]:

$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ mit $f(x) > g(x)$

Flächeninhalt unter einer Kurve in Parameterdarstellung: $A = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \dot{x}(t)\,dt$

Flächeninhalt einer Kurve in Polarkoordinaten zwischen zwei Polstrahlen: $A = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi$

Volumen von Drehkörpern

Drehung um die x-Achse: $V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx$

Drehung um die y-Achse: $V_y = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2\,dy = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dy$

Bogenlänge einer Kurve

$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ bzw. $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$ bzw. $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$

Mantelfläche: $M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ und $M_y = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (x')^2}\,dy$

Schwerpunktsberechnungen

Schwerpunkt einer Fläche zwischen dem Funktionsgraphen y = f(x) und der x-Achse:

$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot y\,dx$ $\quad y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b y^2\,dx$

Schwerpunkt einer Fläche zwischen zwei Kurven $[f_1(x) \geq f_2(x)]$:

$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$ $\quad y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b [(f_1(x))^2 - (f_2(x))^2]\,dx$

Linienschwerpunkt: $x_S = \frac{1}{s} \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ $\quad y_S = \frac{1}{s} \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$

Volumenschwerpunkt: $x_S = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x \cdot y^2\,dx,\ y_S = z_S = 0$

Guldin'sche Regeln: $V_x = 2 \cdot y_S \cdot \pi \cdot A$ und $M_x = 2 \cdot y_S \cdot \pi \cdot s$

Mittelwert einer Funktion f(x)

Linearer Mittelwert: $\mu = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Quadratischer Mittelwert: $\mu_Q = \sqrt{\frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx}$

Weitere Aufgaben

Flächen- und Volumenberechnungen

6.167 Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Funktionsgraphen $y = f(x)$, der x-Achse und den Senkrechten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. B

a) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$, $a = -4$, $b = 0$ **b)** $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$, $a = -1$, $b = 4$

6.168 Berechne den Inhalt der Fläche, die von den gegebenen Graphen eingeschlossen wird. B

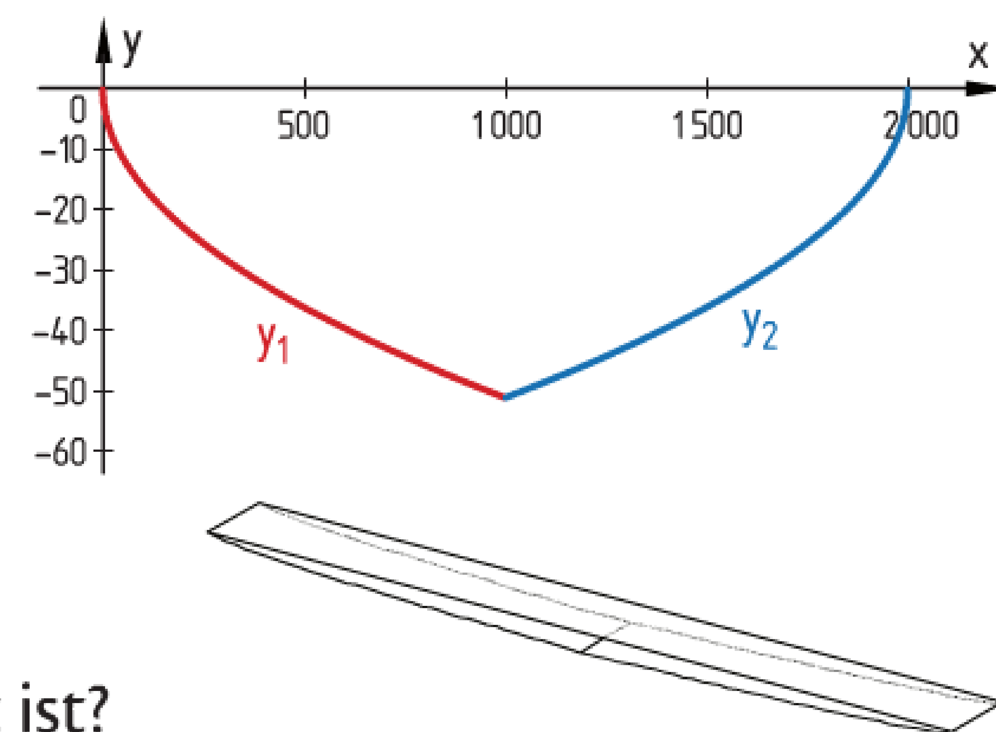
a) $f_1(x) = -x^2 + 3$, $f_2(x) = -2x$, $x = 1$ **c)** $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, in $[0; \pi]$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -0{,}5x + 4$, y-Achse **d)** $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \sqrt{2x}$, in $[1; 4]$

6.169 Gegeben ist die Kurve $y = f(x)$ in einem Intervall. Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn sich die Kurve um **1)** die x-Achse, **2)** die y-Achse dreht. B

a) $f(x) = 0{,}5x^2 + 1$, $[0; 2]$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x}$, $[0{,}5; 4]$

6.170 Wird ein Träger durch eine mittige Last beansprucht und als Träger gleicher Biegespannung ausgeführt, so ergibt sich der dargestellte Längsschnitt (Angaben in Millimeter). Die Funktionsgleichungen lauten: AB



$y_1(x) = -\sqrt{\frac{14\,400}{5\,600} \cdot x}$, $y_2(x) = -\sqrt{\frac{14\,400}{5\,600} \cdot (2\,000 - x)}$

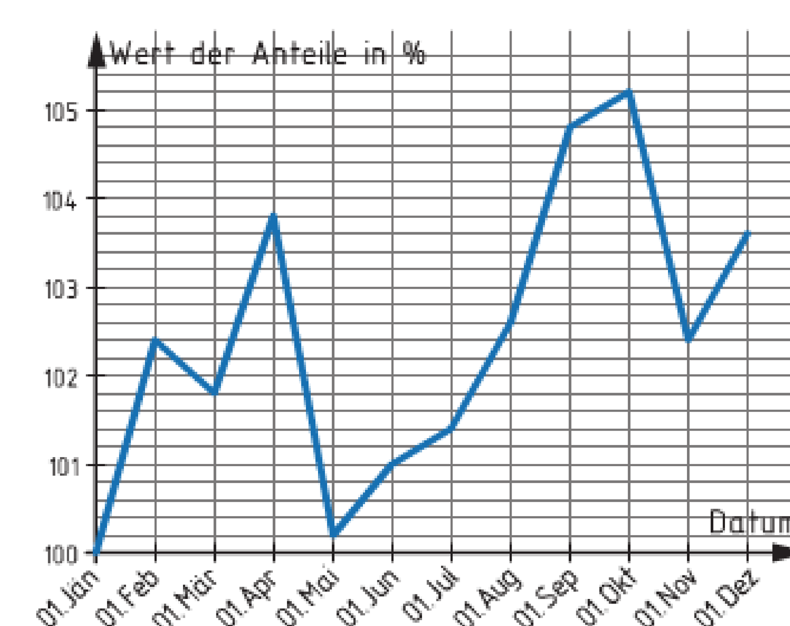
Welches Volumen hat der Träger, wenn er 20 cm breit ist?

Weitere Anwendungen

6.171 Das Kurvenstück $y = \sqrt{x}$ dreht sich im Bereich $[1; 4]$ um die x-Achse. Berechne die Mantelfläche der entstehenden Drehfläche. B

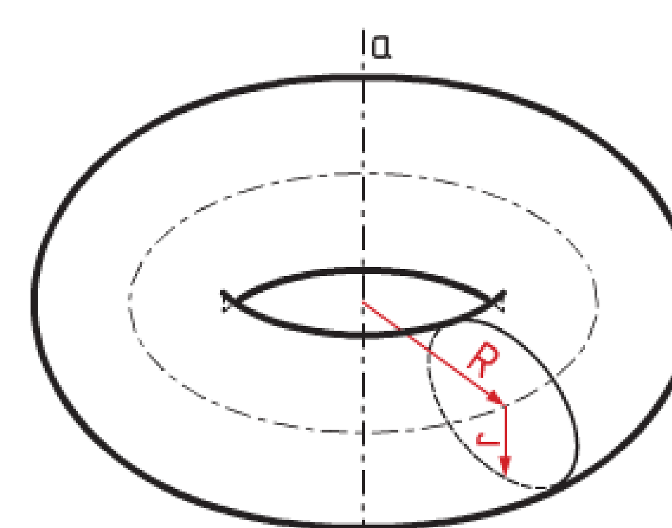
6.172 Ermittle die Schwerpunktskoordinaten der Fläche, die vom Graphen der Funktion $y = \frac{2}{x}$, der x-Achse und den Senkrechten $x = 1$ und $x = 3$ eingeschlossen wird. B

6.173 Am 1. Jänner des vergangenen Jahres kaufte Herr Koberl 200 Anteile eines Aktienfonds zum Preis von jeweils 9,35 €. Über seinen Online-Banking-Zugang konnte er den monatlichen Verlauf des Werts seines Anteilpakets in Prozent anhand einer Chart verfolgen (siehe Abbildung). 100 % entsprechen dem Wert des Pakets am Beginn der Aufzeichnung. Berechne den mittleren Wertzuwachs des Anteilpakets im Zeitraum von 1. Jänner bis 1. Dezember. AB



6.174 Durch die Drehung eines Kreises mit dem Radius r um eine Achse a entsteht ein **Torus**. Ist der Abstand R des Mittelpunkts von der Achse größer als r, so spricht man vom Ringtorus. ABC

Gib mithilfe der Guldin'schen Regeln das Volumen und die Oberfläche eines Ringtorus an. Beschreibe, welcher Körper das gleiche Volumen hat.

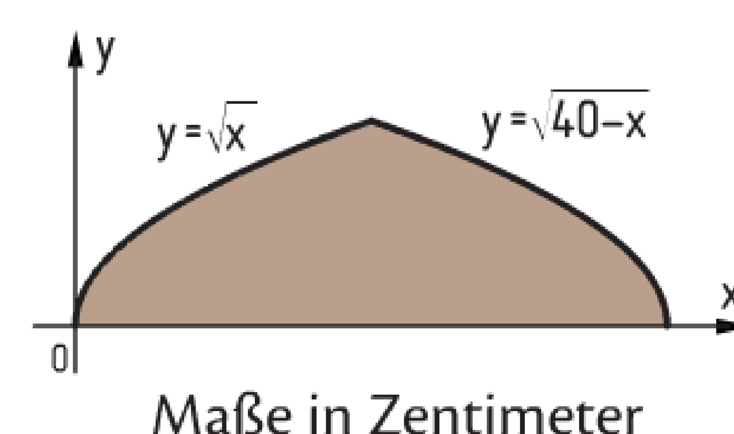


Anwendungen der Integralrechnung

ABD **6.175** Eine Holzvertäfelung mit dem in der Abbildung dargestellten Grundriss soll nur an einem Punkt parallel zur Decke befestigt werden.

1) Erkläre, wo sich dieser Punkt befinden muss und berechne seine Lage.

2) Die Vertäfelung soll eine Einfassung aus Metall erhalten. Wie lang ist diese Einfassung?

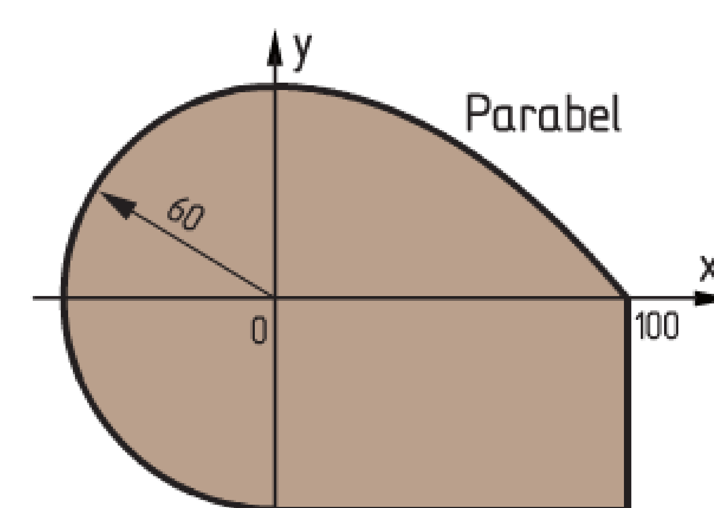


AB **6.176** Eine Tischplatte aus Buchenholz hat den dargestellten Grundriss (Maße in Zentimeter). Sie ist 3 cm dick und soll durch nur ein Tischbein gestützt werden.

1) Berechne Flächeninhalt und Umfang der Platte.

2) Berechne die Masse der Tischplatte ($\rho = 0{,}8\,\frac{kg}{dm^3}$).

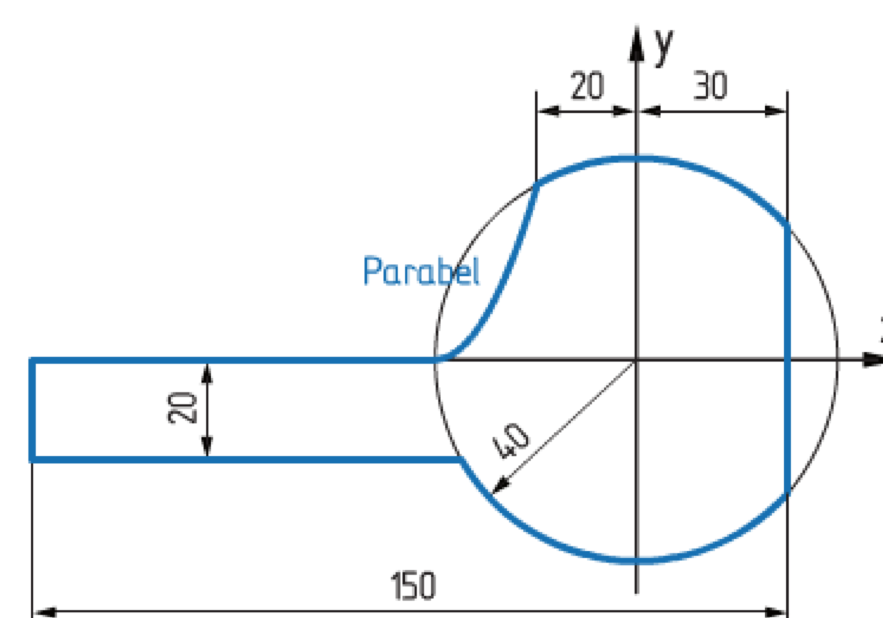
3) Berechne die Stelle, an der das Tischbein montiert werden müsste.



AB TE **6.177** Ein Hebel hat die in der Abbildung schematisch dargestellte Form (Maße in Millimeter).

1) Berechne die Masse des Hebels, wenn er aus Stahl ($\rho = 7{,}85\,\frac{kg}{dm^3}$) gefertigt und 10 mm dick ist.

2) Ermittle die Koordinaten des Schwerpunkts.



Aufgaben in englischer Sprache

acceleration	Beschleunigung	distance traveled	zurückgelegter Weg
arc length	Bogenlänge	lateral surface	Mantelfläche
area	Fläche	mean value	Mittelwert
body of rotation	Drehkörper	surface	Oberfläche
centroid	Schwerpunkt		

B TE **6.178** Find the area enclosed by the curves of f(x) and g(x).

a) $f(x) = \frac{1}{5} \cdot (x^3 - 9x^2 + 11x + 2)$, $g(x) = \frac{1}{5} \cdot (-2x^2 + 7)$

b) $f(x) = 2x \cdot e^{-0{,}1x}$, $g(x) = \frac{1}{6}x$

B **6.179** Find the arc length of the curve of f(x) in the given interval.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, $[2; 3]$ **b)** $f(x) = 2 \cdot e^{0{,}1x}$, $[0; 10]$

B **6.180** An ellipse ell: $4x^2 + 25y^2 = 100$ rotates around the x-axis in $[-1; 3]$. Calculate the volume, the surface and the centroid of the ellipsoid.

AB **6.181** The velocity of a car is $v = 50\,\frac{km}{h}$. In a period of 5 seconds it changes its acceleration from $a_1 = 0\,\frac{m}{s^2}$ to $a_2 = -3\,\frac{m}{s^2}$ in a linear way.

1) Calculate the function of velocity v(t).

2) What is the velocity of the car after 5 seconds?

3) Calculate the distance traveled during this time.

Wissens-Check

		gelöst
1	Es soll der Flächeninhalt berechnet werden, der vom Graphen der Funktion $f(x) = 0{,}4x^3 - 2x^2 + 0{,}8x + 3{,}2$ und der x-Achse zwischen den Grenzen $a = -1$ und $b = 4$ eingeschlossen wird. Überprüfe die Berechnung und gib gegebenenfalls an, welcher Fehler gemacht wurde: $A = \int_{-1}^{4} (0{,}4x^3 - 2x^2 + 0{,}8x + 3{,}2)\,dx = 0{,}1x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 0{,}4x^2 + 3{,}2x\Big\|_{-1}^{4} \approx$ $\approx (25{,}6 - 42{,}667 + 6{,}4 + 12{,}8) - (0{,}1 + 0{,}667 + 0{,}4 - 3{,}2) \approx 4{,}167\ E^2$	
2	Kreuze an, ob der dargestellte Drehkörper durch eine Drehung einer Hyperbel um die x- oder um die y-Achse entstanden ist: A) O um x-Achse O um y-Achse B) O um x-Achse O um y-Achse	
3	Gib an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. A) In einem Weg-Zeit-Diagramm kann der zurückgelegte Weg durch die Berechnung der Bogenlänge ermittelt werden. B) Bei der Berechnung der Bogenlänge einer Funktion in einem Intervall werden mithilfe des Satzes von Pythagoras kleine Linienelemente ds ermittelt und aufsummiert.	
4	Ich kann zwei Methoden zur Berechnung des Volumens eines Drehkörpers angeben, der durch die Rotation eines Funktionsgraphen entsteht.	
5	Gib an, ob die folgenden Aussagen wahr sind oder stelle sie gegebenenfalls richtig. A) Man erhält den Mittelwert einer Funktion f in [a; b], indem man die Summe aus f(a) und f(b) bildet und durch 2 dividiert. B) Man erhält die Kostenfunktion eines Produkts durch Integrieren der Grenzkostenfunktion. C) Die Fläche unter einem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm entspricht der Weg-Zeit-Funktion s(t).	

Lösung:
1) Die Berechnung ist falsch, da die Nullstelle x = 2 nicht berücksichtigt wurde. 2) A) Drehung um x-Achse
B) Drehung um y-Achse 3) A) falsch B) richtig 4) 1. Möglichkeit: Verwenden der Volumenformel für Drehkörper,
2. Möglichkeit: Berechnung des Flächenschwerpunkts und Anwenden der 1. Guldin'schen Regel.
5) A) Falsch, zum Berechnen des Mittelwerts einer Funktion verwendet man die Integralrechnung. B) richtig
C) Falsch, man erhält den Wert eines zurückgelegten Wegs.

7 Näherungsverfahren

Viele Aufgabenstellungen führen auf Gleichungen und Ausdrücke, bei denen die bekannten Lösungs- und Rechenverfahren nicht anwendbar sind. Es lässt sich zum Beispiel mathematisch beweisen, dass man für algebraische Gleichungen, deren Grad höher als vier ist, keine Lösungsformel mehr angeben kann. Daher ist es oft nötig, sich auf Näherungsverfahren zu beschränken. Einige Näherungsverfahren werden in diesem Abschnitt vorgestellt.



7.1 Iterative Nullstellenbestimmung

7.1.1 Intervallhalbierung und Regula falsi

Da das Lösen einer Gleichung immer auch als Berechnung der Nullstellen einer Funktion aufgefasst werden kann, werden nun Methoden gezeigt, mit deren Hilfe diese Nullstellen ermittelt werden können. Die schrittweise Annäherung an eine Lösung wird als **Iterationsverfahren** (latein: „iterare" = wiederholen) bezeichnet. Ein solches Verfahren wird so lange durchgeführt, bis die gewünschte Genauigkeit des Ergebnisses erreicht ist. Dazu überprüft man zum Beispiel, ob der Betrag der Differenz zweier aufeinander folgender Näherungswerte kleiner als eine vorgegebene Schranke ist oder wie nahe der Funktionswert der ermittelten Näherung bei 0 liegt.

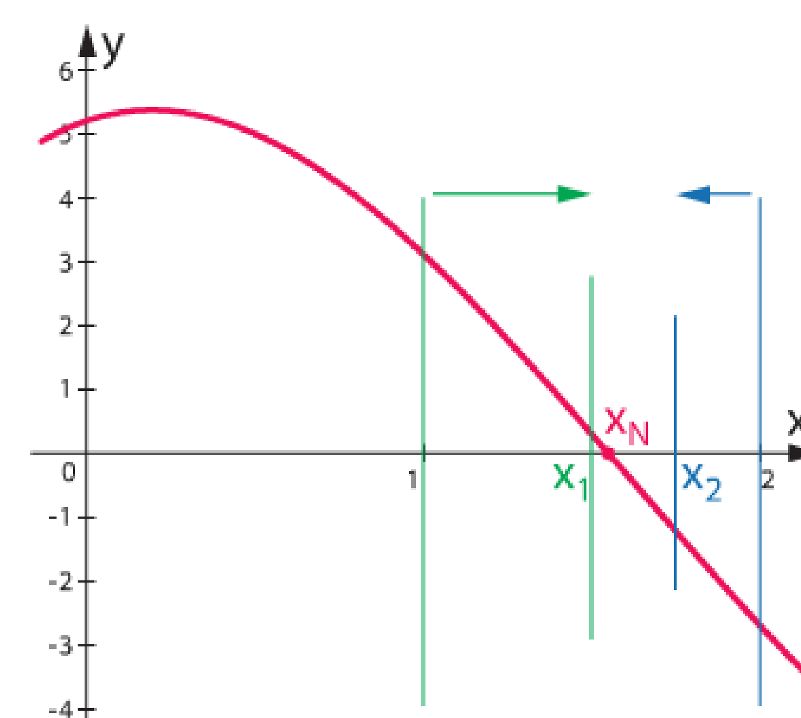
ABC **7.1** Gegeben ist die Funktion $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
1) Gib an, wie viele Nullstellen diese Funktion höchstens haben kann.
2) Bestimme die Nullstellen dieser Funktion im Intervall [−2; 3,5] grafisch

Intervallhalbierung

Um die Lösungen einer Gleichung der Form f(x) = 0 zu ermitteln, betrachtet man zuerst die Funktion y = f(x). Um eine Nullstelle dieser Funktion näherungsweise zu berechnen, wird ein Intervall, in dem sich die Nullstelle befindet, in immer kleiner werdende Teilintervalle zerlegt.

ZB: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 5{,}2$
Man erstellt eine Wertetabelle und zeichnet den Graphen der Funktion, um eine Vorstellung über den Kurvenverlauf zu erhalten.

x	y
0	5,2
1	**3,2**
2	**−2,8**
3	−6,8



Zwischen x = **1** und x = **2** ändern sich die Vorzeichen der Funktionswerte:
$f(\mathbf{1}) = \mathbf{3{,}2} > 0$ und $f(\mathbf{2}) = \mathbf{-2{,}8} < 0$

Im Intervall [a; b] = [1; 2] muss also eine Nullstelle x_N liegen.

Den 1. Näherungswert erhält man durch Halbierung des ersten Intervalls:

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1{,}5$$

Für den zugehörigen Funktionswert erhält man: $f(1{,}5) = 0{,}325 > 0$

Die Funktionswerte der Intervallgrenzen müssen verschiedene Vorzeichen haben. Die gesuchte Nullstelle muss daher in [1,5; 2] liegen. Der Rechenvorgang wird nun durch Halbierung dieses Intervalls fortgesetzt. Möchte man die Näherung x_n der Nullstelle mit einem maximalen Fehler von 0,01 ermitteln, muss $|x_n - x_{n-1}| < 0{,}01$ gelten.

Die weitere Vorgehensweise wird in einer Tabelle dargestellt:

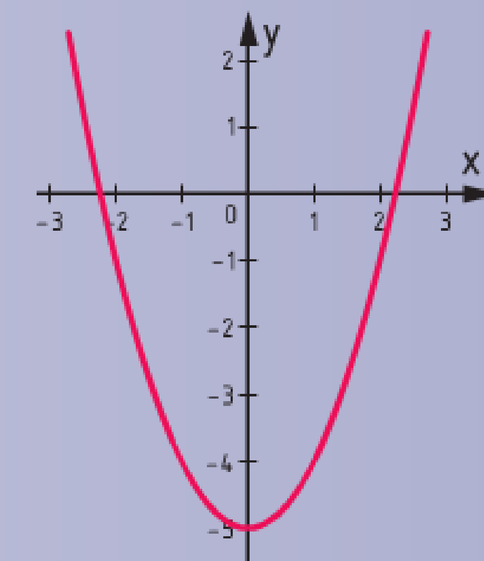
n	a	b	x_n	$f(x_n)$		$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
1	1	2	1,5	0,325	> 0	
2	**1,5**	2	1,75	−1,253125	< 0	0,25
3	1,5	**1,75**	1,625	−0,462109...	< 0	0,125
4	1,5	**1,625**	1,5625	−0,067333...	< 0	0,0625
5	1,5	**1,5625**	**1,5**3125	0,129229...	> 0	0,03125
6	**1,53125**	1,5625	**1,5**46875	0,031035...	> 0	0,015625
7	**1,546875**	1,5625	**1,5**546875	−0,018286...	< 0	0,007812...
8	1,546875	**1,5546875**	**1,5**5078125	0,006458...	> 0	0,003906...
9	**1,55**078125	**1,55**46875	**1,55**2734375	-0,005833...	< 0	0,001953...

Stimmen die beiden Intervallgrenzen a und b in den ersten beiden Dezimalstellen überein, so hat der Näherungswert zwei gesicherte Dezimalstellen, $x_N = 1{,}55$. Die letzte Näherung $x_n = 1{,}552734...$ weicht um maximal $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert = 0{,}001953...$ von x_N ab.

7.2 Ermittle $\sqrt{5}$ mittels Intervallhalbierung auf drei Dezimalstellen genau. Verwende dazu eine geeignete Funktion und beschreibe deine Vorgehensweise.

BC





Lösung mit Excel 2010:

Um $\sqrt{5}$ zu ermitteln, muss ich die positive Nullstelle von $f(x) = x^2 - 5$ berechnen. Ich stelle die Funktion grafisch dar und sehe, dass diese positive Nullstelle im Intervall [2; 3] liegt.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a	f(a)	b	f(b)	xn	f(xn)	|xn - xn-1|
2	1	2	-1	3	1	2,5	1	
3	2	2	-1	2,5	1	2,25	1	0,25
4	3	2	-1	2,25	1	2,125	-1	0,125
5	4	2,125	-1	2,25	1	2,1875	-1	0,0625
6	5	2,1875	-1	2,25	1	2,21875	-1	0,03125
7	6	2,21875	-1	2,25	1	2,234375	-1	0,015625
8	7	2,234375	-1	2,25	1	2,2421875	1	0,0078125
9	8	2,234375	-1	2,2421875	1	2,23828125	1	0,00390625
10	9	2,234375	-1	2,23828125	1	2,23632813	1	0,00195313
11	10	2,234375	-1	2,23632813	1	2,23535156	-1	0,00097656
12	11	2,23535156	-1	2,23632813	1	2,23583984	-1	0,00048828
13	12	2,23583984	-1	2,23632813	1	2,23608398	1	0,00024414
14	13	2,23583984	-1	2,23608398	1	2,23596191	-1	0,00012207
15	14	2,23596191	-1	2,23608398	1	2,23602295	-1	6,1035E-05
16	15	2,23602295	-1	2,23608398	1	2,23605347	-1	3,0518E-05

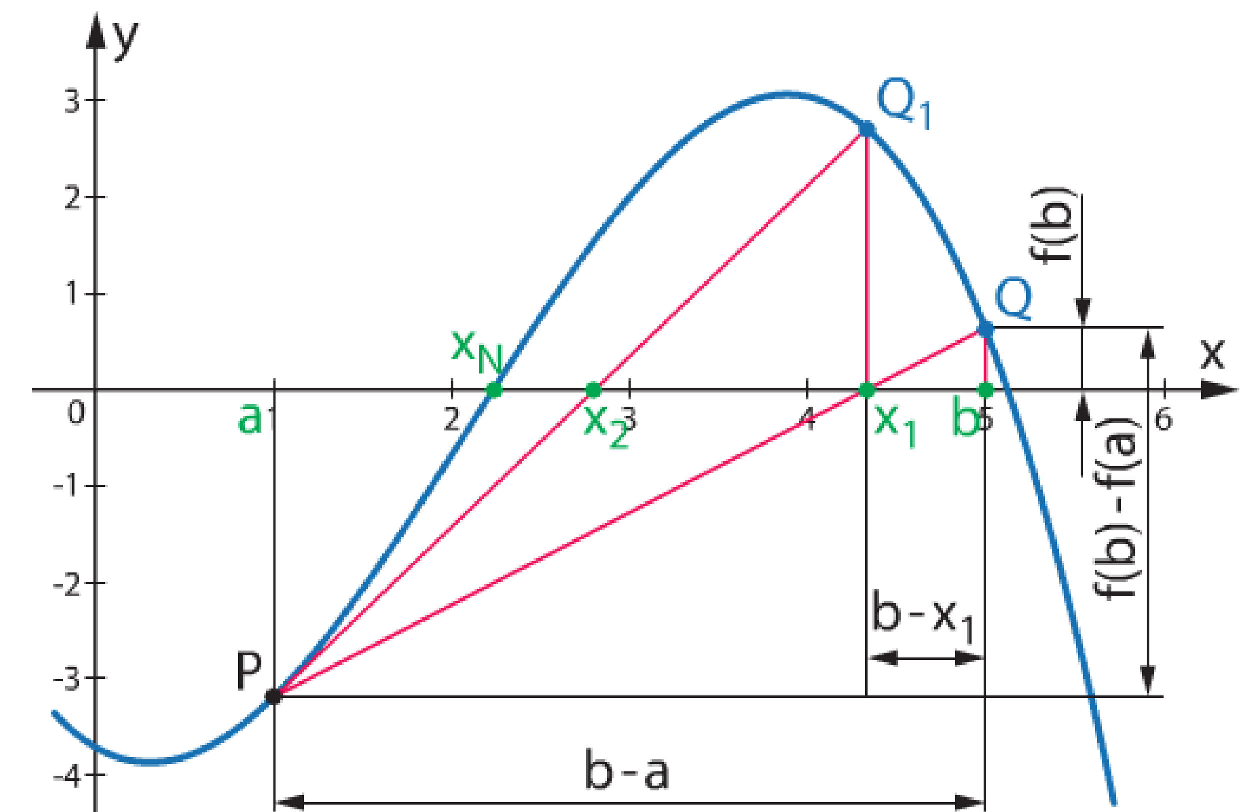
Ich trage in Excel die Intervallgrenzen a und b in die Zellen B2 bzw. D2 ein. In Zelle F2 ermittle ich durch **=(B2+D2)/2** die erste Näherung x_1. In G2 wird das Vorzeichen des Funktionswerts $f(x_1)$ mittels **=VORZEICHEN(F2^2-5)** ermittelt, genauso an den Intervallgrenzen in C2 und E2. In der Spalte H ermittle ich die Differenz der aufeinander folgenden Näherungswerte. Sie entspricht dem maximalen Fehlern, zum Beispiel in H3: **=ABS(F3-F2)**

Um die Intervallgrenzen neu festzulegen, muss ich WENN-Funktionen verwenden. „Wenn die Vorzeichen der Funktionswerte der Intervallgrenze a und des Näherungswerts x_n verschieden sind, bleibt a die Intervallgrenze, sonst x_n."
Möchte man überprüfen, ob die Vorzeichen zweier Werte unterschiedlich sind, muss ihr Produkt wegen $(-1) \cdot (+1) = (-1)$ bzw. $(+1) \cdot (-1) = (-1)$ kleiner als Null sein.
Zelle B3: **=WENN(C2*G2<0;B2;F2)**
Für die andere Intervallgrenze in Zelle D3 gilt analog: **=WENN(E2*G2<0;D2;F2)**
Die weiteren Zeilen können kopiert werden. In der Spalte H erkenne ich, dass x_n erstmals beim 10. Schritt kleiner als 0,001 ist. Die Näherung lautet daher: $\sqrt{5} = 2{,}235...$

Näherungsverfahren

Regula falsi

Um einen Näherungswert für eine Nullstelle einer Funktion zu bestimmen, werden beim Verfahren **Regula falsi** („Regel des falschen Ansatzes“) die Nullstellen von Sekanten der Funktion ermittelt.



ZB: Stellt man $f(x) = -0{,}3x^3 + 1{,}9x^2 - 1{,}1x - 3{,}7$ grafisch dar, lässt sich ein Bereich festlegen, in dem sich eine Nullstelle x_N von f befinden muss. Nun wählt man eine Stelle $a < x_N$, zB a = **1**, und eine Stelle $b > x_N$, zB b = **5**. Die Funktionswerte f(a) und f(b) an diesen Stellen müssen unterschiedliche Vorzeichen haben.

Ausgehend vom Punkt P(**a**|**f(a)**) = P(**1**|**−3,2**) wird eine Sekante durch Q(**b**|**f(b)**) = Q(**5**|**0,8**) gelegt. Deren Schnittpunkt mit der x-Achse ist eine Näherung für die Nullstelle.
Die x-Koordinate x_1 des Schnittpunkts erhält man mithilfe des Strahlensatzes:

$$(b - a) : (b - x_1) = [f(b) - f(a)] : f(b)$$

$$f(b) \cdot (b - a) = (b - x_1) \cdot [f(b) - f(a)]$$

$$f(b) \cdot (b - a) = b \cdot [f(b) - f(a)] - x_1 \cdot [f(b) - f(a)]$$

$$x_1 \cdot [f(b) - f(a)] = b \cdot [f(b) - f(a)] - f(b) \cdot (b - a)$$

$$x_1 = b - f(b) \cdot \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \Rightarrow x_1 = 4{,}2$$

Der Funktionswert dieser Näherung $f(x_1) \approx 2{,}97$ ist positiv. Da f(a) negativ ist, muss die Nullstelle zwischen a und x_1 liegen. Nun führt man diesen Rechenschritt mit den Punkten P(a|f(a)) und $Q_1(x_1|f(x_1))$ erneut durch und erhält eine weitere Näherung.

Allgemein gilt, dass eine der beiden Intervallgrenzen durch die Näherung so ersetzt wird, dass die Funktionswerte an den neuen Intervallgrenzen unterschiedliche Vorzeichen haben. Diese Überlegungen wiederholt man für jeden weiteren Näherungswert x_n, bis man die Nullstelle x_N mit der gewünschten Genauigkeit erhält.

n	a	f(a)	b	f(b)	x_n	$f(x_n)$
1	1	−3,2	5	+0,8	**4,2**	+2,9696
2	**1**	−3,2	4,2	+2,9696	**2,659751...**	+1,170653
3	1	**−3,2**	2,659751...	+1,170653...	**2,215196...**	−0,074288...
4	2,215196...	**−0,074288...**	2,659751...	+1,170653...	**2,241724...**	+0,002606...
5	2,215196...	**−0,074288...**	2,241724...	+0,002606	**2,240825...**	+**0,000000**...

Die fünfte Näherung für die Nullstelle x_N lautet: $x_n = 2{,}24\ldots$

Regula falsi

Liegt die Nullstelle einer Funktion in einem Intervall [a; b] und haben die Funktionswerte f(a) und f(b) unterschiedliche Vorzeichen, so wird mithilfe folgender Formel die Nullstelle x_1 einer Sekante der Funktion als Näherungswert für die Nullstelle der Funktion ermittelt.

$$x_1 = b - f(b) \cdot \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

Dieser Vorgang kann bei Bedarf wiederholt werden.

Technologieeinsatz: Regula falsi

Tabellenkalkulationsprogramm (Excel 2010)

ZB: Eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 8$ soll ermittelt werden:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	f(x)						
2	2	-6						
3	3	-7						
4	4	4						
5	5	33						
6								
7	n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	
8	1	3	-7	4	4	3,636364	-1,767092	
9	2	3,636364	-1,767092	4	4	3,747785	-0,235613	
10	3	3,747785	-0,235613	4	4	3,761815	-0,028437	
11	4	3,761815	-0,028437	4	4	3,763496	-0,003390	
12	5	3,763496	-0,003390	4	4	3,763697	-0,000404	
13						=D8-E8*(D8-B8)/(E8-C8)		
14		=WENN(C8*G8<0;B8;F8)						
15				=WENN(D8*G8<0;D8;F8)				

Zum Auffinden des Startwerts wird eine Wertetabelle erstellt.
B2: **=A2^3-3*A2^2-5*A2+8**
Wegen des Vorzeichenwechsels gibt es eine Nullstelle im Intervall [3; 4]. Man wählt den Punkt P(3|–7) als Startpunkt.
In der Tabelle werden in den Zellen B8 und D8 die Intervallgrenzen angegeben, in F8 wird die Formel zur Berechnung der ersten Näherung eingegeben (siehe Screenshot).

In den Zellen C8, E8 und G8 werden jeweils die entsprechenden Funktionswerte mithilfe der Funktionsgleichung angegeben. Nun müssen die weiteren Intervallgrenzen mithilfe von WENN-Funktionen in den Zellen B9 und D9 ermittelt werden.

Zelle B9: **=WENN(C8*G8<0;B8;F8)** Zelle D9: **=WENN(D8*G8<0;D8;F8)**

Die Zellen werden kopiert. Vergleicht man die Werte von x_n, so erkennt man, dass die ersten drei Nachkommastellen in den Zellen F11 und F12 gleich sind. Die Funktionswerte von x_n nähern sich in Spalte G dem Wert null. In der Näherung $x_n = 3{,}763...$ sind die ersten drei Dezimalstellen gesichert.

7.3 Löse die Gleichung mittels Intervallhalbierung auf drei gesicherte Dezimalstellen. **B**

a) $x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = 0$
b) $3x^3 - 6x^2 - 2x + 8 = 0$
c) $2x^3 - 5x^2 + 3x - 6 = 0$
d) $3x^4 - 2x - 4 = 0$

7.4 Löse die Gleichung mithilfe der Regula falsi auf drei gesicherte Dezimalstellen. **B**

a) $x^3 - 2x - 5 = 0$
b) $x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$
c) $-x^3 + 5x^2 - 2x - 3 = 0$
d) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$

7.5 **ABCD**



1) Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}4x^2 - 3x - 6$. Ermittle die Nullstelle im Intervall [0; 10] näherungsweise mithilfe von Nullstellen von Sekanten grafisch und rechnerisch. Verwende dabei die vorgegebenen Startwerte.
A) a = 5 und b = 10, ***B)*** a = 2 und b = 10
2) Beschreibe die unterschiedlichen Ausgangssituationen und erkläre, ob sich dies auf die Nullstellenermittlung auswirkt.
3) Ermittle die Nullstelle von f mittels Regula falsi mithilfe von Technologieeinsatz auf zwei gesicherte Dezimalstellen. Vergleiche die Anzahl der Rechenschritte mit der aus ***1)***.

7.6 Ermittle die Nullstelle der Funktion f(x) für x > 0 zuerst mit der Methode der Intervallhalbierung und danach mithilfe der Regula falsi jeweils auf drei gesicherte Dezimalstellen. Erkläre anschließend die Vor- und Nachteile beider Methoden. **ABD**

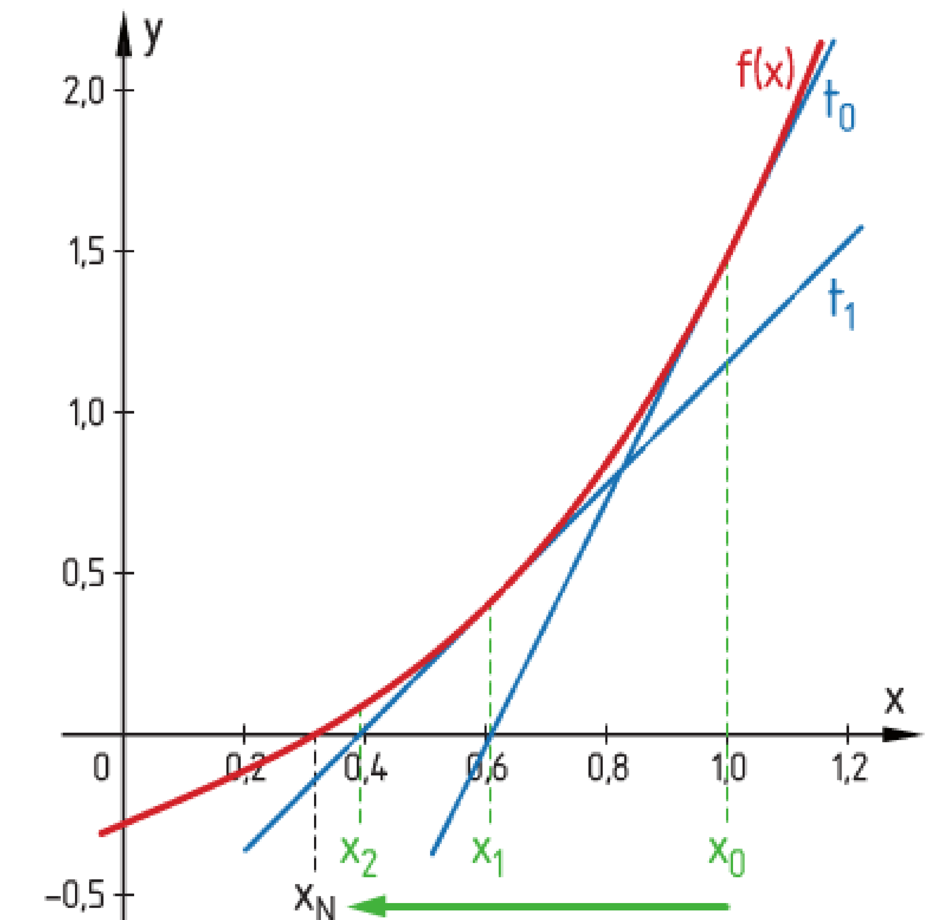


a) $f(x) = 0{,}5x^2 + e^{-0{,}3x} - 3{,}6$
b) $f(x) = -0{,}85x + 3 \cdot \sin(2x)$

7.1.2 Newton'sches Näherungsverfahren

Das **Newton'sche Näherungsverfahren** ist eine weitere Methode zur Ermittlung von Nullstellen. Während bei der Regula falsi mit Sekanten gearbeitet wird, werden nun Tangenten an den Funktionsgraphen gelegt. Dazu benötigt man Methoden der Differentialrechnung.

ZB: Aus dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3 + 0{,}8x - 0{,}3$ geht hervor, dass sich im Intervall [0; 1] eine Nullstelle x_N befindet.



An einer der Nullstelle x_N **nahe** gelegenen Stelle $\mathbf{x_0}$ (zB am Intervallende bei $\mathbf{x_0 = 1}$) legt man eine Tangente $\mathbf{t_0}$ an die Funktion f(x) und berechnet die Nullstelle $\mathbf{x_1}$ dieser Tangente. Diese Stelle liegt näher bei x_N als $\mathbf{x_0}$. Legt man nun eine weitere Tangente $\mathbf{t_1}$ an der Stelle $\mathbf{x_1}$ an die Funktion und berechnet deren Nullstelle $\mathbf{x_2}$, ist man der Stelle x_N ein weiteres Stück näher gekommen.
Wiederholt man diesen Vorgang beliebig oft, nähern sich die Nullstellen der Tangenten immer mehr der Nullstelle x_N der Funktion.

Das Newton'sche Näherungsverfahren wird nun anhand eines konkreten Beispiels und allgemein gezeigt.

ZB: $f(x) = x^3 + 0{,}8x - 0{,}3$ Allgemein: $f = f(x)$

- Ermitteln der **1. Ableitung**:

  $f'(x) = 3x^2 + 0{,}8$

- **Gleichung der Tangente $\mathbf{t_0}$** an der Stelle $\mathbf{x_0}$:

ZB	Allgemein
$k = f'(1) = 3{,}8$	$k = f'(x_0)$
t_0: $f(1) = f'(1) \cdot 1 + d_0$	t_0: $y = f'(x_0) \cdot x + d_0$
$d_0 = f(1) - f'(1) \cdot 1 = -2{,}3$	$d_0 = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
t_0: $y = 3{,}8 \cdot x - 2{,}3$	t_0: $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

- Die **Nullstelle $\mathbf{x_1}$** der Tangente $\mathbf{t_0}$ ist die **1. Näherung** für die Nullstelle $\mathbf{x_N}$ der Funktion f(x):

ZB	Allgemein
$3{,}8 \cdot x_1 - 2{,}3 = 0$	$f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = 0$
$\mathbf{x_1 \approx 0{,}605\,263}$	$x_1 = \frac{f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

- **Gleichung der Tangente $\mathbf{t_1}$** an der Stelle $\mathbf{x_1}$:

ZB	Allgemein
t_1: $f(0{,}605\,263) = f'(0{,}605\,263) \cdot 0{,}605\,263 + d_1$	t_1: $y = f'(x_1) \cdot x + d_1$
$d_1 \approx -0{,}743\,468$	$d_1 = f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1$
t_1: $y = 1{,}899\,030 \cdot x - 0{,}743\,468$	t_1: $y = f'(x_1) \cdot x + f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1$

- Die **Nullstelle $\mathbf{x_2}$** der Tangente $\mathbf{t_1}$ ist die **2. Näherung** für die Nullstelle $\mathbf{x_N}$ der Funktion f(x):

ZB	Allgemein
$1{,}899\,030 \cdot x_2 - 0{,}743\,468 = 0$	$f'(x_1) \cdot x_2 + f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1 = 0$
$\mathbf{x_2 \approx 0{,}391\,499}$	$x_2 = \frac{f'(x_1) \cdot x_2 - f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Für die (n + 1)-te Näherung der Nullstelle x_N erhält man allgemein: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Diese Formel kann auch als Folge der Tangentennullstellen interpretiert werden, die gegen die Nullstelle x_N der Funktion konvergiert.

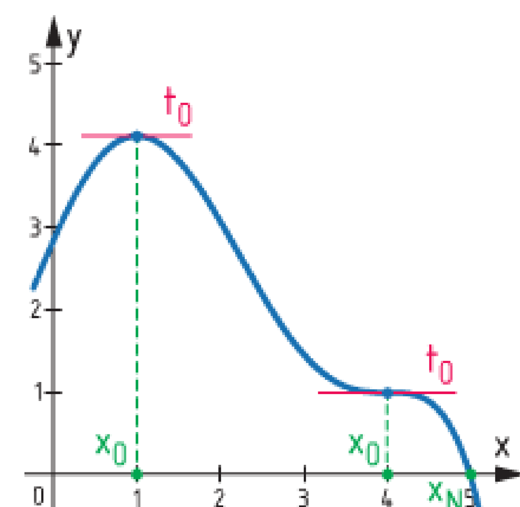
Zur übersichtlichen Darstellung der näherungsweisen Berechnung der Nullstelle von $f(x) = x^3 + 0,8x - 0,3$ kann man eine Tabelle verwenden:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	1,5	3,8	0,394736842…	0,605263157…
1	0,605263157…	0,405944744…	1,899030470…	0,213764207…	0,391498950…
2	0,391498950…	0,073204763…	1,259814283…	0,058107583…	0,333391366…
3	0,333391366…	0,003769478…	1,133449410…	0,003325669…	0,330065697…
4	0,330065697…	0,000011025…	1,126830093…	0,000009784…	0,330055912…
5	0,330055912…	0,000000000094…	1,126810716…	0,000000000084…	0,330055912758…

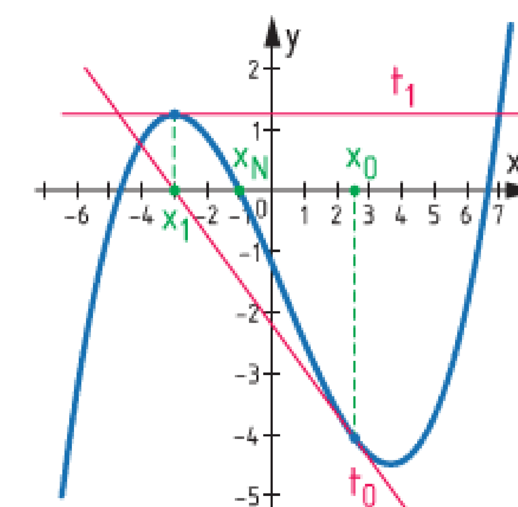
Ab der Nullstelle der 5. Tangente erhält man bereits eine Näherung für die Nullstelle der Funktion, die in den ersten acht Dezimalstellen mit denen der vorhergehenden Näherung übereinstimmt. Genügt es, die Nullstelle bis zur 6. Dezimalstelle anzugeben, kann man die Rechnung an dieser Stelle beenden. Die Nullstelle der Funktion f(x) liegt bei $\mathbf{x_N} \approx \mathbf{0,330\,056}$.

Das Newton'sche Näherungsverfahren führt nur dann zum Erfolg, wenn der Startwert x_0 **„hinreichend"** nahe gewählt wird. Das bedeutet, dass nicht immer alle Stellen einer Funktion als Startwert geeignet sind. Es können folgende Fälle auftreten:

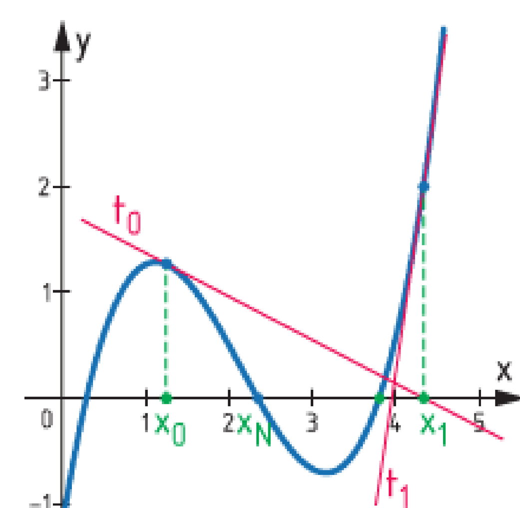
- Wählt man eine Stelle mit waagrechter Tangente, ergibt sich keine Nullstelle.



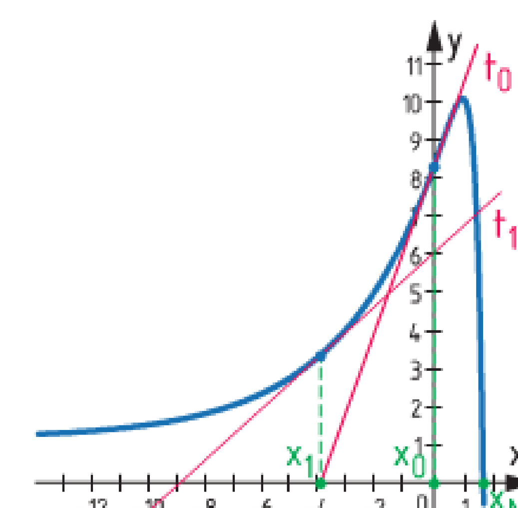
- Im Verlauf des Verfahrens wird eine Stelle mit waagrechter Tangente erreicht.



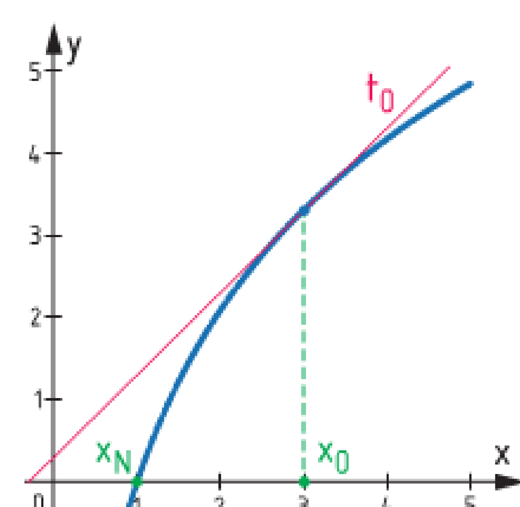
- Die Nullstellenfolge konvergiert gegen eine andere Nullstelle.



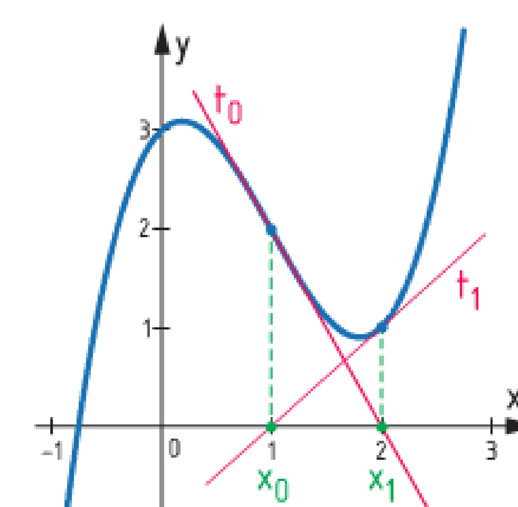
- Die Nullstellenfolge divergiert.



- Die Nullstelle einer Tangente liegt in einem Bereich, für den die Funktion nicht definiert ist. ZB: y = ln(x)



- Die Nullstellenfolge oszilliert, sie „springt" zwischen zwei Stellen hin und her.



Newton'sches Näherungsverfahren

Ist x_N eine Nullstelle der Funktion f(x) und x_0 eine geeignet gelegene Stelle, konvergiert die Folge $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit n = 0, 1, 2, … gegen die Nullstelle x_N.

Näherungsverfahren

B **7.7** Ermittle die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 8$ im Intervall [2; 5] mithilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens auf drei Dezimalstellen genau.



Lösung mit Excel 2010:

	A	B	C	D	E
1		x	f(x)		
2		2	-6	f(x)=x^3-3x^2-5x+8	
3		3	-7		
4		4	4	f'(x)=3x²-6x-5	
5		5	33		
6					
7	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
8	0	3,5	-3,375	10,75	3,8139535
9	1	3,8139535	0,7701963	15,755003	3,7650677
10	2	3,7650677	0,0200577	14,936798	3,7637248
11	3	3,7637248	1,496E-05	14,914525	3,7637238
12	4	3,7637238	8,338E-12	14,914508	3,7637238

- Erstellen einer Wertetabelle, um die erste Näherung für die Nullstelle zu finden, zB: $x_0 = 3,5$
- Eingeben der ersten Ableitung $f'(x)$
- Erstellen einer Tabelle und Eingabe der Formeln
- Eingabe der Formel für das Newton'sche Näherungsverfahren in Zelle D8: **=A8-(B8/C8)**
- Eingabe von **=D8** in Zelle A9
- Die Formeln werden bis zur gewünschten Näherung der Nullstelle nach unten kopiert. Die Nullstelle liegt näherungsweise an der Stelle $x_N = 3,763...$

Aufgaben 7.8 - 7.10: Bestimme jeweils die Nullstelle der Funktion f im angegebenen Intervall auf drei gesicherte Dezimalstellen. Verwende dabei das Newton'sche Näherungsverfahren.

B **7.8**
a) $f(x) = 0,5x^3 - 2x^2 + 2$; [1; 2]
b) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3$; [−3; −2]
c) $f(x) = -0,1x^3 + x^2 - 12$; [4; 5]
d) $f(x) = -3x^3 + 10x^2 - 6$; [3; 4]

B **7.9**
a) $f(x) = x^5 + 2x + 1$; [−1; 0]
b) $f(x) = \frac{1}{3x^2 - 7} - 2x$; [1; 2]
c) $f(x) = 0,3x^7 - 4x^2 + 2$; [0; 1]
d) $f(x) = \frac{1}{x + 2} + 5x^2$; [−2,5; −1,5]

B **7.10**
a) $f(x) = x^3 - e^x$; [4; 5]
b) $f(x) = \cos(2x) + x$; [−1; 0]
c) $f(x) = 0,5x + \ln(x)$;]0; 1]
d) $f(x) = \sin(x + 1) - 0,5x$; [1; 2]



ABCD **7.11** Bestimme die Nullstelle der Funktion im angegebenen Intervall mithilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens auf drei gesicherte Dezimalstellen. Wähle als Startwert zuerst den Wert am Ende des Intervalls und begründe, ob dieser Wert als Startwert geeignet ist. Führe die Rechnung gegebenenfalls mit einem besser geeigneten Startwert durch.



a) $f(x) = x \cdot \ln(x) - 4$; [3; 5]
b) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - 2x + 1$; [1; 3]
c) $f(x) = x^4 - 8,125x^2 + 14,5$; [−3; −2]
d) $f(x) = 4x - e^x$; [0; 2]
e) $f(x) = 2x \cdot \sin(x)$; [−4; −2]
f) $f(x) = x^3 - 0,3x^2 - 2,97x - 0,701$; [−1; 0]

B **7.12** Die Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = 4 - x^2$ schneiden einander in zwei Punkten. Verwende das Newton'sche Näherungsverfahren, um die Koordinaten der Schnittpunkte näherungsweise auf drei gesicherte Dezimalstellen zu bestimmen.

ABC **7.13** Berechne die Wurzel mithilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens auf drei Dezimalstellen genau. Welche Gleichung muss man lösen, um die Wurzel berechnen zu können? Beschreibe deine Vorgehensweise.
a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{7}$ **c)** $\sqrt[3]{11}$ **d)** $\sqrt[5]{91}$

7.14 Stelle jeweils die linke Seite der Gleichung als Funktion grafisch dar. Erkläre, warum der angegebene Startwert nicht zur Ermittlung einer Lösung mithilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens geeignet ist. BCD TE

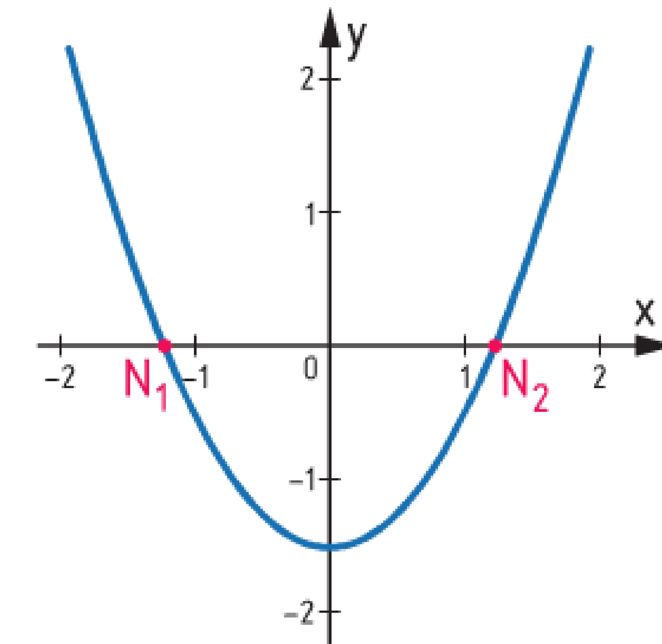
1) $3a^3 - 6a^2 + 1 = 0,\ \ a_0 = 0$

2) $c^2 - 4 = 0,\ \ c_0 = -2$

3) $\frac{5t^2 - 7}{6 + t - 2t^2} = 0,\ \ t_0 = 2$

4) $\sqrt[3]{\frac{1{,}7 \cdot x + 3{,}4}{x - 3}} = 0,\ \ x_0 = -\frac{1}{3}$

7.15 **1)** Zeichne den nebenstehenden Funktionsgraphen von $f(x) = x^2 - 1{,}5$ und zeichne an der Stelle $x_0 = 2$ die Tangente ein. Gegen welche der beiden Nullstellen N_1 oder N_2 würden die Nullstellen der Tangenten beim Anwenden des Newton'schen Näherungsverfahrens in weiterer Folge konvergieren? ABCD TE



2) Was geschieht, wenn du bei Verwendung des Newton'schen Näherungsverfahrens $x_0 = 0$ als Startwert wählst?

3) Erkläre, welcher Startwert zur Ermittlung von N_2 geeignet ist: $x_0 = -0{,}3$ oder $x_0 = 5$

Aufgaben 7.16 – 7.20: Löse die zur Berechnung notwendigen Gleichungen mithilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens.

7.16 Die Summe der dritten Potenzen von drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist 5 256. Wie lauten die drei Zahlen? B

7.17 Die Verwaltung des Pensionistenwohnheims „Zur schattigen Pinie" rechnet mit der Gewinnfunktion $G(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}089x^2 - 0{,}508x - 27{,}3$. AB

G … Gewinn in 1 000,00 €, x … Anzahl der Bewohner



1) Berechne, zwischen welchen Belegungszahlen Gewinn erwirtschaftet wird.

2) Bei welcher Belegung macht das Wohnheim den größten Gewinn?

3) Das Wohnheim hat zur Zeit 42 Bewohner. Ermittle den momentanen Gewinn.

4) Der Gewinn soll, ausgehend von Aufgabe **3)**, auf 38 000,00 € gesteigert werden. Berechne, wie viele Bewohner zusätzlich aufgenommen werden müssen.

7.18 Auf einem Stahlgerüst ist ein kugelförmiger Wasserbehälter mit einem Innendurchmesser von 8 m befestigt. Aus statischen Gründen darf er höchstens mit 250 000 Liter Wasser befüllt werden. Berechne, bis zu welcher Höhe das Wasser im Behälter stehen darf. AB

7.19 Die Differenz zweier Zahlen ist 63. Dividiert man 300 durch die größere der beiden Zahlen, so erhält man das Quadrat des sechsten Teils der kleineren Zahl. Welche Zahlen erfüllen diese Bedingung? AB

7.20 Eine Kerze in Form einer quadratischen Pyramide hat eine Masse von 400 g und eine mittlere Dichte von 700 $\frac{g}{dm^3}$. Die Oberfläche der Kerze beträgt 500 cm^2. Wie groß ist die Grundkante der Kerze? Wie lang ist der Docht, wenn er an der Spitze 1 cm aus der Kerze herausragt? ABC

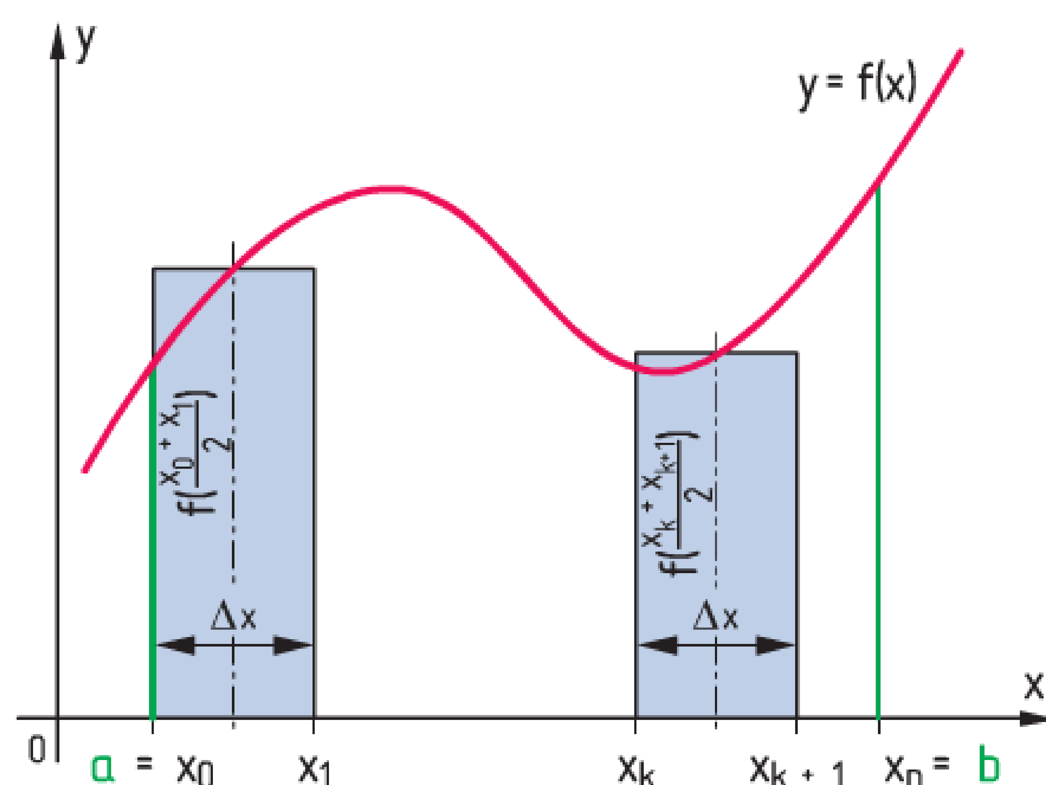
7.2 Numerische Integration

In vielen Fällen ist es nicht möglich, zu einer gegebenen Funktion eine Stammfunktion anzugeben bzw. wäre die Berechnung zu aufwändig. Der Zahlenwert des bestimmten Integrals kann bei beschränkten stetigen Funktionen aber immer – zumindest näherungsweise – als Flächeninhalt unter der Kurve bestimmt werden. Dazu verwendet man **numerische Integrationsmethoden**, die eine Näherung des Integralwerts liefern. Bei den meisten Verfahren wird der Integrationsbereich in Teilintervalle unterteilt. Dort wird der Funktionsgraph durch einfache Funktionen angenähert. Mithilfe dieser Methoden ist es auch möglich, bestimmte Integrale von Funktionen näherungsweise zu ermitteln, wenn nur Wertepaare der Funktion bekannt sind. Wir beschränken uns auf Aufgaben, bei denen der Funktionsgraph im untersuchten Integrationsbereich stets oberhalb der waagrechten Achse liegt.

7.2.1 Rechteck- und Trapezregel

Rechteckregel

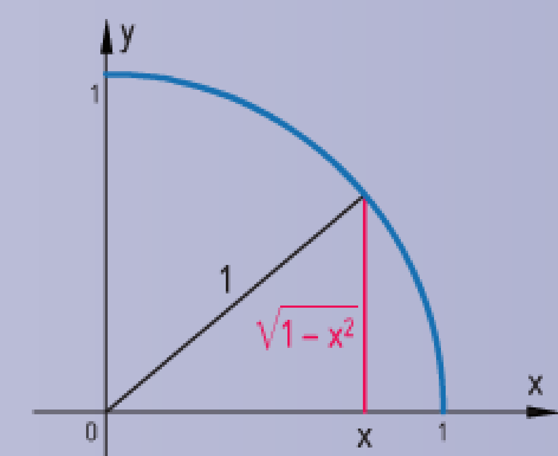
Nach der Unterteilung in n Teilintervalle werden zur Näherung der Fläche Rechtecke verwendet, deren Höhe jeweils der Funktionswert in der Mitte eines Teilintervalls ist.



- $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Flächeninhalt des k-ten Rechtecks:
  $A_k = \Delta x \cdot f \cdot \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$
- Gesamtfläche:
  $A_R = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x \cdot f \cdot \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$

Rechteckregel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

B **7.21** Berechne das Integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ***1)*** elementar,
2) mit der Rechteckregel für n = 4.



Lösung:

1) $A = \frac{\pi}{4} = 0{,}785... \approx 0{,}79$ E²

- Viertelkreis, Radius r = 1

2) $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0{,}25$

$x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 0{,}75$; $x_4 = 1$

- Der Bereich wird in vier gleich große Teilintervalle geteilt.

$\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$
0,125	0,992...
0,375	0,927...
0,625	0,780...
0,875	0,484...
Σ	**3,183...**

- Berechnen der Funktionswerte an den Mittelpunkten dieser Intervalle

$A_R = \Delta x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) =$

$= 0{,}25 \cdot 3{,}183... =$

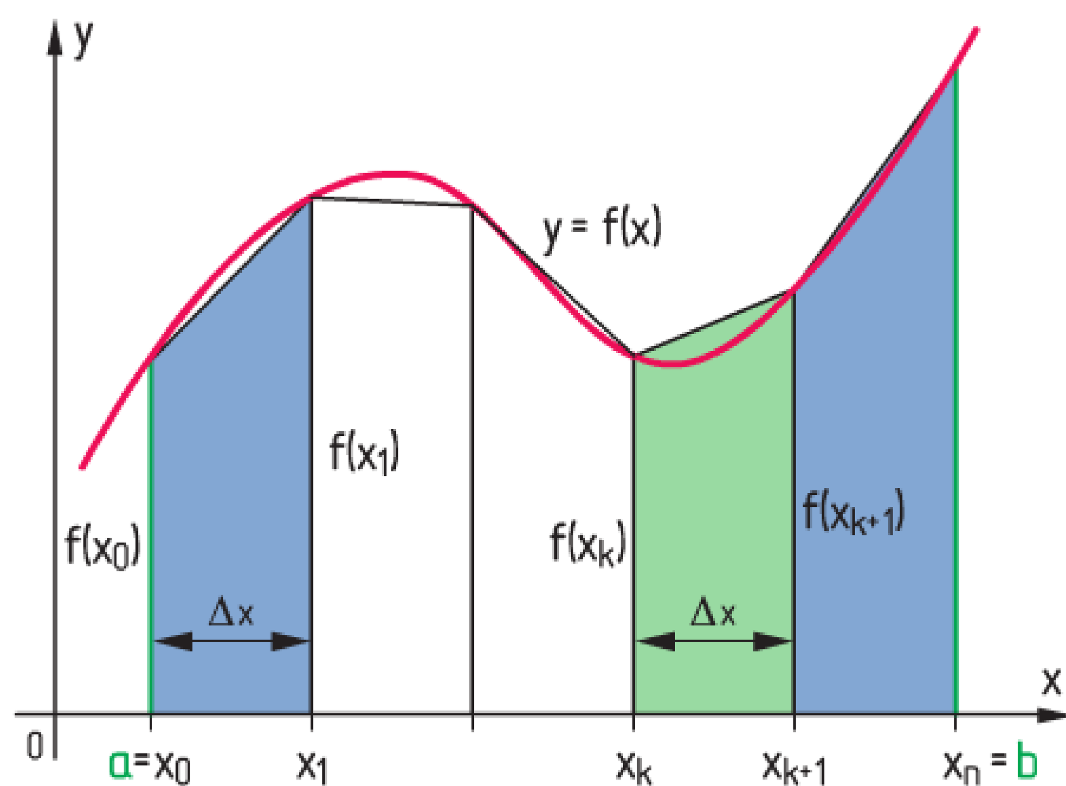
$= 0{,}795... \approx 0{,}80$ E²

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \approx 0{,}80$

- Rechteckregel anwenden

Trapezregel

Werden nach der Unterteilung in Teilintervalle die Punkte des Graphen am Rand dieser Intervalle durch Geradenstücke verbunden, erhält man (stehende) Trapeze mit der Höhe Δx. Dabei sind die Funktionswerte der Teilungspunkte jeweils die Längen der Parallelseiten der Trapeze.



- $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- Flächeninhalt des k-ten Trapezes:
  $A_k = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta x = \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_k) + f(x_{k+1})]$
- Gesamtfläche:
  $A_T = \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_1) + f(x_2)] + \dots$
  $\dots + \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + \frac{\Delta x}{2} \cdot [f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

  Herausheben von Δx ergibt:
  $A_T = \Delta x \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$

Trapezregel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$ mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

7.22 Berechne das Integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ mithilfe der Trapezregel für n = 4 und vergleiche das Ergebnis mit dem genauen Wert und der Näherung aus Aufgabe **7.21**. BC

Lösung:

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0{,}25$ • Teilung in vier Intervalle

$x_0 = 0;\ x_1 = 0{,}25;\ x_2 = 0{,}5;\ x_3 = 0{,}75;\ x_4 = 1$ • Teilungspunkte festlegen

• Berechnung der Funktionswerte

x_k	$f(xk) = \sqrt{1-x_k^2}$	
0	1	
0,25	0,968...	2,495...
0,5	0,866...	
0,75	0,661...	
1	0	

• Trapezregel anwenden

$A_T = \Delta x \cdot \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2}\right] = 0{,}25 \cdot (0{,}5 + 2{,}495... + 0) = 0{,}748... \approx 0{,}75\ E^2$

Genauer Wert: $A = \frac{\pi}{4}E^2 = 0{,}785...\ E^2 \approx 0{,}79\ E^2$

Die gerundeten Werte unterscheiden sich um $0{,}04\ E^2$. Bei Verwendung der Rechteckregel wie in Aufgabe **7.21** ergibt sich eine bessere Näherung.

7.23 Berechne näherungsweise mit der Rechteckregel für **1)** n = 3 und **2)** n = 6. B

a) $\int_0^3 \sqrt{x}\,dx$ **b)** $\int_0^1 \sin(t^2)\,dt$ **c)** $\int_0^{1,} \frac{1}{2-x^2}\,dx$ **d)** $\int_0^6 \sqrt{1+u^2}\,du$

7.24 Berechne näherungsweise mit der Trapezregel für **1)** n = 2 und **2)** n = 4. B

a) $\int_1^3 \ln(x)\,dx$ **b)** $\int_0^1 \cos(t^2)\,dt$ **c)** $\int_{-1}^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$ **d)** $\int_{-1}^1 \sqrt{e^s}\,ds$

7.2.2 Kepler'sche Fassregel und Simpson-Regel

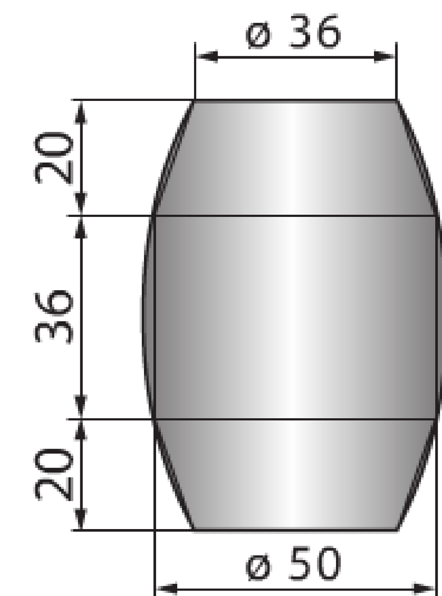
Kepler'sche Fassregel



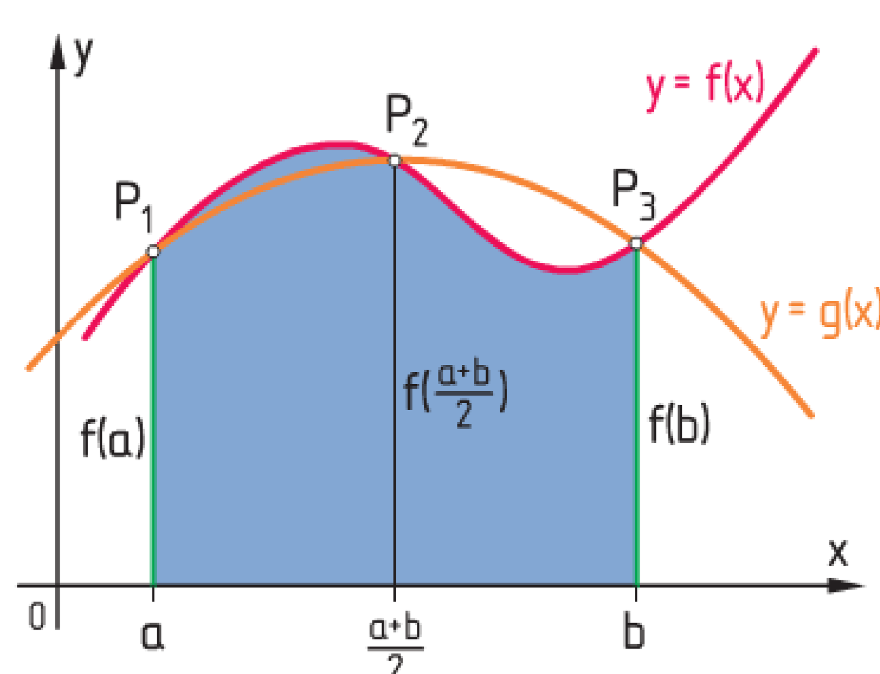
1613 heiratete Johannes Kepler (1571 - 1630) seine um 20 Jahre jüngere zweite Ehefrau, Susanne Reutinger aus Eferding. Bei der Vermählungsfeier war es die Aufgabe des Bräutigams, genügend Wein für die Gäste bereit zu stellen. Bei der Bestellung der Fässer wurde vom Händler ein Messstab diagonal in ein Fass eingebracht. Anhand des so gemessenen Flüssigkeitsstands gab der Weinhändler den geschätzten Inhalt an. Obwohl die Fässer unterschiedliche Formen hatten, war die Messmethode stets die gleiche. Diese Ungenauigkeit machte Kepler stutzig und bewog ihn dazu, die Form von Fässern zu untersuchen und Modelle zur Berechnung der Fassbemaßungen zu entwickeln. Kepler erkannte, dass das „österreichische Fass" das größte Volumen im Verhältnis zur Länge der Innendiagonale aufwies und dass kleine Abweichungen von der Idealform kaum Einfluss auf das Fassungsvermögen der Fässer haben. Die nach ihm benannte **Kepler'sche Fassregel** nähert zum Beispiel den Meridian eines Fasses durch eine Parabel an. Seine Erkenntnisse schrieb er in seinem 1615 veröffentlichten Buch „Nova stereometria dolorium vinariorum" (Neue Stereometrie der Weinfässer) nieder. Das Werk endet in Anlehnung an ein Liebesgedicht von Catull mit den Worten: *„Et cum pocula mille mensi erimus, conturbabimus illa, ne sciamus."* (Übersetzt: „Und wenn wir 1 000 Becher geleert haben, dann bringen wir sie durcheinander, damit wir es nicht mehr genau wissen.")

AB **7.25** ***1)*** Nähere die Querschnittsfläche und das Volumen des abgebildeten Fasses durch Zerlegung in elementare Figuren bzw. Körper (Maße in cm).

2) Das Fass hat eine tatsächliche Querschnittsfläche von 37,5 dm^2 und ein Fassungsvermögen von 147,5 Liter. Ermittle jeweils den absoluten und den relativen Fehler deiner Berechnungen aus ***1)***.



Besser als durch Geradenstücke kann eine Kurve durch eine Polynomfunktion 2. Grads angenähert werden. Um die Funktionsgleichung einer Parabel zu ermitteln, benötigt man drei Punkte. Diese Punkte werden folgendermaßen gewählt:



$P_1(a|f(a))$, $P_2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)\middle|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, $P_3(b|f(b))$

$g(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Durch Einsetzen der Koordinaten werden die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 ermittelt. Für die Fläche A_K unter der Näherungsparabel gilt:

$$A_K = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0)\,dx = $$
$$= \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Kepler'sche Fassregel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

Für Polynomfunktionen, deren Grad höchstens drei ist, gibt die Kepler'sche Fassregel den genauen Wert des Integrals an. Der Beweis erfolgt in Aufgabe 7.40.

7.26 Berechne das Integral ***1)*** analytisch und ***2)*** näherungsweise mithilfe der Kepler'schen Fassregel. ***a)*** $\int_{-1}^{1}(x^3+4)\,dx$ ***b)*** $\int_{0}^{1}x\cdot e^{x^2}\,dx$

B

Lösung:

a) 1) $\int_{-1}^{1}(x^3+4)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)+4x\Big|_{-1}^{1} = 8$

2) $f(-1)=(-1)^3+4=3;\quad f\left(\frac{-1+1}{2}\right)=f(0)=4;\quad f(1)=5$

$\int_{-1}^{1}(x^3+4)\,dx = \frac{1-(-1)}{6}\cdot(3+4\cdot4+5)=8$

- Da es sich um eine Polynomfunktion 3. Grads handelt, sind die Werte ident.

b) 1) $\int_{0}^{1}x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\cdot(e-1)=0{,}859...$

2) $f(0)=0;\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}642...;\quad f(1)=e$

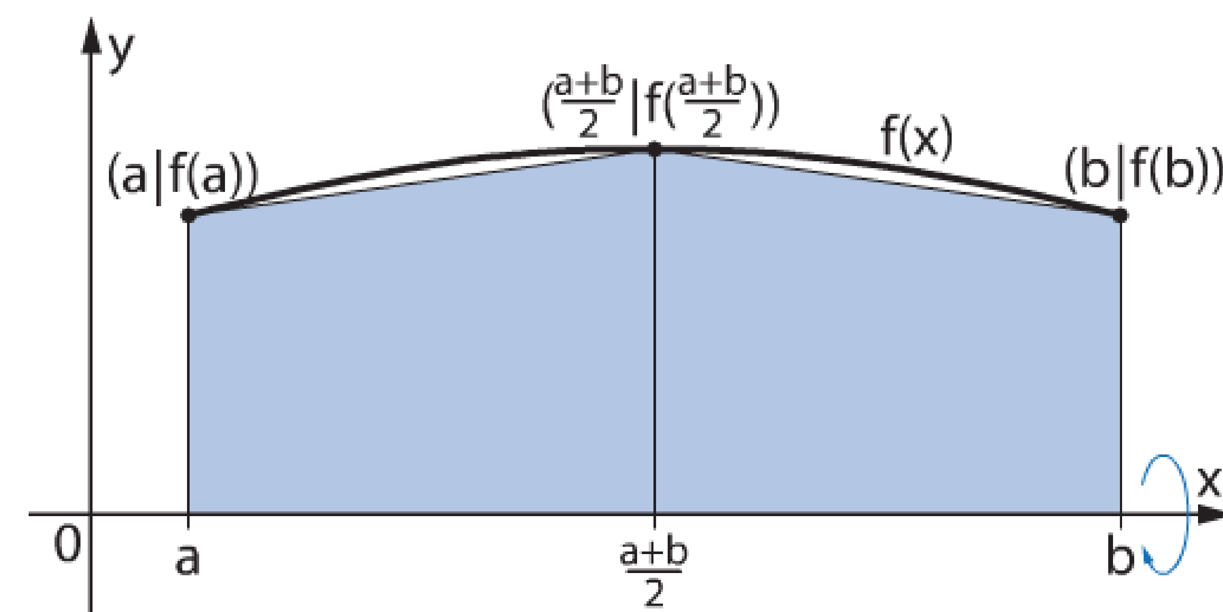
$\int_{0}^{1}x\cdot e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\cdot(0+4\cdot0{,}642...+e)=0{,}881...$

- Der Integrand hat die Form $u'(x)\cdot f(u(x))$. Das Integral kann daher mittels Substitution gelöst werden.

Volumenberechnung mithilfe der Kepler'schen Fassregel

Um das Volumen eines Drehkörpers näherungsweise zu ermitteln, teilt man das Intervall [a; b] in zwei gleich lange Teilabschnitte $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ und $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$.

Wenn man die zugehörigen Punkte des Funktionsgraphen an den Intervallgrenzen verbindet, erhält man zwei Trapeze.



Lässt man diese Trapeze nun um die x-Achse rotieren, so erhält man zwei Kegelstümpfe mit den Radien $r_1 = f(a)$ und $r_2 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ bzw. $r_2 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ und $r_3 = f(b)$ und jeweils der Höhe $h = \frac{b-a}{2}$.

Für das Volumen eines Kegelstumpfs gilt: $V = \frac{\pi}{3}\cdot h\cdot(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2)$ (vgl. Band 1)

Damit ergibt sich für das Gesamtvolumen:

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{b-a}{2}\cdot\left((f(a))^2 + f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2\right) + \frac{\pi}{3}\cdot\frac{b-a}{2}\cdot\left(\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b) + (f(b))^2\right) =$$

$$= \frac{\pi\cdot(b-a)}{6}\cdot\left((f(a))^2 + f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2\cdot\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b) + (f(b))^2\right)$$

Kepler erkannte, dass die Näherung bessere Ergebnisse liefert, wenn man die Ausdrücke $f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ und $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)$ jeweils durch $\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2$ ersetzt:

$$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \approx \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b) \approx \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2$$

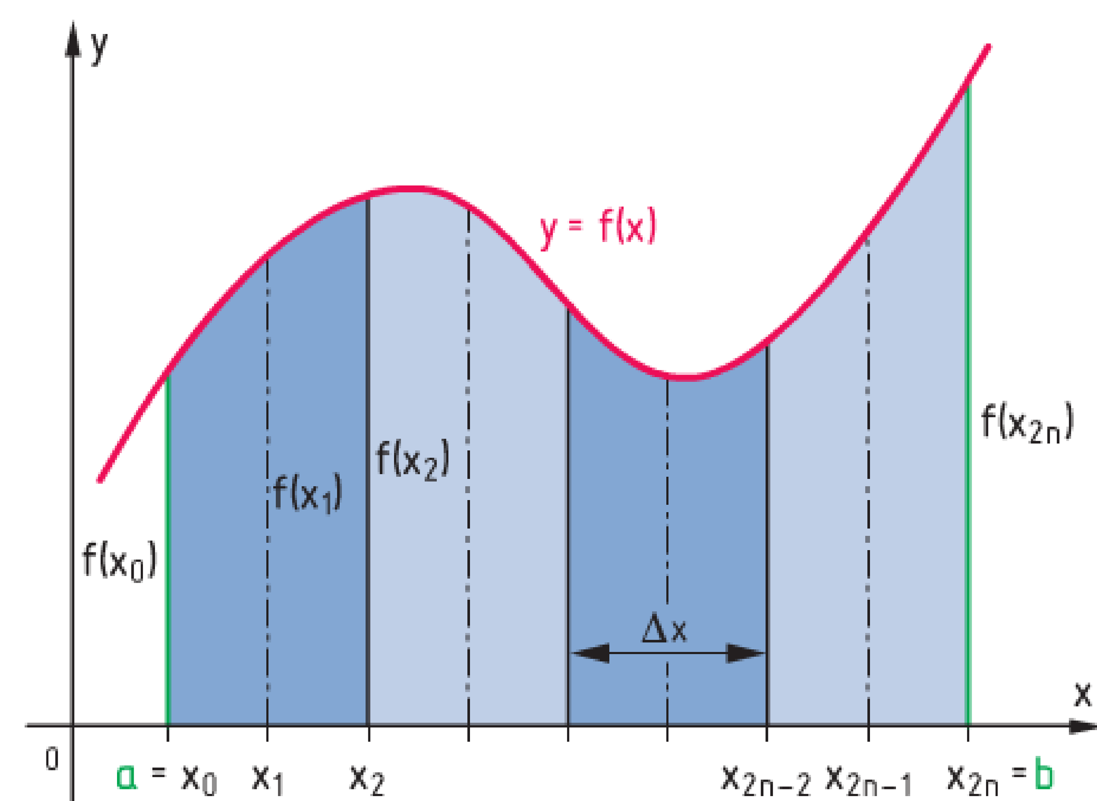
Somit ergibt sich für das angenäherte Volumen eines Drehkörpers:

$$V \approx \frac{\pi\cdot(b-a)}{6}\cdot\left((f(a))^2 + 4\cdot\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + (f(b))^2\right)$$

Näherungsverfahren

Simpson-Regel

Diese nach dem englischen Mathematiker Thomas Simpson (1710 - 1760) benannte Regel kann als eine Verallgemeinerung der Kepler'schen Fassregel angesehen werden. Dabei wird der Integrationsbereich in mehrere Doppelstreifen zerlegt. Auf diese Doppelstreifen wird dann jeweils die Kepler'sche Fassregel angewendet.



- Das Intervall [a; b] wird in n gleich breite Doppelstreifen zerlegt. Jeder davon hat die Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- Anwenden der Kepler'schen Fassregel auf $[x_0; x_2]$, also auf den ersten Doppelstreifen:
  $A_1 \approx \frac{x_2 - x_0}{6} \cdot \left(f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)\right)$
  bzw. da $x_2 - x_0 = \Delta x = \frac{b-a}{n}$:
  $A_1 \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \left(f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)\right)$

Für den gesamten Flächeninhalt ergibt sich:

$$A \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \left(f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)\right) + \frac{b-a}{6n} \cdot \left(f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4)\right) + \dots$$
$$\dots + \frac{b-a}{6n} \cdot \left(f(x_{2n-4}) + 4 \cdot f(x_{2n-3}) + f(x_{2n-2})\right) + \frac{b-a}{6n} \cdot \left(f(x_{2n-2}) + 4 \cdot f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right)$$

Werden gleiche Terme zusammengefasst, erhält man:

$$A \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \left[\left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4 \cdot \left(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})\right) + 2 \cdot \left(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})\right)\right)\right]$$

Simpson-Regel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \left(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})\right) + 2 \cdot \left(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})\right)\right]$$

- Der Integrationsbereich wird in n Doppelstreifen geteilt, es gibt daher (2n + 1) Teilungs- bzw. Stützstellen. Der Abstand zweier aufeinander folgender Stützstellen ist jeweils $\frac{b-a}{2n}$.
- Für die Formel werden nur die Funktionswerte, nicht aber der Funktionsterm benötigt. Daher genügt für die Berechnung die Angabe von Wertepaaren. Die Anzahl der Wertepaare muss ungerade sein und die x-Werte müssen jeweils gleiche Abstände voneinander haben.

ABC **7.27** Bei einer Versuchsanordnung wurden die Momentangeschwindigkeiten zu verschiedenen Zeitpunkten gemessen. Welcher Gesamtweg wurde in dieser Zeit zurückgelegt? Berechne dies mithilfe der Simpson-Regel und beschreibe deine Vorgehensweise.

$\frac{t}{s}$	4	8	12	16	20
$\frac{v}{\frac{m}{s}}$	6	12	15	16	18

Lösung:

Es gilt: $s = \int_4^{20} v(t)\,dt$

Durch die fünf Wertepaare werden vier Intervalle festgelegt, somit gibt es n = 2 Doppelstreifen.

Nun wendet man mit $x_0 = 4$, $x_1 = 8$, $x_2 = 12$, $x_3 = 16$ und $x_4 = 20$ die Simpson-Regel an:

$$s \approx \frac{20-4}{6 \cdot 2} \cdot [v(4) + v(20) + 4 \cdot (v(8) + v(16)) + 2 \cdot v(12)] =$$
$$= \frac{4}{3} \cdot [6 + 18 + 4 \cdot (12 + 16) + 2 \cdot 15] \approx 221{,}33\text{ m}$$

BC

7.28 Berechne das Integral $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{x^2} dx$ mithilfe der Simpson-Regel für n = 4. Beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:

Abstand der Stützstellen: $\frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$

Ermitteln der Funktionswerte an den Grenzen und bilden der Summe $s_1 = f(a) + f(b)$:

$a = x_0 = 0,\ f(x_0) = 0$

$b = x_8 = 1,\ f(x_8) = 2{,}718...$

$s_1 = f(x_0) + f(x_8) = 2{,}718...$

x_k, k ungerade	$f(x_k)$	x_k, k gerade	$f(x_k)$
$x_1 = 0{,}125$	0,359...	$x_2 = 0{,}25$	0,532...
$x_3 = 0{,}375$	0,704...	$x_4 = 0{,}5$	0,907...
$x_5 = 0{,}625$	1,168...	$x_6 = 0{,}75$	1,519...
$x_7 = 0{,}875$	2,011...		
Summe s_2:	4,243...	**Summe s_3:**	2,960...

Die Funktionswerte für die geraden bzw. die ungeraden Indizes werden jeweils in eine eigene Spalte geschrieben, da deren Summen s_2 bzw. s_3 in der Formel mit 4 bzw. 2 multipliziert werden.

Nun kann das Integral mithilfe der Simpson-Regel ermittelt werden:

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{x^2} dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot (s_1 + 4 \cdot s_2 + 2 \cdot s_3) =$$

$$= \frac{1}{6 \cdot 4} \cdot (2{,}718... + 4 \cdot 4{,}243... + 2 \cdot 2{,}960...) = 1{,}067...$$

Technologieeinsatz: Simpson-Regel
MathCad



ZB: Es soll $\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ näherungsweise mithilfe der Simpson-Regel für n = 4 Doppelstreifen ermittelt werden. Dazu definiert man in einem MathCad-Arbeitsblatt die Funktionsgleichung **$f(x) := \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$**, die Integrationsgrenzen **a:=1** und **b:=2** sowie die Anzahl der Doppelstreifen **n:=4**.

Den Abstand der Stützstellen d berechnet man mit **$d := \frac{b-a}{2n}$**.

Für die ungerade nummerierten Stützstellen muss zur unteren Integrationsgrenze jeweils ein ungeradzahliges Vielfaches des Abstands der Stützstellen addiert werden: **a+(2*k+1)*d**

Funktionsgleichung: $f(x) := \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
Untere Integrationsgrenze: $a := 1$
Obere Intregationsgrenze: $b := 2$
Anzahl der Doppelstreifen: $n := 4$
Abstand der Stützstellen: $d := \frac{b-a}{2 \cdot n}$

Taschenrechner: sin cos tan ln log n! i |x| Γ ⁿΓ eˣ ½ ( ) x² xʸ π 7 8 9 / ↕ 4 5 6 × ÷ 1 2 3 + := . 0 − =

Differential/Integral

Simpson-Regel: $s := \frac{b-a}{6 \cdot n}\left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f[a + (2 \cdot k + 1) \cdot d] + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(a + 2k \cdot d)\right]$

Numerische Auswertung: $s = 2.7899392$

Berechnung mittels Integration: $I := \int_a^b f(x)\, dx$ $I = 2.7899371$

Bei den gerade nummerierten Stützstellen addiert man gerade Vielfache von d: **a+2*k*d**
Mithilfe des Summenzeichens aus dem Befehlsfenster **Differential/Integral** gibt man die Simpson-Regel ein.
Die numerische Auswertung liefert s = 2,789...

Man kann die Anzahl der Stützstellen im Nachhinein erhöhen, um eine bessere Näherung zu erhalten. In diesem Beispiel kann man das Integral der Funktion auch analytisch berechnen.

Näherungsverfahren

B **7.29** Berechne das Integral **1)** analytisch und **2)** näherungsweise mithilfe der Kepler'schen Fassregel. Gib den relativen Fehler an.

a) $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ **b)** $\int_0^{3} 6e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx$ **c)** $\int_1^{3} \frac{1}{x}\,dx$ **d)** $\int_1^{4} (3x^2 - 2)\,dx$

BC **7.30** Berechne das Integral näherungsweise mit der Simpson-Regel für **1)** n = 4, **2)** n = 6 und vergleiche die Ergebnisse.

a) $\int_0^{2} e^{x^2}\,dx$ **b)** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ **c)** $\int_2^{4} \frac{1}{\ln(x)}\,dx$ **d)** $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2(t)}\,dt$

ABC **7.31** Ein 100 cm hohes Fass wurde vermessen. Der Durchmesser am Boden beträgt 54 cm, jener in der Mitte 75 cm, und der obere Durchmesser beträgt 52 cm.
1) Berechne das Volumen des Fasses und gib das Fassungsvermögen in Liter an.
2) Wie groß müsste der Durchmesser in der Mitte des Fasses sein, damit es um die Hälfte mehr Flüssigkeit fassen kann, wenn die übrigen Abmessungen gleich bleiben?

B **7.32** Ermittle das bestimmte Integral der durch die Wertetabelle gegebenen Funktion f(x) näherungsweise mithilfe der Simpson-Regel.

x	2	4	6	8	10	12	14
f(x)	12,4	25,7	30,2	33,1	34,5	35,1	35,4

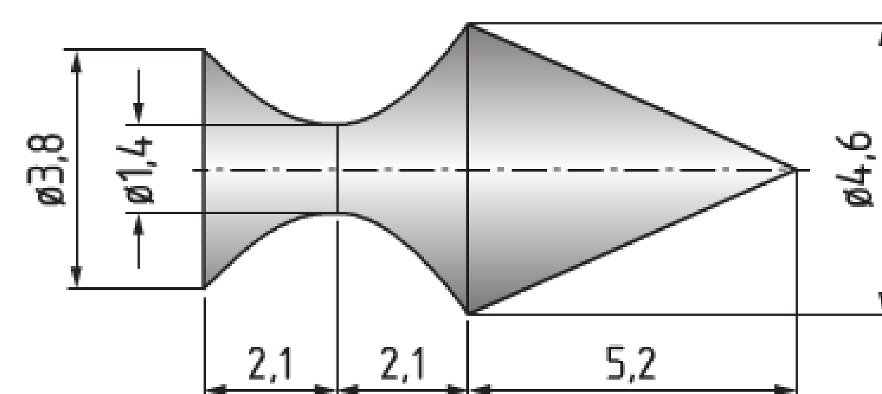
AB **7.33** Bei Leichtathletik-Meisterschaften wurden bei einem Lauf in Sekundenabständen die Geschwindigkeit des Siegers gemessen:

t in s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v in $\frac{m}{s}$	0,00	2,13	5,32	9,26	10,87	11,24	11,90	11,76	11,90	12,05	11,24	11,63	11,89

1) Stelle den Geschwindigkeit-Zeit-Verlauf grafisch dar.
2) Ermittle den zurückgelegten Weg näherungsweise mithilfe der Simpson-Regel.

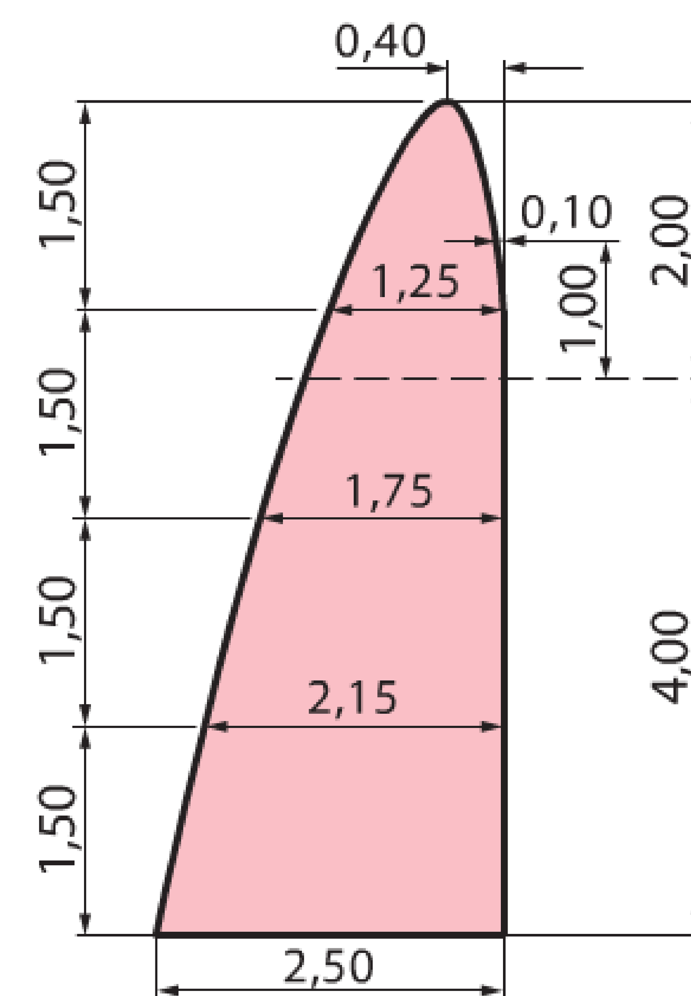
AB **7.34** Um eine Feder zu spannen, benötigt man eine Kraft F. Die erforderliche Arbeit ergibt sich durch „Kraft mal Weg". Ist die Kraft F(s) variabel, so entspricht der Betrag der verrichteten Arbeit in einem Kraft-Weg-Diagramm dem Flächeninhalt unter der Kurve F(s), also $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$. Von einer Versuchsanordnung sind folgende Messwerte bekannt.
F(0) = 0, F(5 cm) = 4 N, F(10 cm) = 9 N, F(15 cm) = 16 N, F(20 cm) = 25 N
Berechne den Betrag der verrichteten Arbeit (in Joule) näherungsweise.

AB **7.35** Bei archäologischen Ausgrabungen wurden Speerspitzen mit nebenstehendem Profil und kreisrundem Querschnitt gefunden (Angaben in cm).



1) Die Eintrittskarten für eine Ausstellung sollen die maßstabsgetreue Form des Profils dieser Speere haben. Dafür wird Papier mit den Abmessungen 10 cm x 5 cm gewählt. Berechne, wie viel m^2 Verschnitt entstehen, wenn 5 000 Eintrittskarten hergestellt werden.
2) Die Wissenschafter wollen diese Spitzen aus Messing nachgießen, um deren Flugverhalten möglichst realitätsgetreu untersuchen zu können. Das dabei verwendete Messing hat eine Dichte von 8,52 $\frac{g}{cm^3}$. Berechne die Masse einer solchen Speerspitze.

7.36 Das Segel einer Yacht hat die in der Abbildung dargestellte Form (Maße in Meter).



ABC

1) Berechne den Flächeninhalt des Segels mithilfe der Simpson-Regel.
2) Das Segeltuch besteht aus Carbongewebe mit einer Masse von 316,5 $\frac{g}{m^2}$. Berechne die Gesamtmasse des Segeltuchs.
3) Das Denier (den) ist eine Einheit der Materialfeinheit.
Es gilt: 1 den = $\frac{1\,g}{9\,000\,m}$
Das Segeltuch hat eine Feinheit von 1,5 den. Berechne, wie viel Meter Carbonfaser für die Herstellung des Segeltuchs verwendet wurden.
Bemerkung: Häufig wird auch die Einheit tex für die Materialfeinheit verwendet, es gilt: 1 tex = 9 den

7.37 Ein Glaskolben hat eine Höhe von 20 cm. In Abständen von jeweils 4 cm misst man folgende Durchmesser d:

ABD

h in cm	0,0	4,0	8,0	12,0	16,0	20,0
d in cm	7,2	9,4	8,2	5,4	4,0	4,0



1) Erkläre, warum es möglich ist, mithilfe der gegebenen Messwerte die Simpson-Regel zur Berechnung der Längsschnittfläche zu verwenden. Vergleiche die Werte mit der Form des Glaskolbens in der Abbildung und gib an, welche Vereinfachungen man zur Ermittlung der Fläche treffen muss. Berechne anschließend die Größe der Längsschnittfläche.
2) Ermittle einen Näherungswert für das Fassungsvermögen des Glaskolbens.

7.38 **1)** Ermittle das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = e^{-x}$ im Intervall [0; 1] näherungsweise mithilfe der Simpson-Regel für n = 10.
2) Ermittle durch Probieren den kleinsten Wert, den n haben muss, um bei Verwendung der Trapezregel mindestens die gleiche Genauigkeit zu erreichen.

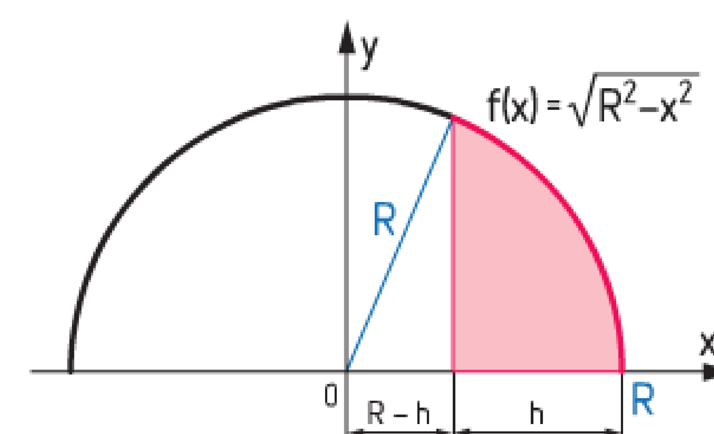
ABC TE

7.39 Zeige mithilfe der Kepler'schen Fassregel, dass für das Volumen einer Kugelkappe gilt:

BD

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3R - h)$$

h … Kappenhöhe, R … Kugelradius



7.40 Zeige, dass die Kepler'sche Fassregel für Polynomfunktionen 3. Grads den genauen Wert für das bestimmte Integral liefert.

BD

Hinweis: Berechne $\int_a^b f(x)\,dx$ mit $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ direkt und anschließend mit der Kepler'schen Fassregel. Vergleiche die Koeffizienten a_i.

Näherungsverfahren

Zusammenfassung

Iterative Nullstellenbestimmung
Intervallhalbierung:
Liegt in einem Intervall [a; b] eine Nullstelle, kann man sie durch wiederholtes Halbieren des Intervalls näherungsweise bestimmen.

Näherung durch Nullstellen von Sekanten:

Regula falsi: $x_1 = b - f(b) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$; f(a) und f(b) haben unterschiedliche Vorzeichen

Näherung durch Nullstellen von Tangenten:
Newton'sches Näherungsverfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Numerische Integration
Ein unbestimmtes Integral wird durch eine endliche Summe genähert, zum Beispiel mittels Rechteckregel, Trapezregel, Kepler'sche Fassregel oder Simpson-Regel.

Weitere Aufgaben

AB **7.41** Fertige eine Skizze der Funktion an und berechne die Nullstellen der Funktion mithilfe einer Methode deiner Wahl näherungsweise auf drei gesicherte Dezimalstellen.

a) $h(t) = -4{,}905t^2 + 35t + 15$
b) $f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}5x + 1$
c) $y(t) = 2t^4 + 3t - 6$
d) $f(x) = 3x^2 - 4x - 8$
e) $y(t) = t^4 - 8t^3 + 25t^2 - 36t + 15$
f) $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 2x + 1$

B **7.42** Ermittle die Lösung der angegebenen Gleichung mithilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens im angegebenen Intervall auf drei gesicherte Dezimalstellen.



a) $\frac{x^2}{e^x} + x^2 = 2$, [0; 3]
b) $3b^4 + 4b^3 - 6b^2 - 2b - 12 = 0$, [−3; −2]
c) $x^2 + 3 = e^x$, [1; 3]
d) $g - 1 = \sqrt{x}$, [1; 4]
e) $e^t - 4 = \ln(t)$, [1; 2]
f) $x^2 - \sin(x) = 0$, [0,5; 1,5]

ABC **7.43** Zeichne die Graphen der Funktionen $f(x) = \tan(x)$ und $g(x) = e^x$ in ein Koordinatensystem.
1) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $\tan(x) = e^x$?
2) Bei welchen Startwerten würde das Newton'sche Näherungsverfahren zur Lösung der Gleichung aus **1)** versagen?
3) Wähle einen Startwert x_0 zur Ermittlung der Lösung der Gleichung in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ und berechne das Ergebnis auf drei gesicherte Dezimalstellen.

AB **7.44** Ein Marmorblock für einen Zimmerbrunnen wird quaderförmig behauen. Das Volumen des fertigen Marmorblocks beträgt 6 409 cm³. Die Länge ist um 16 cm länger als die Höhe und die Breite um 4 cm länger als die Höhe. Wie lang ist jede Kante? Verwende das Newton'sche Näherungsverfahren beim Lösen der benötigten Gleichung.

B **7.45** Ermittle die bestimmten Integrale näherungsweise mithilfe der angegebenen Methode.

a) $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$, Kepler'sche Fassregel
b) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx$, Simpson-Regel, n = 4
c) $\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$, Trapezregel, n = 8
d) $\int_0^{2} x \cdot \sqrt{x + 1}\,dx$, Rechteckregel, n = 4

Aufgaben in englischer Sprache

approximation	Näherung	Newton's method	Newton'sches Näherungsverfahren
bisection method	Methode der Intervallhalbierung	Rectangular rule	Rechteckregel
decimal places	Dezimalstellen	Simpson's rule	Simpson-Regel
Kepler'sche Fassregel	Kepler'sche Fassregel	Trapezoid rule	Trapezregel

7.46 Use ***1)*** the bisection method, ***2)*** regula falsi, ***3)*** Newton's method to find the solution of the equation in the given interval acurate to three decimal places. B

a) $4 \cdot \sqrt[3]{x} - 2x^2 = -4$, $[0; 3]$
b) $e^{2x} + 3x = 9$, $[0; 2]$
c) $\ln(x) + x = 2$, $[1; 4]$
d) $2x + \sin(x) = 1$, $[0; \pi]$

7.47 The volume of a square-based cuboid amounts to 72 ft, the overall length of all edgings amounts to 56 ft. Calculate the lengths of the edgings. AB

7.48 ***1)*** Find formulas for the area of an ellipse ell: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ using Simpson's rule for $n = 4$ and $n = 10$. ABCD TE

2) Calculate the area of an ellipse for $a = 5$ cm and $b = 2$ cm using both formulas.
3) Calculate the area of that ellipse using the elementary integration method and compare this with the results of ***2)***. Calculate the absolute and the relative error.
4) Comment on the precision of Simpson's rule regarding these results in your own words.

7.49 Calculate the definite integral by approximation using the given method. B TE

a) $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx$, Trapezoid rule, $n = 8$
b) $\int_{-5}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, Rectangular rule, $n = 10$
c) $\int_0^3 (2x^2 + 4x + 5)\,dx$, Simpson's rule, $n = 6$
d) $\int_1^3 0{,}3 \cdot x^3\,dx$, Kepler'sche Fassregel

Wissens-Check

		gelöst
1	Gib an, welche der Stellen x_1, x_2 oder x_3 als Startwert zur Ermittlung der Nullstelle x_N der dargestellten Funktion mithilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens geeignet ist. Erkläre, warum es die anderen nicht sein können.	
2	Ich kann die Vorgehensweise bei der Lösung von Gleichungen mithilfe der Intervallhalbierung und der Regula falsi beschreiben.	
3	Ich kann die Unterschiede zwischen der Rechteckregel, der Trapezregel, der Kepler'schen Fassregel und der Simpson-Regel erklären.	

Lösung:
1) Die Stelle x_3 ist als Startwert geeignet, x_1 ist bereits eine Nullstelle, x_2 ist eine Extremstelle. 2) siehe Seiten 270 ff.
3) siehe Seiten 278ff

8 Matrizen

In Band 2, Abschnitt 9, wurden Matrizen verwendet, um zum Beispiel Produktionsabläufe anzugeben oder Gleichungssysteme zu lösen. Nun wird die Anwendung bei der Lösung von Gleichungssystemen vertieft. Außerdem werden weitere Anwendungen von Matrizen für die Beschreibung der Entwicklung von Populationen und von Bewegungen in der Ebene und im Raum gezeigt.



8.1 Wiederholung

ABC **8.1** Ein Autohändler verkauft drei Automodelle jeweils mit Benzin- oder Dieselantrieb. In der Tabelle sind die Verkaufszahlen von Februar eingetragen. Verwende im Folgenden zur Berechnung Matrizen und gib jeweils an, welche Rechenoperationen durchgeführt wurden.

Feb.	XY	Visio	CNX
Diesel	5	8	4
Benzin	8	13	7

1) Schreibe die Tabelle als Matrix an.
2) Im März werden von jedem Modell doppelt so viele Autos verkauft wie im Februar. Gib die Verkaufszahlenmatrix für März an.
3) Stelle in einer Matrix dar, wie viele Autos von jedem Modell im Februar und März insgesamt verkauft wurden.

Eine **Matrix** A vom Typ (m x n) bzw. (m,n) ist ein **rechteckiges Zahlenschema** m Zeilen und n Spalten. Die Positionen der **Elemente** $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{ij}$ einer Matrix werden mithilfe der Indizes i und j mit i = 1, ..., m, j = 1, ..., n festgelegt.

Addition bzw. **Subtraktion** zweier Matrizen vom gleichen Typ: $C = A \pm B$ mit $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

Multiplikation mit einem Skalar: $C = k \cdot A$ mit $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$

Multiplikation zweier Matrizen: A ... (m x n)-Matrix, B ... (n x r)-Matrix
Das Element c_{ij} ist das skalare Produkt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B:
$C = A \cdot B$ ... (m x r)-Matrix mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} \cdot b_{kj})$ mit i = 1, ..., m, j = 1, ..., r

BD **8.2** Führe mit den Matrizen die gegebenen Rechenoperationen durch bzw. begründe, warum dies nicht möglich ist.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ***1)*** A + B ***2)*** 2 · A ***3)*** C · B ***4)*** A · B

Lösung:

1) $A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & -1+6 \\ 3-3 & 7+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ ***2)*** $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$

3) Diese Multiplikation ist nicht möglich, da die Spaltenanzahl von C nicht mit der Zeilenanzahl von B übereinstimmt.

4) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-3) & 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 + 7 \cdot (-3) & 3 \cdot 6 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}$

BD **8.3** Führe mit den Matrizen die angegebene Rechenoperation durch bzw. begründe, warum dies nicht möglich ist.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 11 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = (4 \quad 9), \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) 3 · A ***b)*** A + C ***c)*** B – D ***d)*** A · C ***e)*** B · A ***f)*** B · C

8.4 Für zwei elektronische Bausätze B1 und B2 werden drei Bauelemente E1, E2 und E3 vorgefertigt. Diese Bauelemente bestehen aus Widerständen (R), Kondensatoren (C), Spulen (L) und Spannungsquellen (S). Die folgenden Tabellen geben die Anzahl der verwendeten Bauteile bzw. Bauelemente an. ABCD

Tab. 1	E1	E2	E3
R	2	4	2
C	1	3	y
L	x	1	1
S	1	1	1

Tab. 2	B1	B2
E1	2	4
E2	4	7
E3	3	5

Tab. 3	B1	B2
R	26	46
C	20	?
L	?	12
S	9	16

1) Beschreibe die Bedeutung der Einträge in Tabelle 3 und gib an, wie diese mit den Werten aus Tabelle 1 und Tabelle 2 zusammenhängen.
2) Überprüfe die in Tabelle 3 eingetragenen Werte auf Richtigkeit. Berechne die fehlenden Einträge, ermittle auch die Werte für x und y aus Tabelle 1.
3) Ein Widerstand kostet 0,70 €, ein Kondensator 0,30 €, eine Spule 0,50 € und eine Spannungsquelle 5,20 €. Berechne die Gesamtkosten jedes Bausatzes.
4) Für einen weiteren Auftrag werden doppelt so viele Bauelemente pro Bausatz benötigt. Gib an, welche Tabellen wie geändert werden müssen.

8.2 Inverse Matrizen und lineare Gleichungssysteme

In Band 2 wurde gezeigt, wie man Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen anschreiben und lösen kann. Ein lineares Gleichungssystem mit zum Beispiel zwei Unbekannten kann als Matrizenmultiplikation angeschrieben werden.

I: $a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$
II: $a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

- Allgemein: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$
  A … Koeffizientenmatrix
  $\vec{b}$ … Vektor der Konstanten

Mithilfe der inversen Matrix zur Koeffizientenmatrix A kann $\vec{x}$ berechnet werden: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$
Für die **inverse Matrix** A^{-1} zu einer quadratischen Matrix A gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad \text{mit } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ … Einheitsmatrix}$$

Die inverse Matrix einer (2 x 2)-Matrix kann mithilfe der in Band 2 hergeleiteten Formel berechnet werden: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$, $\det(A) \neq 0$

8.5 Schreibe das Gleichungssystem mithilfe von Matrizen an und löse es anschließend. B

I: $2x - \quad y = 0,5$
II: $-x + 3y = 0,2$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1,7 \\ 0,9 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0,34; y = 0,18$$

Matrizen

Soll ein Gleichungssystem in Matrizenschreibweise gelöst werden, muss das Gleichungssystem nach den Variablen geordnet angeschrieben werden.

ZB: I: $3b + c = 0$ / II: $a + 2b = 3$ / III: $2a - c = 8$ $\Rightarrow$ I: $3b + c = 0$ / II: $a + 2b = 3$ / III: $2a - c = 8$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Bei quadratischen Matrizen höherer Ordnung wird die inverse Matrix meist mithilfe von Technologieeinsatz berechnet.

B 

8.6 Löse das Gleichungssystem mithilfe der Matrizenrechnung.

I: $x_1 + 2x_3 = 2$
II: $3x_2 - x_4 = 0$
III: $x_2 + x_3 + x_4 = 4$
IV: $2x_2 - 2x_3 = 4$

Lösung mit Mathcad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen der Koeffizientenmatrix und des Vektors der Konstanten.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.4 & -0.4 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & -0.4 \\ 0 & -0.4 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- Definieren der Koeffizientenmatrix und Berechnung der inversen Matrix.

$$x := A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 1.2 \\ -0.8 \\ 3.6 \end{pmatrix}$$

- Multiplikation $A^{-1} \cdot \vec{b}$ und speichern des Ergebnisses als Variable x.

$x_1 = 3{,}6$; $x_2 = 1{,}2$; $x_3 = -0{,}8$; $x_4 = 3{,}6$

Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar.
ZB: Will man die Inverse der Matrix

$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ -4 & 2 & -12 \end{pmatrix}$ berechnen, erhält man eine Fehlermeldung. Die Matrix enthält zwei Zeilen, die voneinander linear abhängig sind:
3. Zeile = (−2) · 2. Zeile



Die Determinante ist dann 0. Eine nicht invertierbare quadratische Matrix heißt **singuläre Matrix**. Das zugehörige Gleichungssystem ist dann nicht eindeutig lösbar. Ob es keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat, kann nur mithilfe der Konstantenspalte entschieden werden.

Für die **inverse Matrix** A^{-1} einer quadratischen Matrix mit $\det(A) \neq 0$ gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
Eine nicht invertierbare quadratische Matrix heißt **singuläre Matrix**.
Ein **lineares Gleichungssystem** kann mithilfe von Matrizen dargestellt werden: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$
Die Berechnung der Lösungen kann mit der zur Koeffizientenmatrix inversen Matrix erfolgen:
$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Ein Vorteil beim Rechnen mit Matrizen ist neben der übersichtlichen Darstellung auch die rasche Neuberechnung, wenn sich nur die Konstanten ändern. Da die Berechnung der inversen Matrix nur von der Koeffizientenmatrix abhängig ist, muss diese bei Änderung des Vektors $\vec{b}$ nicht erneut berechnet werden.



ZB: 1) I: $a + 2c = 2$ 2) I: $a + 2c = 3$
II: $3b - c = 0$ II: $3b - c = 1$
III: $a + b + c = 4$ III: $a + b + c = 3$

1.1 *Nicht gespeicherte

$a := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$ai := a^{-1}$ $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$

2/99

1.1

$b1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$b2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

1.1 *Nicht gespeicherte

$x1 := ai \cdot b1$ $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$x2 := ai \cdot b2$ $\begin{bmatrix} 2. \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

6/99

8.7 Stelle das Gleichungssystem mithilfe von Matrizen dar. **AC**

a) I: $b - 3c = 1$
II: $5a - c = 0$
III: $a + b + c = -8$

b) I: $-a + 2c = 0$
II: $4b + 2c - d = 0$
III: $c + d = 0$
IV: $2a - 2d = 0$

c) I: $y = 2$
II: $2u - 3w = 0$
III: $v + 2x - y = 5$
IV: $-w + 4x + y = 4$

8.8 Schreibe das Gleichungssystem ohne Verwendung von Matrizen an. **AC**

a) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

8.9 Welche Matrix ist die inverse zur gegebenen Matrix? Begründe deine Entscheidung. **BD**

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **A)** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **B)** $\begin{pmatrix} -2 & -0{,}5 & 2 \\ 2 & 0{,}5 & -1{,}5 \\ -1 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$ **C)** $\begin{pmatrix} -2 & -0{,}5 & 2 \\ 2 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$

8.10 Gib an, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Löse es falls möglich mithilfe der Matrizenrechnung. **BC**



a) I: $2x - 4y + 3z = -1$
II: $-x + 2y = -1$
III: $6x - 3z = 15$

b) I: $F_1 + 2F_3 - F_4 = 20$
II: $3F_2 + 2F_3 = 0$
III: $-2F_1 - 4F_3 + 2F_4 = 40$
IV: $F_1 - 3F_2 + 2F_4 = 10$

c) I: $-4a + 2b = 1$
II: $2a - 4b + 5c = -4$
III: $c + d = 2$
IV: $6a - 5d = -4$

8.11 Wodurch unterscheiden sich die Gleichungssysteme in **1), 2)** und **3)** jeweils? Löse mithilfe von Matrizen und überlege zuerst, welchen Vorteil du dir zunutze machen kannst, wenn du **1), 2)** und **3)** hintereinander löst. **BC**



a) 1) I: $b - 3c = 1$
II: $5a - c = 0$
III: $a + b + c = -8$

2) I: $b - 3c = 3$
II: $5a - c = 1$
III: $a + b + c = 4$

3) I: $b - 3c = 2$
II: $5a - c = -1$
III: $a + b + c = 3$

b) 1) I: $2a - c = 2$
II: $5b + c = 2$
III: $a + b = 3$

2) I: $2a - c = 0$
II: $5b + c = 0$
III: $a + b = 0$

3) I: $2a - c = 1$
II: $5b + c = 2$
III: $a + b = 3$

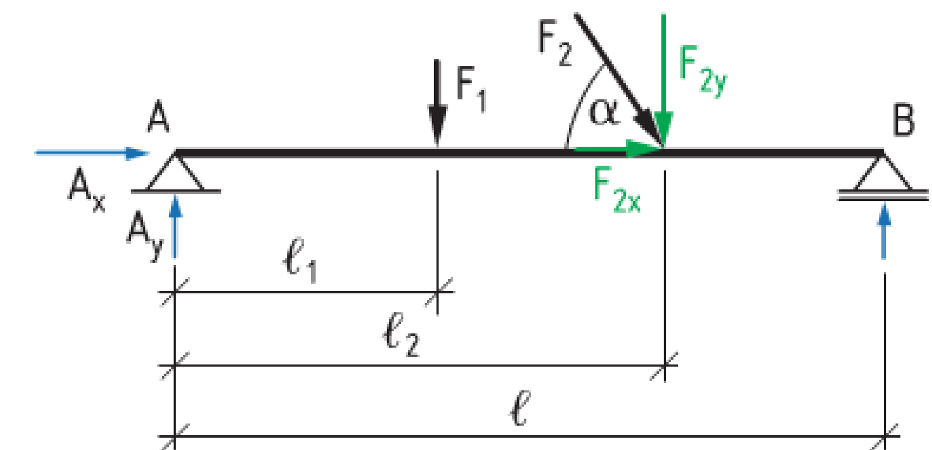
Matrizen

AB **8.12** Für drei verschiedene Holzbänke werden Schrauben (S), Holzdübel (D) und Holzlatten (L) verwendet. Die jeweils benötigten Anzahlen sind in der gegebenen Tabelle dargestellt. Die Gesamtkosten betragen 90,70 € für Bank 1, 113,18 € für Bank 2 und 181,20 € für Bank 3. Berechne mithilfe der Matrizenrechnung die Kosten für eine Schraube, für einen Dübel und für eine Holzlatte.

	S	D	L
B1	10	20	12
B2	16	10	15
B3	20	30	24

ABCD **8.13** Die Berechnung der Auflagerkräfte eines Trägers führt auf ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten.
Es gilt: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$ (vgl. Band 1, Seite 250)
Für den gegebenen Träger ergibt sich:

I: $F_{2x} + A_x = 0$
II: $F_1 + F_{2y} - A_y - B = 0$
III: $F_1 \cdot \ell_1 + F_{2y} \cdot \ell_2 - B \cdot \ell = 0$



1) Schreibe das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise an, wenn A_x, A_y und B die Unbekannten sind.
2) Berechne die inverse Matrix und löse das Gleichungssystem für $F_1 = 200$ N, $F_2 = 300$ N, $\alpha = 45°$, $\ell_1 = 2$ m, $\ell_2 = 3$ m und $\ell = 4$ m.
3) Wie ändert sich das Gleichungssystem, wenn eine weitere Kraft F_3 hinzugefügt wird? Erkläre, wie man die Auflagerkräfte mit möglichst wenig Aufwand berechnen kann.

ABC **8.14** Eine Methode zum Invertieren von Matrizen ohne Technologieeinsatz ist der **Gauß-Jordan-Algorithmus**. Dabei wird die Einheitsmatrix neben der zu invertierenden Matrix A angeschrieben. Nun ist es das Ziel, durch geeignete Umformungen die Matrix A in die Einheitsmatrix überzuführen. Dabei sind das Vertauschen von Zeilen oder von Spalten und das Bilden von Linearkombinationen von Zeilen oder von Spalten erlaubt. Jeder Rechenschritt wird dabei auch bei der rechts angeschriebenen Matrix durchgeführt.

ZB: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

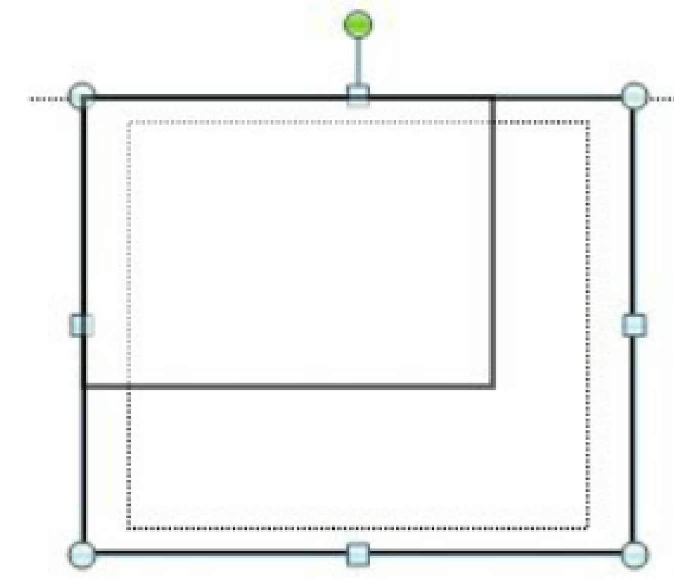
I:	3	5	1	1	0	0
II:	2	4	5	0	1	0
III:	1	2	2	0	0	1
I:	1	2	2	0	0	1
II:	2	4	5	0	1	0
III:	3	5	1	1	0	0
I:	1	2	2	0	0	1
II:	0	0	−1	0	−1	2
III:	0	1	5	−1	0	3
I:	1	2	2	0	0	1
II:	0	1	5	−1	0	3
III:	0	0	1	0	1	−2

- Die Matrix A und die Einheitsmatrix E werden nebeneinander angeschrieben.
- In der 3. Zeile steht an erster Stelle die Zahl 1. Man vertauscht daher die 3. Zeile mit der 1. Zeile.
- 2. Zeile: 2 · I – II
  3. Zeile: 3 · I – III
  Somit lautet die 1. Spalte 1 – 0 – 0
- Mulitplizieren der 2. Zeile mit (–1) und vertauschen der 2. Zeile mit der 3. Zeile

Führt man diesen Algorithmus so lange fort, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht, so steht dann rechts die zu A inverse Matrix A^{-1}.
1) Stelle die Berechnung fertig und führe die Probe durch.
2) Erfinde ein Beispiel für eine invertierbare (4 x 4)-Matrix. Verwende dabei ganze Zahlen mit $|x| < 10$. Tausche die Matrix mit deinem Nachbarn. Invertiere die Matrix, die du von deinem Sitznachbar erhalten hast, mithilfe des Gauss-Jordan-Algorithmus.

8.3 Weitere Anwendungen

8.3.1 Transformationsmatrizen



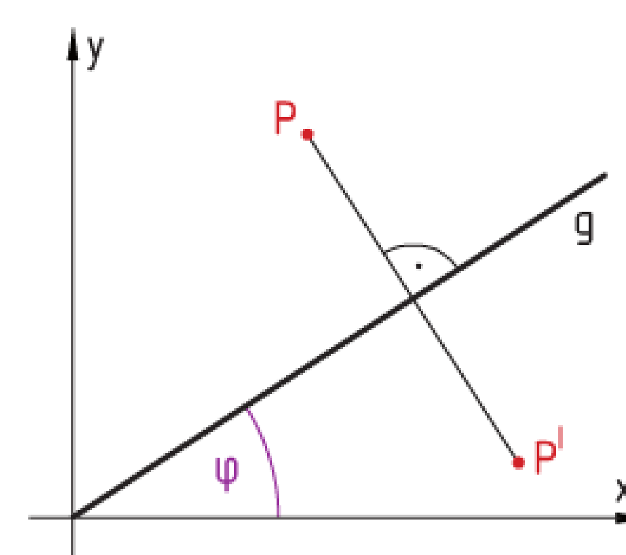
In der Geometrie können **Transformationen** (Abbildungen) wie Drehungen oder Schiebungen als Linearkombination der ursprünglichen Koordinaten $\vec{x} = (x, y)$ angegeben werden. Für die neuen Koordinaten gilt dann: $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$, A ... Transformationsmatrix
Dies wird zum Beispiel bei vektororientierten Grafikprogrammen verwendet oder auch beim Vergrößern und Verkleinern von Bildern.
Führt man zwei oder mehrere Transformationen hintereinander aus, so bedeutet dies rechnerisch, dass die einzelnen Transformationsmatrizen multipliziert werden müssen. Man kann daher mehrere Transformationen mithilfe einer Matrix darstellen.

8.15 Die Längen eines quadratischen Bilds mit der Seitenlänge 4 cm sollen verdoppelt werden. Nimm an, dass sich die linke untere Ecke des Quadrats im Koordinatenursprung befindet. ABC
1) Gib die Koordinaten der rechten oberen Ecke nach der Vergrößerung an.
2) Multipliziere die gegebenen Matrizen mit dem Ortsvektor der rechten oberen Ecke.
Beschreibe deine Ergebnisse mit eigenen Worten. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

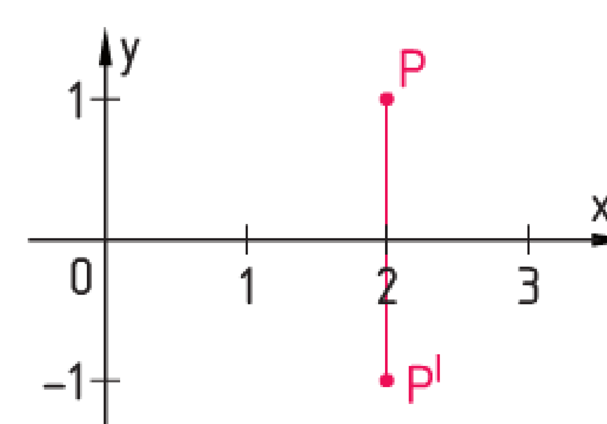
Bereits in Band 2 wurden **Drehmatrizen** angegeben.

- Drehung im $\mathbb{R}^2$:
  Der Punkt P(x|y) wird um den Winkel φ um den Koordinatenursprung gedreht.
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Drehung im Raum $\mathbb{R}^3$:
  Der Punkt P(x|y|z) wird um den Winkel φ um die z-Achse gedreht.
  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Weitere Transformationsmatrizen



- Mithilfe einer Matrix kann auch die Spiegelung an einer Geraden durch den Koordinatenursprung angegeben werden.
  In der Ebene ist die Spiegelung eines Punkts P an einer Geraden g, die durch den Koordinatenursprung verläuft, durch die **Spiegelungsmatrix** S definiert.
  $$S = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$
  Speziell ergibt sich für die Spiegelung an der x-Achse, also für φ = 0°: $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  Durch Multiplikation mit dieser Matrix erhält die y-Koordinate ein anderes Vorzeichen.
  Für die Spiegelung an der y-Achse, also für φ = 90°, gilt: $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  ZB: Der Punkt P(2|1) soll an der x-Achse gespiegelt werden.
  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; P′(2|−1)



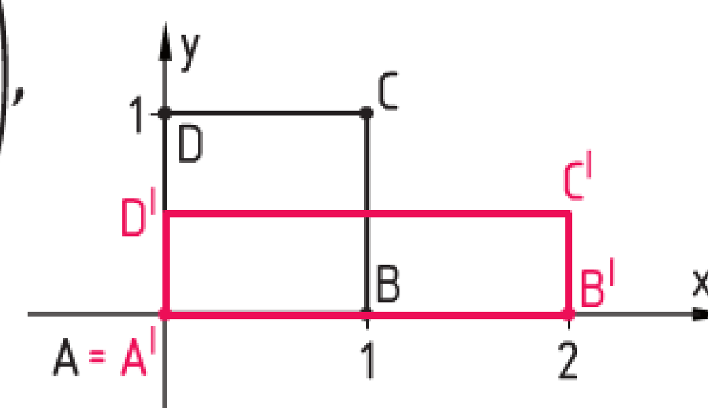
  Im Raum können die Spiegelungsmatrizen an den Koordinatenachsen analog angegeben werden.

- Eine **Streckung** kann ebenfalls durch eine Matrix beschrieben werden: $\begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$

  s_x bzw. s_y geben den Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor in x- bzw. y-Richtung an.
  ZB: Das Quadrat A(0|0), B(1|0), C(1|1), D(0|1) soll in x-Richtung um den Faktor 2 gestreckt und in y-Richtung um 0,5 gestaucht werden.

$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; $A = A'$; B': $\begin{pmatrix} x_B' \\ y_B' \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, C': $\begin{pmatrix} x_C' \\ y_C' \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$,

D': $\begin{pmatrix} x_D' \\ y_D' \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ A′(0|0), B′(2|0), C′(2|0,5), D′(0|0,5)



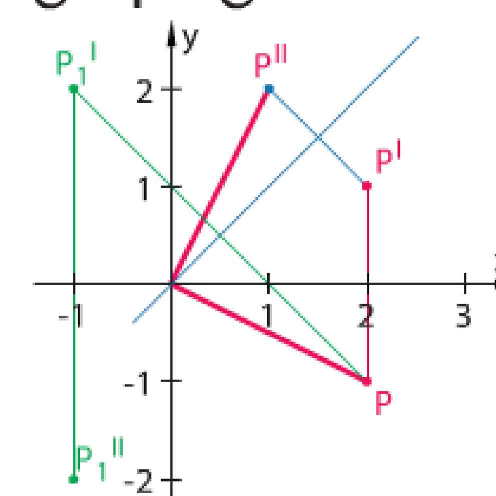
Hintereinanderausführen von Transformationen

Werden zwei oder mehr Transformationen hintereinander ausgeführt, so können auch zuerst die Transformationsmatrizen multipliziert werden. Dabei ist die Reihenfolge der Ausführung wichtig, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Da **von links** mit der Transformationsmatrix multipliziert wird, steht die „letzte" Transformation ganz links.

ZB: Der Punkt P(2|−1) soll zuerst an der x-Achse und dann an der 1. Mediane gespiegelt werden.

$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, P': $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ... Spiegelung an der x-Achse

$S_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, P'': $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = S_M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ... Spiegelung an der 1. Mediane



Die Berechnung kann auch mit dem Produkt der beiden Matrizen erfolgen:

$M = S_M \cdot S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP''} = M \cdot \overrightarrow{OP}$: $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vertauscht man die Reihenfolge, so erhält man jenen Punkt $\mathbf{P_1}''$, der entsteht, wenn man P zuerst an der 1. Mediane ($\mathbf{P_1}'$) und dann an der x-Achse spiegelt.

$M_1 = S_x \cdot S_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_1''} = M \cdot \overrightarrow{OP}$: $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Homogene Koordinaten, Schiebung

Bei einer **Schiebung** wird zum Ortsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eines Punkts der Schiebungsvektor $\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}$ addiert.

Um auch die Schiebung mit anderen Transformationen kombinieren zu können, muss sie mithilfe einer Matrizenmultiplikation dargestellt werden. Dazu verwendet man so genannte **homogene Koordinaten**. Dabei wird eine zusätzliche Koordinate mit dem Wert 1 eingefügt.

Statt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verwendet man also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. Der verschobene Punkt hat dann die Koordinaten $\begin{pmatrix} x + s_x \\ y + s_y \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Schiebungsmatrix lautet: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_x \\ 0 & 1 & s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Man erhält: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_x \\ 0 & 1 & s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + s_x \\ y + s_y \\ 1 \end{pmatrix}$

ZB: Der Punkt P(2|3) soll um den Vektor $\vec{s} = (-1; 2)$ verschoben werden.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ P′(1|5). Der eingefügte Einser wird weggelassen.

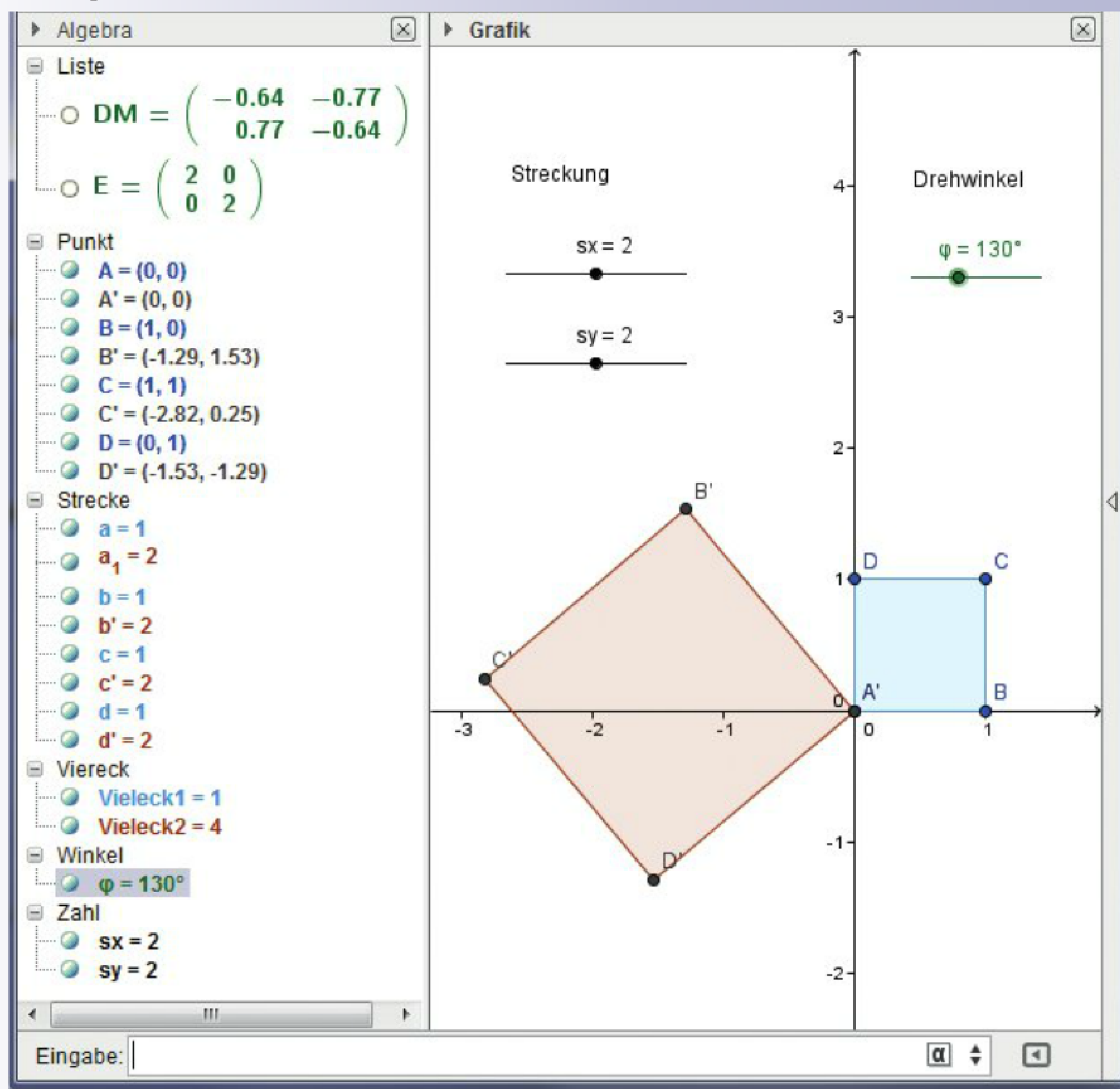
Wird mit homogenen Koordinaten gerechnet, so müssen die Transformationsmatrizen um die Zeile (0, 0, 1) und die Spalte (0; 0; 1) erweitert werden.

Möchte man eine Bewegung umkehren, so kann mit der zur Transformationsmatrix inversen Matrix multipliziert werden.
ZB: Eine Drehung um 90° (in positiver Richtung) wird durch die Drehmatrix $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben. Die dazu inverse Matrix $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung um −90°.

8.16 Erstelle in GeoGebra mithilfe von Transformationsmatrizen eine Animation. Dabei soll das Quadrat A(0|0), B(1|0), C(1|1), D(0|1) um einen beliebigen Winkel gedreht und anschließend gestreckt werden. Dokumentiere deine Vorgehensweise. BC



Lösung:



Zuerst werden die Eckpunkte des Quadrats angegeben und danach das Quadrat mit dem Werkzeug **Vieleck** gezeichnet.
Anschließend werden die Schieberegler für den Drehwinkel und die Streckfaktoren definiert. Die Transformationsmatrizen werden wie folgt eingegeben:
DM={{cos(φ),−sin(φ)},{sin(φ), cos(φ)}}, E={{sx,0},{0,sy}}
Die Punkte A′, B′, C′ und D′ erhält man durch Multiplikation mit DM und E.
ZB: **A′=E*DM*A**

8.17 Erkläre, welche Transformation durch die Multiplikation mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. AD

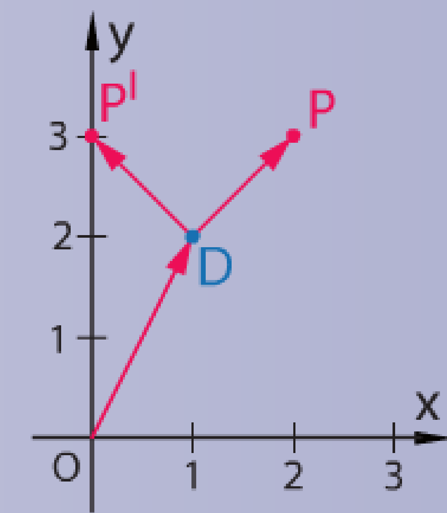
8.18 Erkläre, was bei der Drehmatrix für die Drehung um die z-Achse geändert werden muss, um die Drehmatrix für eine Drehung um die x- bzw. y-Achse im Raum $\mathbb{R}^3$ zu erhalten. Gib die Drehmatrizen anschließend an. CD

BD **8.19** Der Punkt P(2|3) soll um den Punkt D(1|2) um 90° gedreht werden.
1) Ermittle den gedrehten Punkt P′ mithilfe von Drehmatrix und Vektorrechnung.
2) Gib die Transformationsmatrix an, die diese Drehung beschreibt.
Beschreibe deine Überlegungen.
Lösung:
1) Um die Drehung mithilfe der Drehmatrix beschreiben zu können, denkt man sich den Punkt D in den Koordinatenursprung verschoben. Anstelle des Ortsvektors wird daher der Vektor $\overrightarrow{DP}$ verwendet. Durch Anwenden der Drehmatrix auf $\overrightarrow{DP}$ erhält man $\overrightarrow{DP'}$ und durch die anschließende Addition von $\overrightarrow{OD}$ den gesuchten Vektor $\overrightarrow{OP'}$.

$\overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Drehmatrix $D = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DP'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ P′(0|3)



2) Der Punkt P muss zuerst so verschoben werden, dass D im Ursprung liegt, also um den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann kann der Punkt gedreht werden und anschließend wird er wieder zurückverschoben. Da man eine Schiebung benötigt, muss mit homogenen Koordinaten gerechnet werden, das heißt $\overrightarrow{OP} = (2, 3, 1)$

1. Schiebungsmatrix: $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Drehmatrix $D = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ muss um eine Zeile und Spalte erweitert werden: $\overline{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Schiebungsmatrix: $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Damit ergibt sich die Matrix M: $M = S_2 \cdot \overline{D} \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

BD **8.20** Wende auf den Punkt P(2|0) folgende Transformationen an und stelle sie grafisch dar.



1) Drehe P zuerst um 30° um den Koordinatenursprung und verschiebe den neuen Punkt anschließend um den Vektor (3, 0).
2) Verschiebe P zuerst um den Vektor (3, 0) und drehe den neuen Punkt anschließend um 30° um den Koordinatenursprung. Erkläre die unterschiedlichen Ergebnisse.

ABD **8.21** **1)** Erkläre, wie du einen Punkt P an einer um den Winkel α zur x-Achse geneigten Geraden spiegeln kannst, wenn du nur die Drehung um den Ursprung und die Spiegelung an der x-Achse verwenden darfst.
2) Gib die Transformationsmatrix aus **1)** für α = 30° an und zeige, dass diese mit der Spiegelungsmatrix übereinstimmt.

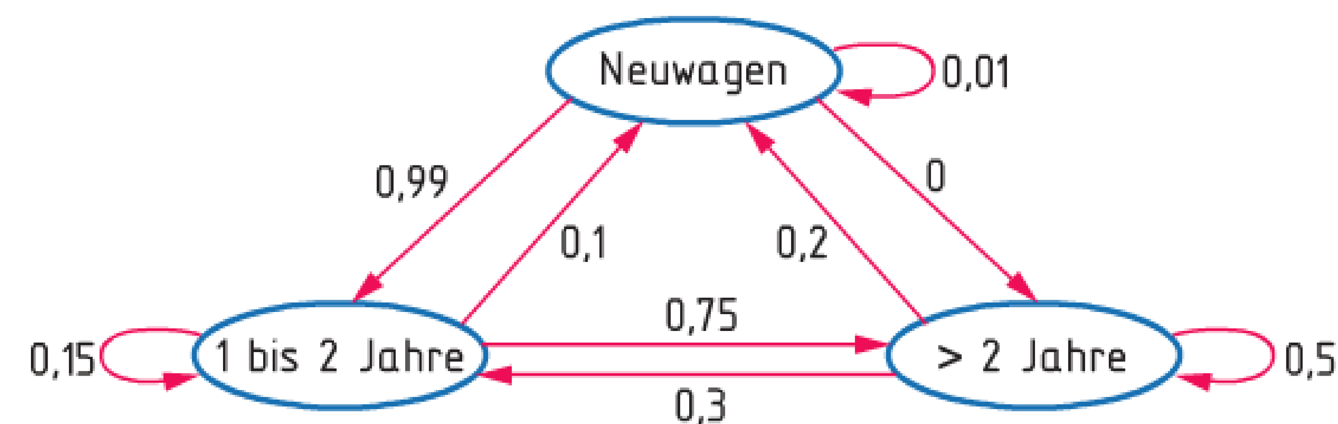
AB **8.22** **1)** Ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ soll um 3 Einheiten in x-Richtung, um 2 Einheiten in y-Richtung und um 4 Einheiten in z-Richtung verschoben werden. Gib die Transformationsmatrix an.
2) Gib die Spiegelungsmatrix für die Spiegelung an der z-Achse im $\mathbb{R}^3$ an. Ermittle die Koordinaten des gespiegelten Punkts von P(0|2|3).

8.3.2 Übergangsmatrizen

Wir haben Matrizen bereits dazu verwendet, um mehrstufige Produktionsvorgänge zu beschreiben. In ähnlicher Weise können Prozesse, die zeitlich geordnet von einem Zustand in einen weiteren übergehen, mithilfe von Matrizen beschrieben werden. Das tritt zum Beispiel bei Populationen auf, die verschiedene Entwicklungsstufen durchlaufen, wie von der Raupe über die Puppe zum Schmetterling. Der Übergang zwischen den Zuständen wird als **Übergangsprozess** bezeichnet.



Das Aufstellen einer Übergangsmatrix soll nun anhand eines Beispiels erklärt werden.
Ist ein Auto weniger als 1 Jahr alt, so spricht man von einem Neuwagen. 1 % der Neuwagenbesitzer ($P_{0,0}$) kaufen nach einem Jahr wieder einen Neuwagen, ebenso 10 % der Personen ($P_{1,0}$), deren Auto zwischen 1 Jahr und 2 Jahren alt ist, und 20 % der Personen ($P_{2,0}$), deren Auto älter als 2 Jahre ist. 15 % der Personen, die ein 1 bis 2 Jahre altes Auto besitzen, kaufen wieder ein 1 bis 2 Jahre altes Auto.
Diese und weitere „Übergänge" von einem Jahr ins nächste können grafisch veranschaulicht werden:



Soll nun ermittelt werden, wie viele Neuwagenbesitzer es nach einem Jahr gibt, so werden die Prozentzahlen mit der jeweiligen Personenanzahl multipliziert:
$P_{0,1} = 0{,}01 \cdot P_{0,0} + 0{,}1 \cdot P_{1,0} + 0{,}2 \cdot P_{2,0}$
Für die 1 bis 2 Jahre alten Autos ergibt sich: $P_{1,1} = 0{,}99 \cdot P_{0,0} + 0{,}15 \cdot P_{1,0} + 0{,}3 \cdot P_{2,0}$
Für die mehr als 2 Jahre alten Autos gilt: $P_{2,1} = 0{,}75 \cdot P_{1,0} + 0{,}5 \cdot P_{2,0}$

Dies kann auch mit Matrizen angeschrieben werden: $\begin{pmatrix} P_{0,1} \\ P_{1,1} \\ P_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}20 \\ 0{,}99 & 0{,}15 & 0{,}30 \\ 0{,}00 & 0{,}75 & 0{,}50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{0,0} \\ P_{1,0} \\ P_{2,0} \end{pmatrix}$

Möchte man die Anzahl nach 2 Jahren wissen, so muss die Übergangsmatrix quadriert werden, nach 3 Jahren mit 3 potenziert usw.

8.23 Bei einer Schmetterlingsart dauert das Raupen-, Puppen- bzw. Flugstadium für die Weibchen jeweils 2 Wochen. 40 % der Raupen verpuppen sich und 60 % der Puppen werden zu Schmetterlingen. Aus den Eiern eines Schmetterlingsweibchens entwickeln sich pro 2-Wochen-Zyklus im Mittel 10 weibliche Raupen. **ABC**

1) Stelle den Zusammenhang für die Schmetterlingsweibchen grafisch dar.
2) Gib die Übergangsmatrix an.
3) Berechne die Anzahl der Raupen, Puppen und Schmetterlingsweibchen nach 2 Wochen und 4 Wochen, wenn jetzt 100 weibliche Raupen, 50 Puppen und 20 Schmetterlinge leben. Was kannst du über deren Entwicklung aussagen?

8.24 Um öffentlich von A-Dorf nach B-Dorf zu kommen, kann man zwischen einem Zug und einem Bus wählen. 40 % der Personen, die an einem Tag mit dem Zug fahren, nehmen am nächsten Tag den Bus, die restlichen fahren wieder mit dem Zug. 55 % der Personen, die mit dem Bus fahren, wechseln am darauffolgenden Tag in den Zug, der Rest fährt wieder mit dem Bus. **ABD**

1) Gib an, welche Matrix diesen Prozess beschreibt. $A = \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}45 \\ 0{,}60 & 0{,}55 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}55 \\ 0{,}40 & 0{,}45 \end{pmatrix}$
Begründe deine Antwort.
2) Am Dienstag fahren 61 Personen mit dem Bus und 79 Personen mit dem Zug. Berechne jeweils die Personenanzahl in Bus und Zug von Montag und Freitag, wenn während der gesamten Woche immer dieselben Personen fahren.

Matrizen

Zusammenfassung

(m x n)-Matrix
m Zeilen, n Spalten
a_{ij} … Elemente der Matrix mit i = 1, …, m; j = 1, …, n

Die **Addition** bzw. **Subtraktion** zweier (m x n)-Matrizen und die **Multiplikation** einer Matrix **mit einem Skalar** erfolgen komponentenweise.

Multiplikation zweier Matrizen: Man bildet das skalare Produkt des i-ten Zeilenvektors einer (m x n)-Matrix mit dem j-ten Spaltenvektor einer (n x r)-Matrix und erhält dadurch eine (m x r)-Matrix.

Inverse Matrix A^{-1} einer quadratischen Matrix mit $\det(A) \neq 0$: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Lösen von Gleichungssystemen: Ein lineares Gleichungssystem kann mithilfe von Matrizen dargestellt und mit der inversen Matrix gelöst werden. $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Transformationsmatrizen: Die Multiplikation von Vektoren mit speziellen Matrizen stellen Bewegungen in der Ebene und im Raum dar.

Weitere Aufgaben

D **8.25** Gib an, welche Aussagen richtig und welche falsch sind. Begründe deine Antworten.
A) Matrizen können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn die Zeilenanzahl der linken Matrix gleich groß wie die Spaltenanzahl der rechten Matrix ist.
B) Das Produkt einer (2 x 3)-Matrix mit einer (3 x 4)-Matrix ist eine (2 x 4)-Matrix.
C) Ein lineares Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Zeilen der Koeffizientenmatrix linear abhängig sind.

BD **8.26** Führe mit den gegebenen Matrizen folgende Rechenoperationen durch bzw. begründe, warum dies nicht möglich ist.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = (3 \quad 1 \quad 5)$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $2 \cdot B$ ***b)*** $A + D$ ***c)*** B^{-1} ***d)*** $B \cdot C$ ***e)*** $B \cdot D$ ***f)*** $D \cdot B$

ABD **8.27** Bei der Herstellung eines Produkts werden drei Rohstoffe R1, R2 und R3 zu zwei Zwischenprodukten Z1 und Z2 verarbeitet. Diese werden anschließend zur Fertigung von drei Endprodukten E1, E2 und E3 verwendet. In den Tabellen sind die jeweiligen Mengen in Mengeneinheiten angegeben.

Tab. 1	Z1	Z2
R1	20	40
R2	10	30
R3	30	10

Tab. 2	Z1	Z2
E1	5	8
E2	3	10
E3	4	9

Tab. 3	E1	E2	E3
R1	420	460	
R2	290		
R3	230		

1) Gib die zur Berechnung der Einträge in Tabelle 3 notwendigen Matrizen an und schreibe die Matrizenmultiplikation auf. Berechne die fehlenden Einträge.
2) Es werden 10 Stück von E1, 20 von E2 und 15 von E3 verkauft. Berechne die benötigten Mengen der Rohstoffe.
3) Erkläre die Auswirkungen auf Tabelle 3, wenn die Mengen in Tabelle 1 halbiert werden.

8.28 Schreibe das Gleichungssystem mithilfe von Matrizen an. Löse es – falls möglich – mit Technologieeinsatz. BC

a) I: $3x + 6z = 0$
II: $-x + 2y = -2$
III: $6y + 4z = 4$

b) I: $u + v - x = 3$
II: $v + 2w = 0$
III: $-2u - 2v + 2x = 4$
IV: $v - 3w + 2x = 5$

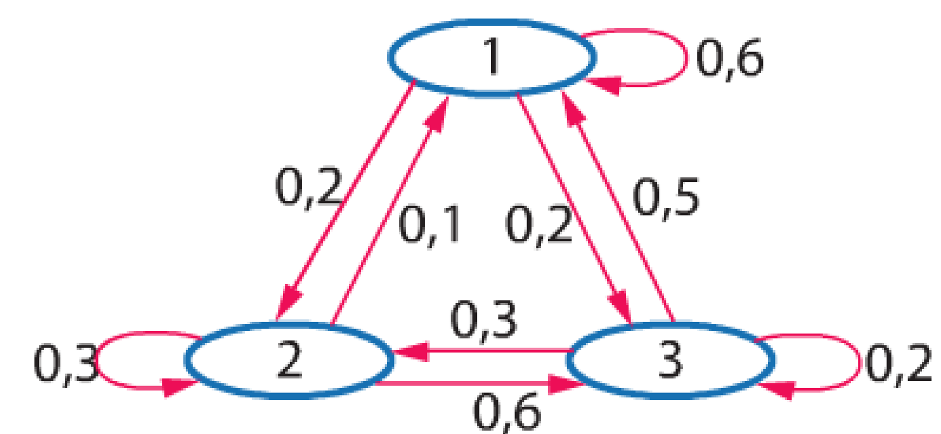
c) I: $-a + 2c - d = 1$
II: $2a - 4b + 5c = 3$
III: $a + d = 2$
IV: $6a - 5d = -4$

8.29 Auf den Punkt P(3|2) sollen die angegebenen Transformationen angewendet werden. Gib jeweils die Transformationsmatrix und P′ an. Beschreibe deine Vorgehensweise. ABC

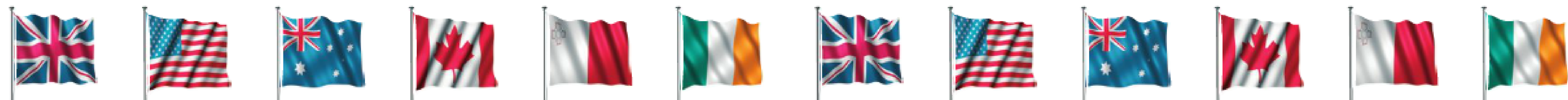
1) Drehung um –60° um den Ursprung
2) Streckung um den Faktor 3 in x-Richtung und um 1,5 in y-Richtung
3) Drehung um 60° um den Ursprung und anschließend Spiegelung an der y-Achse

8.30 Die Punkte A(1|0) und B(4|1) werden einer Transformation unterworfen, die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Berechne die neuen Koordinaten der Punkte A′ und B′ und stelle A, B, A′ und B′ grafisch dar. Beschreibe die Transformation. BC

8.31 Der dargestellte Übergangsgraph gibt das Kaufverhalten für drei Produkten innerhalb einer Woche an. Beschreibe das Kaufverhalten und gib die Übergangsmatrix an. AC



Aufgaben in englischer Sprache



inverse of a square matrix	inverse Matrix	system of equations	Gleichungssystem
rotation	Drehung	translation	Schiebung

8.32 Calculate the inverse matrix if possible. **a)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 21 \end{pmatrix}$ B

8.33 Find the transformation-matrix when a point is rotated clockwise about the point D(0|1) through an angle of 45°. AB

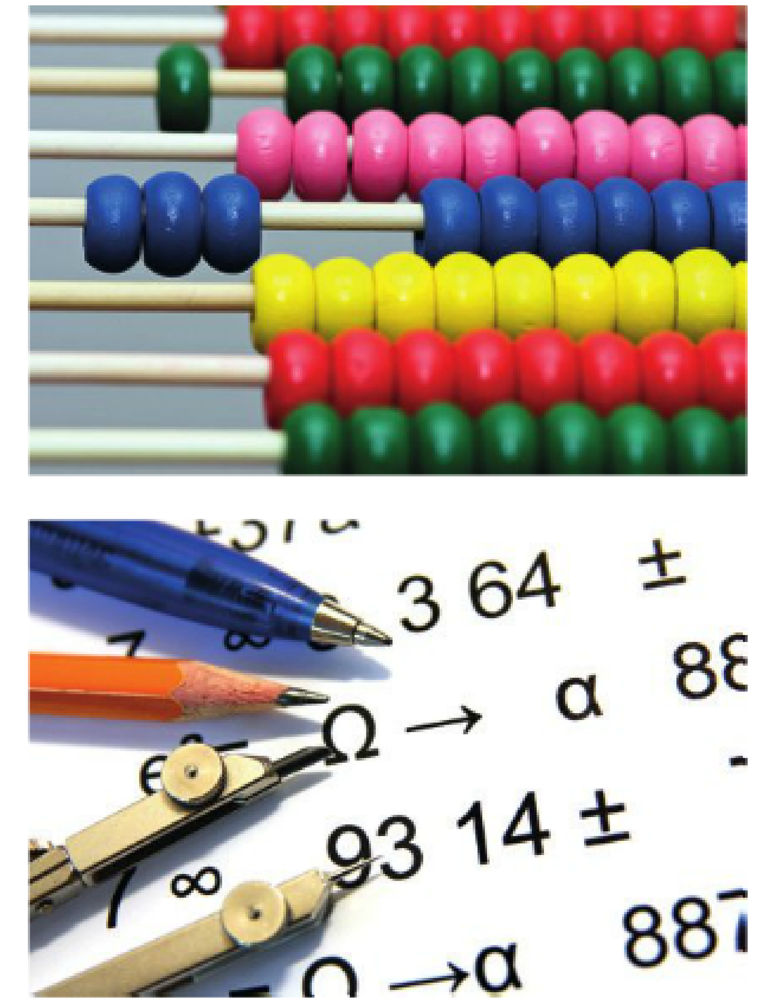
Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann verschiedene Anwendungen der Matrizenrechnung nennen.	
2	Ich kann erklären, wie Matrizen zur Lösung von Gleichungssystemen verwendet werden können.	
3	Ich kenne verschiedene Methoden zur Berechnung einer inversen Matrix. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$	
4	Erkläre, welche Transformation durch die Multiplikation mit der Matrix M beschrieben wird. A) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B) $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	

Lösung:
1) Produktionsmatrizen, Transformationsmatrizen, Lösen von Gleichungssystemen 2) siehe Seiten 289ff
3) siehe Seiten 289ff, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$ 4) A) Streckung in x-Richtung, B) Spiegelung an der y-Achse, C) Drehung um –90°

9 Algebraische Strukturen

Mit dem technischen Fortschritt war auch die Mathematik gefordert, immer wieder neue Rechenmodelle und -methoden zu entwickeln. Neben den uns bisher bekannten Zahlenbereichen gibt es noch weitere Rechensysteme, die in den verschiedensten Anwendungen Gebrauch finden, wie zum Beispiel das Binärsystem in der Computeralgebra oder die Restklassenrechnung bei der Codierung. Jedoch gelten die bekannten Rechengesetze nicht in allen Strukturen. Daher entwickelte sich in der Mathematik Anfang des 20. Jahrhunderts die „Moderne Algebra", um mithilfe eines strikten Regelwerks eine Ordnung in die Vielzahl von Rechentechniken zu bringen.



Diese Idee der Mathematik fand sich auch in den 1960er und 1970er Jahren im Schulunterricht wieder, als unter dem Namen „New Math" verstärkt Mengenlehre unterrichtet wurde.

9.1 Verknüpfungen

CD **9.1** Untersuche folgende Aussage: „In einem Raum befinden sich vier Personen. Wenn sieben Leute den Raum verlassen, müssen drei Leute hineingehen, damit der Raum leer ist."

1) Kann dieses Ereignis eintreten? Begründe deine Antwort.

2) Von welchem Zahlenbereich müsste man ausgehen, damit die Aussage theoretisch sinnvoll ist?

Um mit Objekten von Mengen (Zahlen, Vektoren, Matrizen, …) arbeiten zu können, ist es wichtig, die Gesetzmäßigkeiten in diesen Mengen und die Zusammenhänge zwischen den Objekten zu kennen. Um eine Rechenoperation in einer Menge allgemein zu beschreiben, verwendet man in der **modernen Algebra** bzw. der **abstrakten Algebra** das Zeichen „$\circ$" [sprich: „verknüpft"] als Zeichen für die Rechenoperation.
In diesem Abschnitt werden die algebraischen Strukturen Gruppe, Ring und Körper und die dort geltenden Gesetzmäßigkeiten besprochen. Damit wird jedoch nur ein kleiner Einblick in die abstrakte Algebra gegeben.

Verknüpfungen sind Funktionen f, die n Elementen $a_1, a_2, ..., a_n$ aus einer Menge $\mathbb{A}$ jeweils ein Element $b = f(a_1, a_2, ..., a_n)$ aus $\mathbb{A}$ zuordnen. Die Menge $\mathbb{A}$ ist also bezüglich dieser Verknüpfung **abgeschlossen**. Man nennt das Paar $(\mathbb{A}, \circ)$ **Verknüpfungsgebilde** oder **Struktur**.
Für n = 2 schreibt man: $a_1 \circ a_2 = b$ bzw. $a \circ b = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{A}$

ZB: In der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die Multiplikation zweier natürlichen Zahlen eine Verknüpfung. In diesem Fall gilt: $a \circ b = a \cdot b$, also zB: $4 \circ 7 = 28 \in \mathbb{N}$

In Band 1, Abschnitt 1.1, wurden die wichtigsten Rechengesetze zusammengefasst.
Verknüpfungen werden auf die Gültigkeit dieser Gesetze untersucht.

- **Kommutativgesetz**: $a \circ b = b \circ a$
- **Assoziativgesetz**: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

ZB: $(\mathbb{Z}, -)$
Da die Differenz zweier ganzer Zahlen wieder eine ganze Zahl ist, ist die Menge $\mathbb{Z}$ bezüglich der Verknüpfungen „–" abgeschlossen, $(\mathbb{Z}, -)$ ein Verknüpfungsgebilde. Die Subtraktion ist aber weder kommutativ noch assoziativ: $3 - 5 \neq 5 - 3$, $5 - (3 - 1) \neq (5 - 3) - 1$

Aufgaben 9.2 – 9.4: Wende die Verknüpfungen auf die gegebenen Zahlen an.

9.2 Für $a \circ b$ gilt: Bilde die Differenz der Zahlen a und $b \in \mathbb{N}$, wenn $a \geqslant b$ ist. Ist $a < b$, ist das Ergebnis a. AB

a) $a = 7, b = 3$ **b)** $a = 23, b = 24$ **c)** $a = 117, b = 117$

Lösung:

a) $7 \circ 3 = 4$, da $7 \geqslant 3$ **b)** $23 \circ 24 = 23$, da $23 < 24$ **c)** $117 \circ 117 = 0$, da $117 \geqslant 117$

9.3 Für $a \circ b$ gilt: Ist a ein Vielfaches von drei, wird a mit b multipliziert, andernfalls wird a durch b dividiert. AB

a) $a = 4, b = 0{,}5$ **b)** $a = 12, b = 3$ **c)** $a = 342, b = 1{,}5$ **d)** $a = 2545, b = 5$

9.4 Für $a \circ b$ gilt: Ist a ein Teiler von b, werden a und b addiert, sonst wird a mit b multipliziert. AB

a) $a = 7, b = 42$ **b)** $a = 18, b = 6$ **c)** $a = 31, b = 124$ **d)** $a = 12, b = 154$

9.2 Gruppe, Ring und Körper

9.5 Recherchiere, welche Führerscheinklassen es in Österreich gibt. Welche Voraussetzungen müssen für diese Klassen jeweils erfüllt sein? Welche Regeln gelten dann automatisch für andere Klassen? AD

Beim Rechnen in $\mathbb{R}$ verwendet man ein bestimmtes Regelwerk, das so vertraut ist, dass dessen Rechenregeln als selbstverständlich gehalten werden. Will man nun in einer neuen Menge von Objekten mit anderen Verknüpfungen arbeiten, wird untersucht, unter welchen Bedingungen dieses Regelwerk auf diese Strukturen übertragbar ist.

Die Gruppe

Meist verstehen wir unter einer Gruppe eine Ansammlung von Menschen oder Dingen, die viele Eigenschaften gemeinsam haben und die den gleichen Regeln und Gesetzen folgen.



Damit eine bestimmte Menge $\mathbb{M}$ bezüglich der Verknüpfung „$\circ$" eine **Gruppe** im mathematischen Sinn bildet, müssen folgende Gesetzmäßigkeiten, die so genannten **Gruppenaxiome**, gelten ($a, b, c \in \mathbb{M}$):

- Das **Assoziativgesetz** muss erfüllt sein: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Es muss ein **neutrales Element** $n \in \mathbb{M}$ geben, für das gilt: $a \circ n = n \circ a = a$
- Zu jedem Element a aus $\mathbb{M}$ muss es ein **inverses Element** $\bar{a} \in \mathbb{M}$ geben, so dass gilt: $a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = n$

Ist die Verknüpfung in einer Gruppe zusätzlich kommutativ, nennt man sie eine **Abel'sche Gruppe** (Niels Henrik Abel, norwegischer Mathematiker, 1802 – 1829).

ZB: Es soll überprüft werden, ob die Menge $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation „$\cdot$" bildet.

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}^*$
- „$\cdot$" ist assoziativ in $\mathbb{Q}^*$.

Neutrales Element: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- Es existiert das neutrale Element $n = 1$.

Inverses Element: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
- Der Kehrwert jeder rationalen Zahl $\neq 0$ ist wieder eine rationale Zahl. Es existiert $\forall\, a \in \mathbb{Q}^*$ das inverse Element $\bar{a} = \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}^*$.

Da alle Gruppenaxiome erfüllt sind, bildet $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation.

Algebraische Strukturen

Der Ring



Wenn man sich entschließt zu heiraten, tauscht man als Zeichen der Verbundenheit Ringe aus. Das ist ein Symbol dafür, dass die Eigenschaften zweier unterschiedlicher Dinge zu einem Ganzen zusammengefügt werden. Aus mathematischer Sicht ist ein **Ring** eine Menge, auf der zwei Verknüpfungen definiert sind.

Da in einem Ring zwei unterschiedliche Verknüpfungen „$\oplus$" und „$\odot$" auftreten, kommen hier auch die Distributivgesetze zur Anwendung (vergleiche Band 1, Abschnitt 1.1):

Distributivgesetze: $c \odot (a \oplus b) = (c \odot a) \oplus (c \odot b)$ … linksdistributiv

$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$ … rechtsdistributiv

Damit eine Menge $\mathbb{M}$ bezüglich der Verknüpfungen „$\oplus$" und „$\odot$" einen Ring bildet, müssen folgende **Ringaxiome** erfüllt sein ($a, b, c \in \mathbb{M}$):

- Die Menge $\mathbb{M}$ bildet eine **Abel'sche Gruppe** bezüglich „$\oplus$".
  Das **neutrale Element** von „$\oplus$" wird **Nullelement** genannt.
- „$\odot$" muss assoziativ sein:
  $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
- Die **Distributivgesetze** müssen erfüllt sein:
  $c \odot (a \oplus b) = (c \odot a) \oplus (c \odot b)$ und $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$

D **9.6** Untersuche, ob die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einen Ring bezüglich der Addition „+" und ***1)*** der Multiplikation „·", ***2)*** der Division „:" bildet.

Lösung:

1) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$
$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$
Nullelement $n = 0$: $a + 0 = 0 + a = a$
Inverses Element $\bar{a} = -a$: $a + (-a) = 0$
$(\mathbb{Z}, +)$ bildet eine Abel'sche Gruppe.

- „+" ist kommutativ und assoziativ.
- Es gibt ein Nullelement und $\forall a \in \mathbb{Z}$ das inverse Element.

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$
$c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$ und
$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bildet einen Ring bezüglich „+" und „·".

- Das Assoziativgesetz für „·" ist erfüllt.
- Die Distributivgesetze gelten.

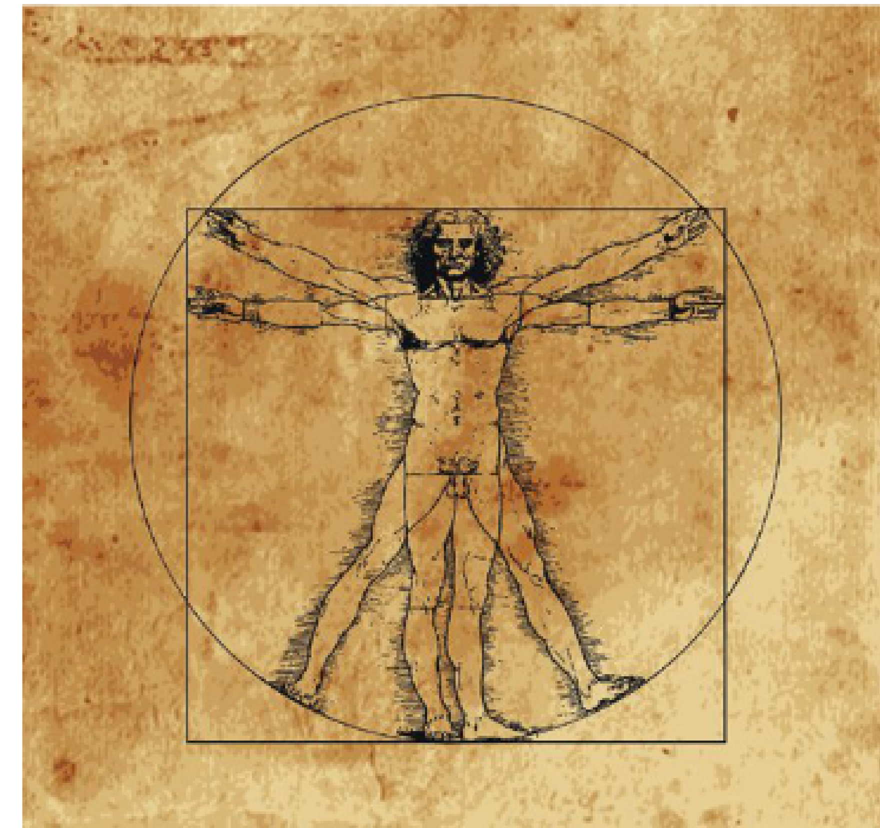
2) $\mathbb{Z}$ bildet eine Abel'sche Gruppe bezüglich „+" (siehe ***1)***).
Die Division ist keine Verknüpfung in $\mathbb{Z}$, da zum Beispiel: $3 : 5 \notin \mathbb{Z}$.
$(\mathbb{Z}, +, :)$ bildet daher keinen Ring bezüglich „+" und „:".

Bemerkung:
In Aufgabe **9.6** ***2)*** hätte die Überprüfung im 2. Schritt fortgesetzt werden können. Im Allgemeinen werden derartige Untersuchungen oft bis zum Ende durchgeführt, da es noch einige Unterstrukturen von Gruppen und Ringen wie zum Beispiel Halbgruppen oder Monoide gibt.

Der Körper

Da die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einen Körper bezüglich der gebräuchlichen Verknüpfungen „+" und „·" bilden, werden nun anstatt der Ring- und Kreissymbolik diese Rechenzeichen verwendet.

Folgende **Körperaxiome** der Menge $\mathbb{M}$ bezüglich der Verknüpfungen „+" und „·" müssen erfüllt sein ($a, b, c \in \mathbb{M}$):



- $\mathbb{M}$ bildet eine **Abel'sche Gruppe** bezüglich „+":
  $a + b = b + a$ (**kommutativ**)
  $a + (b + c) = (a + b) + c$ (**assoziativ**)
  Neutrales Element – Nullelement 0:
  $a + 0 = 0 + a = a$
  Inverses Element $\bar{a} = -a$:
  $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- $\mathbb{M} \setminus \{0\}$ bildet eine **Abel'sche Gruppe** bezüglich „·":
  $a \cdot b = b \cdot a$ (**kommutativ**)
  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (**assoziativ**)
  Neutrales Element – **Einselement** 1:
  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
  Inverses Element $\bar{a} = \frac{1}{a}$:
  $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
- Die **Distributivgesetze** müssen gelten:
  $c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$ und $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Handelt es sich bei der Menge um eine Zahlenmenge, so spricht man von einem **Zahlenkörper**. So bilden zum Beispiel die komplexen Zahlen einen (Zahlen-)Körper.

9.7 Überprüfe stichprobenartig für $a = 5$, $b = 1{,}5$ und $c = -2$, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einen Körper bezüglich der Addition und der Multiplikation bildet. **D**

Lösung:
Untersuchung auf Abel'sche Gruppen:

$\left.\begin{array}{l} 5 + 1{,}5 = 6{,}5 \\ 1{,}5 + 5 = 6{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ kommutativ

$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5 \\ 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ kommutativ

$\left.\begin{array}{l} (5 + 1{,}5) + (-2) = 4{,}5 \\ 5 + (1{,}5 + (-2)) = 4{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ assoziativ

$\left.\begin{array}{l} (5 \cdot 1{,}5) \cdot (-2) = -15 \\ 5 \cdot (1{,}5 \cdot (-2)) = -15 \end{array}\right\} \Rightarrow$ assoziativ

$n = 0$: $5 + 0 = 0 + 5 = 5$

$\bar{a} = -5$: $5 + (-5) = (-5) + 5 = 0$

$n = 1$: $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$

$\bar{a} = \frac{1}{5}$; $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

Distributivgesetze:

$\left.\begin{array}{l} (-2) \cdot (5 + 1{,}5) = -13 \\ ((-2) \cdot 5) + ((-2) \cdot 1{,}5) = -13 \end{array}\right\} \Rightarrow$ linksdistributiv

$\left.\begin{array}{l} (5 + 1{,}5) \cdot (-2) = -13 \\ (5 \cdot (-2)) + (1{,}5 \cdot (-2)) = -13 \end{array}\right\} \Rightarrow$ rechtsdistributiv

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bilden einen Körper bezüglich Addition und Multiplikation.

BD **9.8** Zeige, dass ($\mathbb{Q}$, :) eine Gruppe, aber keine Abel'sche Gruppe bildet.

BD **9.9** Erkläre anhand eines Beispiels, warum ($\mathbb{N}$, +) keine Gruppe bildet.

Aufgaben 9.10 – 9. 11: Begründe jeweils allgemein bzw. widerlege mit selbst gewählten Zahlenbeispielen.

D **9.10** Untersuche, ob die Zahlenmenge $\mathbb{M}$ eine Gruppe bezüglich ***1)*** der Addition, ***2)*** der Multiplikation bildet. ($\mathbb{P}$ ... Menge der Primzahlen)
a) $\mathbb{M} = \mathbb{Z}^-$ ***b)*** $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ ***c)*** $\mathbb{M} = \mathbb{Q}$ ***d)*** $\mathbb{M} = \mathbb{P}$

D **9.11** Untersuche, ob die Struktur einen Ring bildet.
a) ($\mathbb{C}$, +, ·) ***b)*** (Vektoren im $\mathbb{R}^3$, +, Kreuzprodukt)

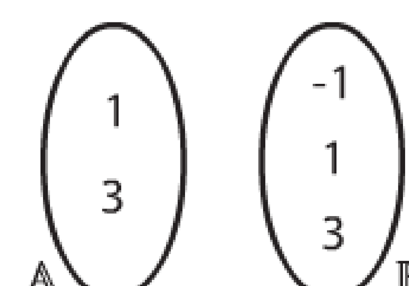
D **9.12** Zeige, dass die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einen Körper bezüglich der Addition und Multiplikation bildet.

9.3 Relationen



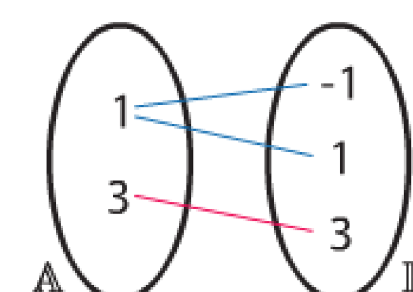
BD **9.13** Stelle folgende Zuordnungen dar, indem du zwischen einander zugeordneten Elementen Verbindungslinien ziehst. Was fällt dir auf?
1) Den Schülerinnen und Schülern deiner Klasse werden die Katalognummern zugeordnet.
2) Den Schülerinnen und Schülern deiner Klasse wird jeweils der Buchstabe des Alphabets zugeordnet, mit dem der Nachname beginnt.

Bereits in Band 1 haben wir bei einer Zuordnung zwischen einer **Funktion** und einer **Relation** unterschieden. Unter einer **Funktion** versteht man die **eindeutige** Zuordnung von **genau einem** y-Wert zu einem x-Wert. Können einem x-Wert auch **mehrere** y-Werte zugeordnet werden, so nennt man diese **nicht eindeutige** Zuordnung eine **Relation**.
Bisher wurde der Unterschied anschaulich begründet. Nun soll dieser mathematisch präzise definiert werden. Dazu benötigt man den Begriff der **Produktmenge**.
Sind $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ zwei beliebige Mengen, so versteht man unter der Produktmenge $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in \mathbb{A}$ und $b \in \mathbb{B}$.
ZB: $\mathbb{A} = \{1, 3\}$, $\mathbb{B} = \{-1, 1, 3\}$
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(1, -1), (1, 1), (1, 3), (3, -1), (3, 1), (3, 3)\}$

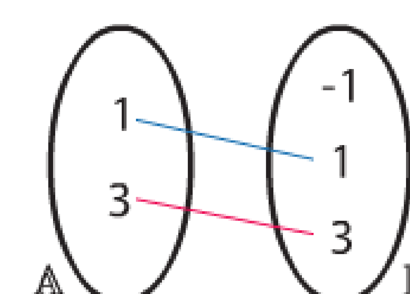


Eine Relation R ist eine Teilmenge von $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, für $(a, b) \in \mathbb{R}$ schreibt man „aRb".

ZB: $aRb \Leftrightarrow |a| = |b|$
[sprich: „a steht in Relation zu b, genau dann, wenn deren Beträge gleich sind"]
R = {(1, −1), (1 ,1), (3, 3)}



Bei einer Funktion gilt zusätzlich, dass es zu jedem a nur genau ein b gibt.
ZB: $aRb \Leftrightarrow a = b$, R = {(1, 1), (3, 3)}



Die **Produktmenge** $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ zweier Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in \mathbb{A}$ und $b \in \mathbb{B}$.
Eine **Relation** R von $\mathbb{A}$ in $\mathbb{B}$ ist eine Teilmenge der Produktmenge: $R \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}$
Ist $(a, b) \in R$, so schreibt man aRb. Gilt $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, so nennt man R eine Relation auf $\mathbb{A}$.

Relationen auf $\mathbb{A}$ können nach ihren Eigenschaften eingeteilt werden.

- R heißt **reflexiv**, wenn für alle $a \in \mathbb{A}$ gilt: aRa
- R heißt **symmetrisch**, wenn für alle $a, b \in \mathbb{A}$ gilt: $aRb \Rightarrow bRa$
- R heißt **antisymmetrisch**, wenn für alle $a, b \in \mathbb{A}$ gilt: $(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$
- R heißt **transitiv**, wenn für alle $a, b, c \in \mathbb{A}$ gilt: $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

Beispiel 1: $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, $aRb \Leftrightarrow |a| = |b|$:
R ist reflexiv, da $|a| = |a|$
symmetrisch, da $|a| = |b| \Rightarrow |b| = |a|$
transitiv, da $|a| = |b| \;\wedge\; |b| = |c| \;\Rightarrow\; |a| = |c|$
nicht antisymmetrisch, da $|3| = |-3|$, aber $3 \neq -3$

Beispiel 2: $\mathbb{A}$ = Menge der Schülerinnen und Schüler deiner Klasse, $aRb \Leftrightarrow$ a und b haben denselben Vornamen: R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Beispiel 3: $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, $aRb \Leftrightarrow a \geqslant b$: R ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Aufgrund dieser Eigenschaften können Relationen unterschieden werden.

Äquivalenzrelation: reflexive, symmetrische und transitive Relation
Ordnungsrelation: reflexive, antisymmetrische und transitive Relation

Verwendet man nicht nur zwei sondern mehrere Mengen, die miteinander in Verbindung gesetzt werden, so erhält man das kartesische Produkt $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2 \times \ldots \times \mathbb{M}_n$ und die Relation ist das n-Tupel $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Um diese Relation darzustellen, kann, wie auch bei Funktionen, eine Tabelle verwendet werden.

Jede Tabelle gibt einen Zusammenhang an und legt daher eine Relation fest. Die Tabelle besteht dann aus n Spalten und jede Zeile enthält ein Element der Relation. Diese Darstellung wird zum Beispiel bei Datenbanken verwendet. Daten können daher als Mengen aufgefasst werden, wodurch dieselben Rechenoperationen wie für Mengen zur Verfügung stehen. Die Verknüpfung von Relationen wird **Relationenalgebra** genannt. Sie wird zum Beispiel zur Auswahl bestimmter Spalten (Projektion) oder zur Verbindung (Join) von Tabellen verwendet.

9.14 Gib an, ob die Relation eine Funktion ist. Begründe deine Antwort. CD
1) Jedem Einwohner und jeder Einwohnerin wird eine Sozialversicherungsnummer zugeordnet.
2) Jeder Person wird ihr Wohnort zugeordnet.
3) Einer Zahl wird jene Ziffer zugeordnet, die an ihrer Einerstelle steht.

9.15 Gib an, ob die Relation reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv ist. Begründe deine Antwort. CD
1) $\mathbb{A}$ = Menge aller Frauen, $aRb \Leftrightarrow$ a ist die Schwester von b
2) $\mathbb{A}$ = Menge aller Menschen, $aRb \Leftrightarrow$ a ist die Schwester von b

9.16 Gib an, ob es sich um eine Äquivalenz-, Ordnungsrelation oder weder noch handelt. Begründe deine Antwort. CD
a) $\mathbb{A} = \mathbb{N}$, $aRb \Leftrightarrow$ a teilt b
b) $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$
c) $\mathbb{A}$ = Schülerinnen und Schüler deiner Klasse, $aRb \Leftrightarrow$ a und b sind gleich alt.

9.17 Finde eine Relation, die sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch ist. A

9.4 Restklassen



„An welchem Wochentag bist du geboren?" Einige Menschen können diese Frage nach nur wenigen Sekunden für jedes beliebige Datum beantworten. Dazu bedarf es nur des Beherrschens der Grundrechnungsarten, des Merkens von einigen Ziffern und des Rechnens mit so genannten Restklassen.

BD **9.18** Der 1. April 2013 war ein Montag. Gib den Wochentag zum gegebenen Datum an und erkläre deine Vorgehensweise.
1) 5. April 2013 ***2)*** 8. April 2013 ***3)*** 12. April 2013 ***4)*** 15. April 2013 ***5)*** 24. April 2013

Sollen zum Beispiel Nägel in Schachteln so aufgeteilt werden, dass in jeder Schachtel gleich viele Nägel sind, so ist auch von Interesse, wie viele Nägel „übrig bleiben". Das heißt, es ist jener Rest gesucht, der bei der Division der Gesamtanzahl der Nägel durch die Schachtelanzahl entsteht. Aufgrund solcher Fragestellungen wird folgende Relation definiert:
Zwei ganze Zahlen stehen dann in Relation, wenn sie bei der Division durch dieselbe natürliche Zahl denselben Rest haben.
ZB: $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, aRb $\Leftrightarrow$ a und b haben bei Division durch 3 denselben Rest
$R = \{..., (-3, 3), (0, 3), (1, 4), (3, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 8), ...\}$

Für jede ganze Zahl gilt, dass sie entweder in Relation zu 0, zu 1 oder zu 2 steht, da bei Division durch 3 kein anderer Rest möglich ist. Die zugeordnete Zahl ergibt sich durch Addition eines Vielfachen von 3 zu diesem Rest. Es gibt damit drei „Klassen" von Paaren:
$(0 + m \cdot 3, 0 + n \cdot 3), (1 + m \cdot 3, 1 + n \cdot 3), (2 + m \cdot 3, 2 + n \cdot 3), n, m \in \mathbb{Z}$

Für die Relation „aRb $\Leftrightarrow$ a und b haben bei Division durch m denselben Rest" schreibt man **a ≡ b mod m** oder **a ≡ b (m)** [sprich: „a kongruent b modulo m"] (latein: „modulo" = mit dem Maß). Zum Beispiel schreibt man $7 \equiv 31 \bmod 3$, da beide den Rest 1 bei Division durch 3 haben.
Daher gilt: $31 \equiv 7 \equiv 1 \bmod 3$
Da bei der Division durch m nur die Reste 0, 1, 2, …, m – 1 entstehen können, fasst man alle Zahlen, die denselben Rest wie a haben, zu so genannten **Restklassen** zusammen.
Man schreibt $\bar{a}$ oder $[a]_m$. Die Menge der Restklassen wird meist mit $\mathbb{Z}_m$ bezeichnet.

ZB: Restklassen modulo 3: $\bar{0} = \{..., -3, 0, 3, 6, ...\}$, $\bar{1} = \{..., -2, 1, 4, 7, ...\}$, $\bar{2} = \{..., -1, 2, 5, 8, ...\}$
$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ oder $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen **kongruent modulo m** $\in \mathbb{N}^*$ ($a \equiv b \bmod m$), wenn sie bei der Division durch m denselben Rest haben. Die Relation „modulo" ist eine Äquivalenzrelation.
Eine **Restklasse modulo m** ist die Menge aller Zahlen, die bei Division durch m denselben Rest wie a haben. Man schreibt: $\bar{a}$ oder $[a]_m$. a ist ein beliebiger Repräsentant der Restklasse, üblicherweise wird der kleinste positive Repräsentant angegeben, also $0 \leq a < m$ gewählt.
$\mathbb{Z}_m$ … Menge der Restklassen

Rechnen mit Restklassen
Die Addition und Multiplikation mit Restklassen erfolgt wie bei den ganzen Zahlen, allerdings muss das Ergebnis wieder eine Restklasse sein.
ZB: $[1]_3 + [2]_3$: $1 + 2 = 3 \equiv 0 \bmod 3$, also $[1]_3 + [2]_3 = [3]_3 = [0]_3$
$[2]_3 \cdot [2]_3$: $2 \cdot 2 = 4 \equiv 1 \bmod 3$, also $[2]_3 \cdot [2]_3 = [4]_3 = [1]_3$

Für die **Addition** und **Multiplikation** von Restklassen gilt:
$[a]_m + [b]_m = [a + b]_m$ $\qquad [a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$

Meist werden die Rechenoperationen in Form von Tabellen angegeben.

$\mathbb{Z}_3$: Addition

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Multiplikation

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Die Restklassen bilden damit einen kommutativen Ring bezüglich der Addition und Multiplikation, den **Restklassenring** (Beweis siehe Aufgabe 9.28).

9.19 Erkläre, wie folgende Zahlenangaben mithilfe von Restklassen ermittelt werden können. **AD**
1) 3:00 Uhr statt 15:00 Uhr
2) 1 Minute 20 Sekunden statt 80 Sekunden

9.20 Berechne. ***a)*** 8 mod 4 ***b)*** 123 mod 5 ***c)*** 238 mod 11 ***d)*** 5 298 mod 2 **B**

9.21 Gib die Additions- und Multiplikationstabelle für ***a)*** $\mathbb{Z}_4$, ***b)*** $\mathbb{Z}_5$ an. **B**

9.22 Berechne. ***a)*** $[2]_6 + [5]_6$ ***b)*** $[11]_{12} + [5]_{12}$ ***c)*** $[3]_7 \cdot [4]_7$ ***d)*** $[9]_{10} \cdot [3]_{10}$ **B**

9.23 Beweise mithilfe von Restklassen die Teilbarkeitsregel für 3. Schreibe dazu die Zahl als Summe von Zehnerpotenzen an und berechne 10^n mod 3. **BD**

9.24 Restklassen werden auch zur Überprüfung der Identifikationsnummern bei Waren (GTIN) oder bei Büchern (ISBN) verwendet. Dabei ist die letzte Ziffer der Nummer eine Prüfziffer. Damit kann ein Vertauschen oder Ändern einer Ziffer entdeckt werden. **BC**



9 ... GTIN

Für die 13-stellige GTIN (Global Trade Item Number) gilt:
$x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + \ldots + 3x_{12} + x_{13} \equiv 0 \bmod 10$
Für die 10-stellige ISBN (International Standard Book Number) gilt:
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \ldots + 9x_9 \equiv x_{10} \bmod 11$
1) Ist die dargestellte GTIN korrekt? Wenn nein, gib die richtige Prüfziffer x_{13} an.
2) Stimmt die dargestellte ISBN?
3) Kontrolliere die ISBN und die GTIN dieses Schulbuchs. Bei Büchern, die ab 2007 erscheinen, werden die 10 Stellen der ISBN auf 13 Stellen erweitert, wobei meist die Zahl 978 vorangestellt wird.

9.25 Recherchiere im Internet, wie man zu jedem beliebigen Datum den Wochentag berechnen kann. Präsentiere dein Ergebnis und gib an, welcher Wochentag der **BCD**
1) 7. November 1867 (Geburtstag von Marie Curie),
2) 15. April 1701 (Geburtstag von Leonhard Euler) war.

9.26 ***1)*** Für die Potenzen der imaginären Einheit gilt: **BCD**
$j^{4n+1} = j, j^{4n+2} = -1, j^{4n+3} = -j, j^{4n} = 1,\ n \in \mathbb{Z}$
Gib diese Regel mithilfe von Restklassen an.
2) Erkläre, wie die n-te Ableitung der Sinusfunktion y = sin(x) mithilfe von Restklassen angegeben werden kann.

9.27 Zeige, dass $a \equiv b \bmod m$ eine Äquivalenzrelation ist. **D**

9.28 Zeige, dass $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ einen kommutativen Ring bildet. **D**

Algebraische Strukturen

Zusammenfassung

Mengen $\mathbb{M}$ bilden bezüglich **Verknüpfungen** (Rechenoperationen) **algebraische Strukturen**.

Die Verknüpfungen werden auf das **Kommutativ-** und das **Assoziativgesetz** sowie auf die **Distributivgesetze** hin überprüft.

Weiters wird die Struktur auf die Existenz **neutraler** und **inverser Elemente** untersucht.

Wichtige algebraische Strukturen sind **Gruppe, Ring** und **Körper**.

Um Beziehungen zwischen den Elementen von Mengen herzustellen, werden **Relationen** verwendet. Eine Relation ist eine Menge von geordneten Paaren, die eine Teilmenge von $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ ist.

Zwei Zahlen a, b $\in \mathbb{Z}$ heißen **kongruent modulo m** $\in \mathbb{N}^*$ ($a \equiv b \bmod m$), wenn sie bei der Division durch m denselben Rest haben. Eine **Restklasse modulo m** ist die Menge aller Zahlen, die bei Division durch m den Rest haben.

Weitere Aufgaben

Aufgaben 9.29 – 9.31: Schreibe deine Überlegungen mithilfe der „∘"-Symbolik nieder.

AD **9.29** Untersuche die Vorgänge „T-Shirt anziehen", „Socken anziehen", „Schuhe anziehen" auf Kommutativität.

AD **9.30** Welche Elemente muss die Menge $\mathbb{M}$ ={Milch, Kaffee, Zucker, …} jedenfalls enthalten, damit der Vorgang „Vermischen" eine Verknüpfung ist?

A **9.31** Bei einem Zahlenratespiel ist die Menge $\mathbb{M}$ der Zahlen, aus der eine gewählt wurde, vorgegeben. Finde eine Verknüpfung, mit der der Fragesteller Hinweise geben kann.

AB **9.32** Ist der Winkel β größer als π, soll der Sinus von α berechnet werden, andernfalls der Cosinus von α. Gib das Ergebnis der Verknüpfung $\alpha \circ \beta$ an.

a) $\alpha = \frac{\pi}{12}, \beta = 2$ **b)** $\alpha = \frac{3\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}$ **c)** $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = 3{,}2$ **d)** $\alpha = \pi, \beta = 7{,}853...$

D **9.33** Gib an, welche Aussagen richtig, welche falsch sind. Begründe deine Antworten.
A) Ein Ring $(\mathbb{M}, +, \cdot)$, der bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{M} \setminus \{0\}$ eine Abel'sche Gruppe bildet, ist ein Körper.
B) In der Gruppe $(\mathbb{N}, +)$ ist 1 das neutrale Element.
C) Die Primzahlen bilden bezüglich der Addition eine algebraische Struktur.

BD **9.34** Untersuche, ob die Zahlenmenge $\mathbb{M}$ eine algebraische Struktur bezüglich der Addition bildet und gib gegebenenfalls die Art der Struktur an.
a) $\mathbb{M} = \mathbb{Z}^+$ **b)** $\mathbb{M} = \mathbb{Q}$ **c)** $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ **d)** $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$

D **9.35** Überprüfe stichprobenartig, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bezüglich der Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

C **9.36** Gib an, ob es sich um eine Äquivalenz-, Ordnungsrelation oder weder noch handelt.
a) $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, $aRb \Leftrightarrow a \leqslant b$
b) $\mathbb{A} = \mathbb{N}$, $aRb \Leftrightarrow$ a und b haben dieselbe Einerstelle

9.37 Berechne. B

a) $[1]_3 + [7]_3$ **b)** $[4]_{10} + [25]_{10}$ **c)** $[5]_7 \cdot [13]_7$ **d)** $[13]_{12} \cdot [14]_{12}$

9.38 Zeige, dass für die Addition und Multiplikation von Restklassen gilt: BD

a) $[a]_m + [b]_m = [a + b]_m$ **b)** $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$

9.39 Die Restklassenrechnung kann beim Programmieren verwendet werden, um zum Beispiel den größten gemeinsamen Teiler zu ermitteln. Dazu wird der Euklid'sche Algorithmus verwendet. Recherchiere diesen und schreibe ein Programm zur Ermittlung des ggT unter Verwendung der Modulo-Rechnung. CD



Aufgaben in englischer Sprache

associative	assoziativ	group	Gruppe
abelian group	Abel'sche Gruppe	identity element	neutrales Element
algebraic structure	Algebraische Struktur	inverse element	inverses Element
commutative	kommutativ	operation	Verknüpfung
distributive	distributiv	order relation	Ordnungsrelation
equivalence relation	Äquivalenzrelation	ring	Ring
field	Körper	set	Menge

9.40 True or false? Give reasons for your decision. D

1) Every field is a ring.

2) $(\mathbb{N}, +)$ is an abelian group.

3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ is a field.

9.41 A commutative ring is a ring which also satisfies commutativity for multiplication. Show that the integers $\mathbb{Z}$ are a commutative ring under the operations of addition and multiplication. D

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kenne einige algebraische Strukturen.	
2	Ich kann einen wichtigen Unterschied zwischen Gruppe und Körper nennen.	
3	Gib jeweils das neutrale und das inverse Element allgemein an. A) $(\mathbb{Z}, +)$ B) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ C) $\mathbb{M}$ = {0°-Drehung, 90°-Drehung, 180°-Drehung, 270°-Drehung}, Verknüpfung ∘ … Hintereinanderausführung	
4	Gib an, ob R eine Relation auf $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ mit $\mathbb{M} = \{1, 2, 3\}$ ist. A) R = {(1,1), (2, 2), (3,3)} B) R = {(1, 2, 3)} C) R = {(1, 3)}	
5	Berechne: 1) $[31]_7$ 2) $[28]_7 + [2]_7$ 3) $[5]_7 \cdot [17]_7$	

Lösung:
1) siehe Seiten 301ff 2) Eine Gruppe ist nur für eine Verknüpfung definiert.
3) A) neutral: 0, invers: –a; B) neutral: 1, invers: $\frac{1}{a}$; C) neutral: 0°-Drehung, invers: jeweils auf 360° ergänzte Drehung
4) A) und C) sind Relationen, B) ist keine. 5) 1) $[3]_7$, 2) $[2]_7$, 3) $[1]_7$

Diese Mathematikreihe bietet in zeitgemäßer Sprache und funktionellem Layout altersadäquate Zugänge zur Mathematik und ihren technischen Anwendungen. Nach lebensnahen Einstiegen erfolgt in schrittweisen Erklärungen eine Erarbeitung des Basiswissens.
Dieses wird in alltagsbezogenen und vernetzten Aufgaben angewendet und erweitert.

- altersadäquate Einstiege
- zeitgemäße Sprache und Layout
- alltagsbezogene und technische Aufgaben
- vernetzte Aufgaben

www.hpt.at

Mathematik mit techn. Anw. 3 (LP 2011)
Schulbuchnummer: 165008
ISBN 978-3-230-03635-3
Wien, 1. Auflage

Alle Drucke der 1. Auflage können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.



$\pi \approx 3$